

Cvičení 10

Pravděpodobnostní vytvořující funkce

Definice: Necht' X je celočíselná nezáporná náhodná veličina s pravděpodobnostní funkcí

$$P(X = k) = \begin{cases} p_k & \text{pro } k = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}. \text{ Pravděpodobnostní vytvořující funkce náhodné veličiny } X \text{ je}$$

dána vztahem: $g_X(z) = E(z^X) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$, kde $|z| \leq 1$.

Vlastnosti:

$$\text{a) } p_k = \left. \frac{g_X^{(k)}(z)}{k!} \right|_{z=0} \text{ pro } k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{b) } E(X) = \left. \frac{d}{dz} g_X(z) \right|_{z=1}, \quad D(X) = \left. \frac{d^2}{dz^2} g_X(z) \right|_{z=1} + E(X) - [E(X)]^2.$$

c) X_1, \dots, X_n jsou stochasticky nezávislé celočíselné nezáporné náhodné veličiny, $Y = \sum_{i=1}^n X_i$

$$\Rightarrow g_Y(z) = g_{X_1}(z) \cdot \dots \cdot g_{X_n}(z).$$

d) X_1, \dots, X_n jsou stochasticky nezávislé celočíselné nezáporné náhodné veličiny, které mají

$$\text{všechny stejnou pravděpodobnostní funkci } P(X_i = k) = \begin{cases} p_k & \text{pro } k = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Pak transformovaná náhodná veličina $Y = \sum_{i=1}^n X_i$ má pravděpodobnostní funkci

$$P(Y = k) = \begin{cases} \{p_k\}^{n*} & \text{pro } k = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}.$$

e) Necht' X_1, X_2, \dots je posloupnost stochasticky nezávislých celočíselných nezáporných náhodných veličin, které mají všechny stejnou pravděpodobnostní funkci

$$P(X_i = k) = \begin{cases} p_k & \text{pro } k = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}, \quad i = 1, 2, \dots \text{ Necht' } N \text{ je celočíselná nezáporná náhodná}$$

veličina nezávislá na X_1, X_2, \dots s pravděpodobnostní funkcí $P(N = n) = \begin{cases} q_n & \text{pro } n = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$.

Pak náhodná veličina $S = X_1 + \dots + X_N$ (tj. součet náhodného počtu náhodných veličin) má

$$\text{pravděpodobnostní funkci } P(S = k) = h_k = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} q_n \{p_k\}^{n*} & \text{pro } k = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}.$$

f) Pro pravděpodobnostní vytvořující funkci náhodné veličiny $S = X_1 + \dots + X_N$ platí:

$$g_S(z) = g_N(g_X(z)).$$

$$\text{g) } E(S) = E(N)\mu, \quad D(S) = D(N)\mu^2 + E(N)\sigma^2, \quad \text{kde } \mu = E(X_i), \quad \sigma^2 = D(X_i), \quad i = 1, 2, \dots$$

Příklad 1.: Celočíselná nezáporná náhodná veličina X má pravděpodobnostní funkci

$$P(X = k) = \begin{cases} \frac{1}{k(k+1)} & \text{pro } k = 1, 2, \dots \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}. \text{ Najděte její pravděpodobnostní vytvořující funkci.}$$

Návod: Použijte rozklad na parciální zlomky a Taylorův rozvoj funkce $\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$.

Řešení: $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} + \frac{-1}{k+1},$

$$\begin{aligned} g_X(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} + \frac{-1}{k+1} \right) z^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} - \frac{1}{z} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{k+1} = -\ln(1-z) - \frac{1}{z} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{z^j}{j} = \\ &= -\ln(1-z) - \frac{1}{z} \left(\sum_{j=2}^{\infty} \frac{z^j}{j} - z \right) = -\ln(1-z) + \frac{1}{z} [\ln(1-z) + z] = -\ln(1-z) + \frac{\ln(1-z)}{z} + 1 = \\ &= 1 + \frac{1-z}{z} \ln(1-z) \end{aligned}$$

Příklad 2.: Pomocí pravděpodobnostních vytvořujících funkcí najděte střední hodnoty a rozptyly těchto rozložení: a) $A(\vartheta)$, b) $Bi(n, \vartheta)$, c) $Ge(\vartheta)$.

Řešení:

Ad a) $g_X(z) = 1 - \vartheta + z\vartheta$, $E(X) = \frac{d}{dz} g_X(z) \Big|_{z=1} = \vartheta$

$$D(X) = \frac{d^2}{dz^2} g_X(z) \Big|_{z=1} + E(X) - [E(X)]^2 = \vartheta - \vartheta^2 = \vartheta(1 - \vartheta)$$

Ad b) $g_X(z) = (1 - \vartheta + z\vartheta)^n$, $E(X) = \frac{d}{dz} g_X(z) \Big|_{z=1} = n(1 - \vartheta + z\vartheta)^{n-1} \vartheta \Big|_{z=1} = n\vartheta$

$$\begin{aligned} D(X) &= \frac{d^2}{dz^2} g_X(z) \Big|_{z=1} + E(X) - [E(X)]^2 = n(n-1)(1 - \vartheta + z\vartheta)^{n-2} \vartheta^2 \Big|_{z=1} + n\vartheta - n^2\vartheta^2 = \\ &= n(n-1)\vartheta^2 + n\vartheta - n^2\vartheta^2 = n\vartheta(1 - \vartheta) \end{aligned}$$

Ad c) $g_X(z) = \frac{\vartheta}{1 - z(1 - \vartheta)}$, $E(X) = \frac{d}{dz} g_X(z) \Big|_{z=1} = \frac{\vartheta(1 - \vartheta)}{[1 - z(1 - \vartheta)]^2} \Big|_{z=1} = \frac{\vartheta(1 - \vartheta)}{\vartheta^2} = \frac{1 - \vartheta}{\vartheta}$

$$\begin{aligned} D(X) &= \frac{d^2}{dz^2} g_X(z) \Big|_{z=1} + E(X) - [E(X)]^2 = \frac{2\vartheta(1 - \vartheta)^2}{[1 - z(1 - \vartheta)]^3} \Big|_{z=1} - \frac{1 - \vartheta}{\vartheta} + \left(\frac{1 - \vartheta}{\vartheta} \right)^2 = \\ &= \frac{2\vartheta(1 - \vartheta)^2}{\vartheta^2} - \frac{1 - \vartheta}{\vartheta} + \left(\frac{1 - \vartheta}{\vartheta} \right)^2 = \frac{1 - \vartheta}{\vartheta^2} \end{aligned}$$

Příklad 3.: Provedeme tři nezávislé pokusy, v nichž sledujeme nastoupení úspěchu. V prvním pokusu nastává úspěch s pravděpodobností 0,5, ve druhém 0,2 a ve třetím 0,1. Najděte pravděpodobnostní vytvořující funkci náhodné veličiny Y , která udává počet úspěchů v těchto třech pokusech.

a) Vyjádřete pravděpodobnostní vytvořující funkci náhodné veličiny Y .

b) Pomocí pravděpodobnostní vytvořující funkce najděte střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny Y .

c) Pomocí pravděpodobnostní vytvořující funkce odvoďte pravděpodobnostní funkci náhodné veličiny Y.

Řešení:

Ad a) $X \sim A(\vartheta) \Rightarrow g_X(z) = 1 - \vartheta + z\vartheta$, $X_1 \sim A(0,5)$, $X_2 \sim A(0,2)$, $X_3 \sim A(0,1)$

$$g_Y(z) = g_{X_1}(z)g_{X_2}(z)g_{X_3}(z) = (0,5 + 0,5z)(0,8 + 0,2z)(0,9 + 0,1z) = 0,36 + 0,49z + 0,14z^2 + 0,01z^3$$

$$\text{Ad b) } E(X) = \frac{d}{dz} g_X(z) \Big|_{z=1} = 0,49 + 0,28 + 0,03 = 0,8$$

$$D(X) = \frac{d^2}{dz^2} g_X(z) \Big|_{z=1} + E(X) - [E(X)]^2 = 0,28 + 0,06 + 0,8 - 0,64 = 0,5$$

$$\text{Ad c) } p_0 = g_Y(0) = 0,36, \quad p_1 = g'_Y(0) = 0,49, \quad p_2 = \frac{g''_Y(0)}{2} = 0,14, \quad p_3 = \frac{g'''_Y(0)}{6} = 0,01$$

Příklad 4.: Předpokládejme, že počet vajíček, která snese slepice za sezónu, je náhodná veličina $N \sim \text{Po}(\lambda)$. Pravděpodobnost, že se z libovolného vajíčka vylíhne kuře, je ϑ . Pomocí pravděpodobnostní vytvořující funkce odvoďte rozložení náhodné veličiny S, která udává počet kuřat vylíhlých za sezónu z vajíček dané slepice. Pomocí vzorce z bodu (g) vypočtete též $E(S)$ a $D(S)$.

Řešení: $X_i \dots$ počet kuřat vylíhlých z i-tého vajíčka, $X_i \sim A(\vartheta)$, $g_X(z) = 1 - \vartheta + z\vartheta$

$N \dots$ počet vajíček snesených za sezónu, $N \sim \text{Po}(\lambda)$, $g_N(z) = e^{\lambda(z-1)}$

$S \dots$ počet vylíhlých kuřat, $S = X_1 + \dots + X_N$, $g_S(z) = g_N(g_X(z)) = e^{\lambda(1-\vartheta + z\vartheta - 1)} = e^{\lambda\vartheta(z-1)}$

$$E(S) = E(N)E(X) = \lambda\vartheta, \quad D(S) = D(N)[E(X)]^2 + E(N)D(X) = \lambda\vartheta^2 + \lambda\vartheta(1 - \lambda\vartheta) = \lambda\vartheta$$