Cvičení 11.

Galtonův – Watsonův proces větvení

Definice: Nechť jedinec tvořící nultou generaci může dát vznik 0, 1, 2, ... jedincům (potomkům) první generace. Analogicky každý jedinec z první generace může dát vznik 0, 1, 2, ... jedincům druhé generace atd. Přitom předpokládáme, že
a) počet potomků X náhodně zvoleného jedince má pravděpodobnostní funkci
$P(X = k) = \begin{cases} p_k \text{ pro } k = 0,1,2,\dots \\ 0 \text{ jinak} \end{cases}$, která nezávisí na zvoleném jedinci ani na generaci, do níž přísluší;
b) jedinci z dané generace dávají vzniknout svým potomkům vzájemně nezávisle.
Označme X_n počet jedinců n-té generace (speciálně je $X_0 = 1$). Za uvedených předpokladů posloupnost náhodných veličin $\{X_n; n \in N_0\}$ tvoří homogenní markovský řetězec s množinou stavů J = {0, 1, 2, ...}. Tento řetězec se nazývá Galtonův – Watsonův proces větvení.

Vlastnosti:

1. Matice přechodu má tvar $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ p_0 & p_1 & p_2 & \dots \\ p_0^2 & 2p_0p_1 & p_1^2 + 2p_0p_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$, tj. $\forall i, j \in J : p_{ij} = \{p_j\}^{i*}$.

2. Pro pravděpodobnostní vytvořující funkci náhodné veličiny X_{n+1} platí:
$g_{X_{n+1}}(z) = \begin{cases} g_{X_n}(g_X(z)) \text{ pro } n = 1,2,\dots \\ 0 \text{ pro } n = 0 \end{cases}$, kde $g_X(z)$ je pravděpodobnostní vytvořující funkce náhodné veličiny X_1.

3. Pro střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny X_n platí:
$E(X_n) = \mu^n$, $D(X_n) = \begin{cases} \dfrac{\sigma^2 \mu^{n-1}(\mu^n - 1)}{\mu - 1} \text{ pro } \mu \neq 1 \\ n\sigma^2 \text{ pro } \mu = 1 \end{cases}$, kde $\mu = E(X_1), \sigma^2 = D(X_1)$

4. Pro pravděpodobnost vyhynutí v n-té generaci platí: $P(X_n = 0) = q_n = g_{X_n}(0)$

5. Pro limitní pravděpodobnost vyhynutí platí:
a) Je-li $\mu \leq 1$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = 1$.
b) Je-li $\mu > 1$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = \xi$, kde $\xi \in (0,1)$ je nejmenší kladný kořen rovnice $z = g_X(z)$.

Příklad: Uvažme G – W proces, v němž $p_0 = \frac{1}{5}, p_1 = \frac{1}{5}, p_2 = \frac{3}{5}, p_k = 0$, k = 3,4,…

a) Vypočtěte prvky matice přechodu **P** pro i = 0, 1, 2 a j = 0, 1, 2, 3, 4.
b) Najděte pravděpodobnostní vytvořující funkci počtu jedinců ve 2. generaci.
c) Pomocí pravděpodobnostní vytvořující funkce počtu jedinců ve 2. generaci vypočtěte pravděpodobnostní funkci.
d) Najděte střední hodnotu a rozptyl počtu jedinců ve 2. generaci.
e) Vypočtěte limitní pravděpodobnost vyhynutí.

Řešení:

Ad a) $\forall i, j \in J : p_{ij} = \{p_j\}^{i*}$

Nultý řádek matice přechodu má prvky 1, 0, 0, 0, 0, …

1. řádek matice přechodu má prvky $\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{3}{5}, 0, 0, \ldots$

Odvodíme prvky 2. řádku matice přechodu:

$$p_{20} = \{p_0\}^{2*} = p_0^{\,2} = \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{25}$$

$$p_{21} = \{p_0, p_1\}^{2*} = \{p_0, p_1\} * \{p_0, p_1\} = p_0 p_1 + p_1 p_0 = 2 p_0 p_1 = 2\left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{2}{25}$$

$$p_{22} = \{p_0, p_1, p_2\}^{2*} = \{p_0, p_1, p_2\} * \{p_0, p_1, p_2\} = p_0 p_2 + p_1^{\,2} + p_2 p_0 = p_1^{\,2} + 2 p_0 p_2 =$$
$$= \left(\frac{1}{5}\right)^2 + 2\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{5} = \frac{7}{25}$$

$$p_{23} = \{p_0, p_1, p_2, p_3\}^{2*} = \{p_0, p_1, p_2, p_3\} * \{p_0, p_1, p_2, p_3\} = p_0 p_3 + p_1 p_2 + p_2 p_1 + p_3 p_0 = |p_3 = 0| =$$
$$= 2 p_1 p_2 = 2\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{5} = \frac{6}{25}$$

$$p_{24} = \{p_0, p_1, p_2, p_3, p_4\}^{2*} = \{p_0, p_1, p_2, p_3, p_4\} * \{p_0, p_1, p_2, p_3, p_4\} = p_0 p_4 + p_1 p_3 + p_2^{\,2} + p_3 p_1 + p_4 p_0 =$$
$$= |p_3 = 0, p_4 = 0| = p_2^{\,2} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$$

Matice přechodu má tedy tvar:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 0 & 0 & \ldots \\ \frac{1}{25} & \frac{2}{25} & \frac{7}{25} & \frac{6}{25} & \frac{9}{25} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$

Ad b) Abychom odvodili pravděpodobnostní vytvořující funkci $g_{x_2}(z)$, musíme znát $g_x(z)$.

$$g_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k = p_0 + p_1 z + p_2 z^2 = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} z + \frac{3}{5} z^2 \text{, tedy}$$

$$g_{X_2}(z)=g_X(g_X(z))=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}z+\frac{3}{5}z^2\right)+\frac{3}{5}\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}z+\frac{3}{5}z^2\right)^2=\ldots=$$
$$=\frac{33}{125}+\frac{11}{125}z+\frac{36}{125}z^2+\frac{18}{125}z^3+\frac{27}{125}z^4$$

Ad c) $P(X_2=0)=g_{X_2}(0)=\dfrac{33}{125}$,

$$P(X_2=1)=\frac{d}{dz}g_{X_2}(z)\Big|_{z=0}=\frac{11}{125}+2\frac{36}{125}z+3\frac{18}{125}z^2+4\frac{27}{125}z^3\Big|_{z=0}=\frac{11}{125},$$
$$P(X_2=2)=\frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}g_{X_2}(z)\Big|_{z=0}=\frac{1}{2}\left(2\frac{36}{125}+3\cdot2\frac{18}{125}z+4\cdot3\frac{27}{125}z^2\right)\Big|_{z=0}=\frac{36}{125}$$
$$P(X_2=3)=\frac{1}{6}\frac{d^3}{dz^3}g_{X_2}(z)\Big|_{z=0}=\frac{1}{6}\left(3\cdot2\frac{18}{125}+4\cdot3\frac{27}{125}z\right)\Big|_{z=0}=\frac{18}{125}$$
$$P(X_2=4)=\frac{1}{24}\frac{d^4}{dz^4}g_{X_2}(z)\Big|_{z=0}=\frac{1}{24}\left(4\cdot3\frac{27}{125}\right)\Big|_{z=0}=\frac{27}{125}$$

Ad d) $E(X_2)=0\cdot\dfrac{33}{125}+1\cdot\dfrac{11}{125}+2\cdot\dfrac{36}{125}+3\cdot\dfrac{18}{125}+4\cdot\dfrac{27}{125}=\dfrac{245}{125}=\dfrac{49}{25}=1{,}96$

$$D(X_2)=E\left(X_2{}^2\right)-\left[E(X_2)\right]^2=\ldots=\frac{1344}{625}=2{,}1504$$

Střední hodnotu a rozptyl veličiny X_2 můžeme též spočítat pomocí vztahů

$$E(X_n)=\mu^n,\ \ D(X_n)=\begin{cases}\dfrac{\sigma^2\mu^{n-1}(\mu^n-1)}{\mu-1}\text{ pro }\mu\neq1\\ n\sigma^2\text{ pro }\mu=1\end{cases},\text{ kde }\mu=E(X_1),\sigma^2=D(X_1)$$

Nejprve spočteme střední hodnotu μ počtu potomků jedince nulté generace:

$$\mu=E(X)=0\cdot\frac{1}{5}+1\cdot\frac{1}{5}+2\cdot\frac{3}{5}=\frac{7}{5}=1{,}4$$

A poté rozptyl: $\sigma^2=D(X)=E(X^2)-\left[E(X)\right]^2=\dfrac{1}{5}+4\dfrac{3}{5}-\dfrac{49}{25}=\dfrac{65-49}{25}=\dfrac{16}{25}$.

Nyní dosadíme do vzorce $E(X_2)=\mu^2=\dfrac{49}{25}=1{,}96$ a do vzorce

$$D(X_2)=\frac{\sigma^2\mu(\mu^2-1)}{\mu-1}=\frac{\frac{16}{25}\cdot\frac{7}{5}\left(\frac{49}{25}-1\right)}{\frac{7}{5}-1}=\ldots=\frac{1344}{625}=2{,}1504$$

Vidíme, že oběma způsoby výpočtu dospějeme k témuž výsledku.

Ad e)

Protože $\mu = 1{,}4 > 1$, pak $\lim_{n \to \infty} q_n = \xi$, kde $\xi \in (0{,}1)$ je nejmenší kladný kořen rovnice $z = g_X(z) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} z + \frac{3}{5} z^2$. Řešením této kvadratické rovnice zjistíme, že limitní pravděpodobnost vyhynutí je $\frac{1}{3}$.