Cvičení 4.

Příklad 1.: Při provozu balicího automatu vznikají během směny náhodné poruchy, které se řídí rozložením Po(2). Jaká je pravděpodobnost, že během směny dojde k aspoň jedné poruše?
Řešení: X – počet poruch během směny, X ~ Po(2),

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{2^0}{0!}e^{-2} = 0{,}8647.$$

V MATLABu: p = 1 – poisspdf(0,2)

Příklad 2.: Telefonní ústředna zapojí během hodiny průměrně 15 hovorů. Jaká je pravděpodobnost, že během 4 minut ústředna zapojí a) právě 1 hovor, b) aspoň 2 hovory?
Řešení: X – počet zapojených hovorů během 4 minut = 1/15 hodiny, X ~ Po(tλ), kde t = 1/15 a λ = 15, tedy X ~ Po(1).
Ad a) $P(X = 1) = e^{-1} = 0{,}36788$,
Ad b) $P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 0) = 1 - 2e^{-1} = 0{,}264242$
V MATLABu: a) p = poisspdf(1,1), b) p = 1 – poisscdf(1,1)

Příklad 3.: Ze zkušenosti víme, že při správné obsluze stroje je v průměru 0,1% výrobků zmetkových. Ke stroji nastoupil nový pracovník. Za týden vyrobil 5 000 kusů, z nichž 11 bylo zmetkových. Lze takto vysoký (či vyšší) počet zmetků vysvětlit působením náhodných vlivů?
Řešení: Počítáme pravděpodobnost, že pracovník vyrobil aspoň 11 zmetků za předpokladu, že stroj je obsluhován správně.
X – počet vyrobených zmetků za týden, X ~ Bi(5000, 0,001). Při splnění podmínek dobré aproximace lze rozložení veličiny X aproximovat rozložením Po(5).

$$P(X \geq 11) = 1 - P(X \leq 10) = 1 - \sum_{t=0}^{10} \frac{5^t}{t!} e^{-5} = 1 - 0{,}9863 = 0{,}0137.$$

Je zřejmé, že nový pracovník nepracuje správně.
V MATLABu: p = 1 – poisscdf(10,5)
Přesný výpočet v MATLABu: p = 1 – binocdf(10,5000,0.001)

Příklad 4.: Semena rostlin určitého druhu jsou znečištěna malým množstvím plevele. Je známo, že na jedné jednotce plochy vyrostou po osetí v průměru 4 rostliny plevele.
Vypočítejte pravděpodobnost, že na dané jednotce plochy:
a) nebude žádný plevel,
b) vyrostou nejvýše 3 rostliny plevele,
c) vyroste aspoň 5, ale nejvýše 7 rostlin plevele.
Řešení: X – počet rostlin plevele na jednotce plochy, X ~ Po(4)
Ad a) $P(X = 0) = e^{-4} = 0{,}0183$
V MATLABu: p=poisspdf(0;4)
Ad b) $P(X \leq 3) = \sum_{x=0}^{3} \frac{4^x}{x!} e^{-4} = 0{,}4335$
V MATLABu: p=poisscdf(3;4)
Ad c) $P(5 \leq X \leq 7) = \sum_{x=5}^{7} \frac{4^x}{x!} e^{-4} = 0{,}32$
V MATLABu: p=poisscdf(7;4)-poisscdf(4;4)

Příklad 5.: V prodejně posunuli zavírací dobu ve všední dny z 18 na 19 hodin. Sestrojte 90% asymptotický empirický interval spolehlivosti pro střední hodnotu počtu zákazníků v této době, navštívilo-li prodejnu ve 30 náhodně zvolených dnech ve sledované době celkem 225 zákazníků. Přitom předpokládáme, že počet zákazníků v určitém časovém intervalu má Poissonovo rozložení.

Řešení:

Meze 100(1-α)% asymptotického empirického intervalu spolehlivosti pro střední hodnotu λ jsou:

$$d = m - \sqrt{\frac{m}{n}}u_{1-\alpha/2},\ h = m + \sqrt{\frac{m}{n}}u_{1-\alpha/2}$$

V našem případě m = 225/30, n = 30, α = 0,1, $u_{1-\alpha/2} = u_{0,95} = 1,64$

$$d = \frac{225}{30} - \sqrt{\frac{225}{30^2}}1,64 = 6,68,$$

$$h = \frac{225}{30} + \sqrt{\frac{225}{30^2}}1,64 = 8,32$$

Střední hodnota počtu zákazníků se s pravděpodobností přibližně 90 % nachází v mezích od 6,68 do 8,32.

V MATLABu:

```
d=225/30-(15/30)*norminv(0.95,0,1)
h=225/30+(15/30)*norminv(0.95,0,1)
```

Příklad 6.: U 32 náhodně vybraných tabulí hliníkového plechu určeného k pokrývání střech byly zjištěny tyto počty povrchových závad:

Počet závad	0	1	2	3	4	5	6
Počet tabulí	10	8	6	4	2	1	1

Předpokládáme, že počet povrchových závad připadajících na jednu tabuli hliníkového plechu se řídí Poissonovým rozložením

a) Jaká je pravděpodobnost, že u náhodně vybrané tabule se vyskytnou aspoň 3 povrchové závady?

b) Vypočtěte meze 95% asymptotického intervalu spolehlivosti pro střední hodnotu počtu povrchových závad připadajících na jednu tabuli hliníkového plechu.

Řešení: Parametr λ odhadneme pomocí váženého průměru:

$$m = \frac{1}{32}\left(0\cdot 10 + 1\cdot 8 + 2\cdot 6 + 3\cdot 4 + 4\cdot 2 + 5\cdot 1 + 6\cdot 1\right) = \frac{51}{32} = 1,5938$$

Ad a) $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - \sum_{x=0}^{2}\frac{1,5938^x}{x!}e^{-1,5938} = 0,215$

Ad b) $d = m - \frac{1}{2n} - \sqrt{\frac{m}{n}}u_{1-\alpha/2} = 1,5938 - \frac{1}{64} - \sqrt{\frac{1,5938}{32}}\cdot 1,96 = 1,1407$, $h = 2,0468$

Příklad 7.: Nechť X ~ Po(λ). Dokažte, že pro $\forall x = 1,2,3,\cdots$ platí: $x\pi(x) = \lambda\pi(x-1)$.
Pravděpodobnostní funkci Poissonova rozložení lze tedy vyjádřit rekurzívně:
$\pi(x) = \frac{\lambda}{x}\pi(x-1)$ pro x = 1, 2, 3, …, $\pi(0) = e^{-\lambda}$

Řešení:

$$x\pi(x) = x\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda} = \frac{\lambda^x}{(x-1)!}e^{-\lambda} = \lambda\frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}e^{-\lambda} = \lambda\pi(x-1)$$

Příklad 8.: Nechť X ~ Po(λ). Dokažte, že pro $\forall x = 0,1,2,\cdots$ platí: $\Phi(x) = \frac{\Gamma(x+1,\lambda)}{\Gamma(x+1)}$, kde

$\Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1}e^{-t}dt$, $\Gamma(a,\lambda) = \int_\lambda^\infty t^{a-1}e^{-t}dt$,

pro přirozené a: $\Gamma(a) = (a-1)!$, $\Gamma(a,\lambda) = e^{-\lambda}\lambda^{a-1} + (a-1)e^{-\lambda}\lambda^{a-2} + \ldots + (a-1)!e^{-\lambda}$

Řešení:

$$\frac{\Gamma(x+1,\lambda)}{\Gamma(x+1)} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} + x\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x-1}}{x!} + x(x-1)\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x-2}}{x!} + \ldots + x!\frac{e^{-\lambda}}{x!} = \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda} + \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}e^{-\lambda} + \ldots + e^{-\lambda} =$$
$$= \pi(x) + \pi(x-1) + \ldots + \pi(0) = \Phi(x)$$

Příklad 9.: Na výrobní lince se zhruba každé dvě hodiny vyskytne porucha. Zavedeme náhodnou veličinu X, která udává počet poruch na výrobní lince během osmihodinové pracovní směny.
a) Sestrojte tabulku hodnot pravděpodobnostní funkce a distribuční funkce náhodné veličiny X pro x = 0, 1, …, 10.
b) S jakou pravděpodobností nastane více než deset poruch?
c) Určete nejpravděpodobnější počet poruch během osmihodinové směny.
d) Nakreslete graf pravděpodobnostní funkce a graf distribuční funkce náhodné veličiny X.
Řešení pomocí MATLABu:
Ad a)

```
x=[0:10]';
pf=poisspdf(x,4);
df=poisscdf(x,4);
[x pf df]
```

Ad b) Pravděpodobnost, že počet poruch je větší než deset, je 0,0028.

Ad c) Nejpravděpodobnější počet poruch během osmihodinové směny je tři až čtyři.

Ad d)

```
plot(x,pf,'o')
figure
stairs(x,df)
```

Samostatný úkol: Jak nakreslit graf distribuční funkce bez svislých čar?
Jedno z možných řešení:

```
hold on
for i=1:(length(x)-2) plot([i,i],[0,1],'w'); end
```

Příklad 10.: Pro n = 30 a ϑ = 0,1 ilustrujte aproximaci binomického rozložení Bi(n, ϑ) Poissonovým rozložením Po(nϑ). Vypočtené hodnoty obou pravděpodobnostních funkcí v bodech x = 0, 1, …, 30 zapište do tabulky a znázorněte graficky.

Řešení pomocí MATLABu:

```
x=[0:1:30]';
pf1=binopdf(x,30,0.1);
pf2=poisspdf(x,3);
[x pf1 pf2]
plot(x,pf1,'o',x,pf2,'*')
```

Příklad 11.: Vygenerujte 100 realizací náhodné veličiny s rozložením Po(2) a uložte je do proměnné r. Odhadněte střední hodnotu a vypočtěte meze 95% intervalu spolehlivosti pro střední hodnotu Poissonova rozložení na základě těchto realizací.

Řešení pomocí MATLABu:

```
r=poissrnd(2,100,1);
[m,meze]=poissfit(r)
```

Upozornění: MATLAB počítá meze intervalu spolehlivosti pro střední hodnotu λ podle vzorce:

$$d = \frac{1}{2n}\chi^2_{\alpha/2}(2nm),\ h = \frac{1}{2n}\chi^2_{1-\alpha/2}(2(nm+1)),$$

nikoliv podle vzorce $d = m - \sqrt{\frac{m}{n}}u_{1-\alpha/2}$, $h = m + \sqrt{\frac{m}{n}}u_{1-\alpha/2}$, který využívá aproximaci Poissonova rozložení normálním rozložením.