Cvičení 6 – příklad SHO s jednou linkou obsluhy

Máme k dispozici záznamy o okamžicích příchodů a odchodů 16 zákazníků do SHO během 8 hodin.

č. zák.	příchod	odchod	doba čekání	doba mezi příchody	obsluha	prostoj	celkem
1	0,20	0,30	0		10	20	10
2	0,40	1,10	0	20	30	10	30
3	0,50	1,30	20	10	20	0	40
4	2,10	3,10	0	80	60	40	60
5	3,20	3,50	0	70	30	10	30
6	3,40	4,10	10	20	20	0	30
7	4,10	4,40	0	30	30	0	30
8	4,20	5,00	20	10	20	0	40
9	4,50	5,50	10	30	50	0	60
10	5,10	6,00	40	20	10	0	50
11	5,50	6,10	10	40	10	0	20
12	6,20	6,40	0	30	20	10	20
13	6,40	6,50	0	20	10	0	10
14	7,10	7,30	0	30	20	20	20
15	7,40	7,50	0	30	10	10	10
16	7,50	8,00	0	10	10	0	10

Předpokládáme, že vstupní proud zákazníků je Poissonův proces s parametrem λ (tj. střední hodnota počtu zákazníků, kteří vstoupí do SHO za jednotku času, je λ). Za časovou jednotku zvolíme 1 hodinu. Dále předpokládáme, že doba obsluhy se řídí exponenciálním rozložením s parametrem μ (tj. střední hodnota doby obsluhy je $\frac{1}{\mu}$).

Úkol 1.: Odhadněte parametr λ a sestrojte pro něj 95% interval spolehlivosti a také 95% asymptotický interval spolehlivosti (s opravou na nespojitost).
Řešení: Vzhledem k tomu, že během 8 h přišlo do SHO 16 zákazníků, je průměrný počet zákazníků za 1 h roven 2, tedy $m = \hat{\lambda} = \frac{16}{8} = 2$. Víme tedy, že n = 8, m = 2, $\alpha = 0{,}05$.

100(1-α)% interval spolehlivosti pro λ:

$$d = \frac{1}{2n}\chi^2{}_{\alpha/2}(2nm) = \frac{1}{16}\chi^2{}_{0,025}(32) = \frac{1}{16}18{,}2908 = 1{,}14\,,$$

$$h = \frac{1}{2n}\chi^2{}_{\alpha/2}(2nm+2) = \frac{1}{16}\chi^2{}_{0,975}(34) = \frac{1}{16}51{,}966 = 3{,}25$$

S pravděpodobností aspoň 0,95 lze očekávat, že střední hodnota počtu zákazníků, kteří přijdou do SHO v průběhu 1 hodiny, se bude nacházet v mezích 1,14 až 3,25.

100(1-α)% asymptotický interval spolehlivosti pro λ (s opravou na nespojitost):

$$d = m - \frac{1}{2n} - \sqrt{\frac{m}{n}}u_{1-\alpha/2} = 2 - \frac{1}{16} - \sqrt{\frac{2}{8}}1{,}96 = 0{,}96\,,$$

$$h = m + \frac{1}{2n} + \sqrt{\frac{m}{n}}u_{1-\alpha/2} = 2 + \frac{1}{16} + \sqrt{\frac{2}{8}}1{,}96 = 3{,}04$$

S pravděpodobností aspoň 0,95 lze očekávat, že střední hodnota počtu zákazníků, kteří přijdou do SHO v průběhu 1 hodiny, se bude nacházet v mezích 0,96 až 3,04. (Podmínka dobré aproximace $n\lambda > 9$ je splněna, protože 8*2 = 16.)

Úkol 2.: Na hladině významnosti 0,05 testujte pomocí jednoduchého testu Poissonova rozložení hypotézu, že počty zákazníků v jednohodinových intervalech se řídí Poissonovým rozložením.

Řešení:

č. hodiny	1	2	3	4	5	6	7	8
počet zákazníků	3	0	1	2	3	2	2	3

Tabulka četností počtu zákazníků

Počet zákazníků	0	1	2	3
četnost	1	1	3	3

Pro provedení testu musíme kromě průměru m = 2 znát i rozptyl:

$$s^2 = \frac{1}{7}\left[(3-2)^2 + (0-2)^2 + \ldots + (3-2)^2\right] = \frac{8}{7}$$

Testová statistika: $K = \frac{(n-1)s^2}{m} = \frac{7 \cdot \frac{8}{7}}{2} = 4$

Kritický obor: $W = \left\langle 0, \chi^2_{0,025}(7)\right\rangle \cup \left\langle \chi^2_{0,975}(7), \infty\right) = \left\langle 0;1,69\right\rangle \cup \left\langle 16,01;\infty\right)$

$K \notin W \Rightarrow H_0$ nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Úkol 3.: Odhadněte parametrickou funkci $\frac{1}{\mu}$ (tj. střední hodnotu doby obsluhy) a sestrojte pro ni 95% interval spolehlivosti.

Řešení:

Průměrná doba obsluhy je $m = \frac{1}{16}(10 + 30 + \ldots + 10) = 22{,}5\,\text{min} = 0{,}375\text{h}$. Znamená to, že za 1 h je obslouženo průměrně $\hat{\mu} = \frac{1}{m} = 2{,}\overline{6}$ zákazníků.

100(1-α)% interval spolehlivosti pro $\frac{1}{\mu}$:

$$d = \frac{2nm}{\chi^2_{1-\alpha/2}(2n)} = \frac{2 \cdot 16 \cdot 22{,}5}{\chi^2_{0,975}(32)} = \frac{720}{49{,}48} = 14{,}55,\quad h = \frac{2nm}{\chi^2_{\alpha/2}(2n)} = \frac{2 \cdot 16 \cdot 22{,}5}{\chi^2_{0,975}(32)} = \frac{720}{18{,}29} = 39{,}36$$

14,55 min = 14 min 33 s, 39,36 min = 39 min 22 s

Střední hodnota doby obsluhy se s pravděpodobností aspoň 0,95 nachází v mezích od 14 min 33 s po 39 min 22 s.

Úkol 4.: Na hladině významnosti 0,05 testujte pomocí jednoduchého testu exponenciálního rozložení (Darlingova testu) hypotézu, že doba obsluhy se řídí exponenciálním rozložením.

Řešení: Pro provedení Darlingova testu musíme kromě průměru (m = 22,5) znát i rozptyl:

$$s^2 = \frac{1}{15}\left[(10-22{,}5)^2 + (30-22{,}5)^2 + \ldots + (10-22{,}5)^2\right] = 220.$$

Testová statistika: $K = \frac{(n-1)s^2}{m^2} = \frac{15 \cdot 220}{22{,}5^2} = 6{,}5185$

Kritický obor: $W = \left\langle 0, \chi^2_{0,025}(15) \right\rangle \cup \left\langle \chi^2_{0,975}(15), \infty \right) = \left\langle 0; 6{,}262 \right\rangle \cup \left\langle 27{,}488; \infty \right)$

$K \notin W \Rightarrow H_0$ nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Úkol 5.: Vzhledem k předpokladu, že vstupní proud zákazníků je Poissonův proces, doba mezi příchody zákazníků je náhodná veličina s exponenciálním rozložením. Ověřte tento předpoklad Darlingovým testem (na hladině významnosti 0,05).

Řešení: $m = \frac{1}{15}(20 + 20 + \ldots + 10) = 30$

$$s^2 = \frac{1}{14}\left[(20-30)^2 + (10-30)^2 + \ldots + (10-30)^2\right] = 414{,}2857$$

$$K = \frac{(n-1)s^2}{m^2} = \frac{14 \cdot 414{,}2857}{30^2} = 6{,}4444$$

Kritický obor: $W = \left\langle 0, \chi^2_{0,025}(14) \right\rangle \cup \left\langle \chi^2_{0,975}(14), \infty \right) = \left\langle 0; 5{,}6287 \right\rangle \cup \left\langle 26{,}1189; \infty \right)$

$K \notin W \Rightarrow H_0$ nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.