Cvičení 7.: Systémy hromadné obsluhy s neomezenou kapacitou

1. Systém M/M/1/∞/FIFO
Vstupní proud zákazníků je Poissonův proces s parametrem λ, doba obsluhy se řídí rozložením $\mathrm{Ex}(\mu)$, v systému je 1 linka obsluhy, kapacita systému je neomezená, frontový režim je „první vstupuje, první je obsloužen".

Podíl $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ se nazývá intenzita provozu. Systém se může stabilizovat, pokud $\rho < 1$.

Stacionární rozložení: $a_j = \rho^j(1-\rho)$, j = 0, 1, …, tedy $N \sim \mathrm{Ge}(1-\rho)$.

Charakteristiky stabilizovaného systému: pravděpodobnost, že zákazník najde volnou linku $= 1-\frac{\lambda}{\mu}$, pravděpodobnost, že zákazník bude čekat ve frontě = $\frac{\lambda}{\mu}$, $E(N) = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$,

$E(N_Q) = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$, $E(N_S) = \frac{\lambda}{\mu}$, $E(W) = \frac{1}{\mu-\lambda}$, $E(W_Q) = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$, $E(W_S) = \frac{1}{\mu}$,

2. Systém M/M/1/∞/FIFO s netrpělivými zákazníky
Vstupní proud zákazníků je Poissonův proces s parametrem λ, doba obsluhy se řídí rozložením $\mathrm{Ex}(\mu)$, v systému je 1 linka obsluhy, kapacita systému je neomezená, frontový režim je „první vstupuje, první je obsloužen". Přijde-li zákazník do systému, v němž je již n zákazníků, pak je ochoten čekat pouze s pravděpodobností b_n. Přitom $1 = b_0 \ge b_1 \ge \ldots \ge 0$.
Označme $c_0 = 1$, $c_j = b_1 b_2 \ldots b_{j-1}$, j = 1, 2, …

Stacionární rozložení: $a_j = c_j\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j a_0, j = 1,2,\ldots,\ a_0 = \left[\sum_{j=0}^{\infty} c_j\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j\right]^{-1}$

Charakteristiky stabilizovaného systému:
$E(N) = \sum_{j=0}^{\infty} j a_j$, $E(W) = \frac{E(N)}{\lambda}$

Příklad 1.: K ortopedovi přichází v průměru 16 pacientů za 8 h jeho pracovní doby. Pacient je v průměru ošetřen za 20 min. Předpokládáme, že vstupní proud pacientů je Poissonův proces a doba ošetření se řídí exponenciálním rozložením. Zjistěte, zda se systém může stabilizovat. Pokud ano, vypočtěte
a) využití ortopeda, b) pravděpodobnost, že pacient nebude čekat, c) střední hodnotu doby, kterou pacient stráví v systému, d) střední hodnotu počtu pacientů v systému.

Řešení: $\lambda = 2, \mu = 3, \rho = \frac{2}{3} < 1 \Rightarrow$ systém se může stabilizovat

Ad a) Ortoped je využit na 66,6 %. Ad b) $a_0 = 1-\rho = 0,\overline{3}$.

Ad c) $E(W) = \frac{1}{\mu-\lambda} = 1\mathrm{h}$, $E(W_Q)$ = 40 min, $E(W_S)$ = 20 min

Ad d) $E(N) = 2$, $E(N_Q) = 1\frac{1}{3}$, $E(N_S) = \frac{2}{3}$

Příklad 2.: Do holičství přicházejí v průměru 3 zákazníci za 1 h a ostříhání jednoho zákazníka trvá v průměru 15 minut. Předpokládáme, že vstupní proud zákazníků je Poissonův proces a doba ostříhání se řídí exponenciálním rozložením. Přicházející zákazník je ochoten čekat s pravděpodobností 0,8 jen tehdy, když je v holičství pouze jeden zákazník. Je-li jich více, odchází bez obsloužení. Zjistěte, zda se provoz v holičství může stabilizovat. Pokud ano, a) vypočtěte a interpretujte stacionární rozložení. b) Jaká je střední hodnota doby, kterou zákazník stráví v holičství? c) Jak se změní tato střední hodnota, pokud by zákazník nesměl odejít bez obsloužení?

Řešení: $\lambda = 3, \mu = 4, b_1 = 0{,}8, c_0 = 1, c_1 = b_0 = 1, c_2 = b_1 = 0{,}8$

$$a_0 = \left[\sum_{j=0}^{\infty} c_j \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j\right]^{-1} = \left[c_0 1 + c_1 \frac{\lambda}{\mu} + c_2 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2\right]^{-1} = \left[1 + \frac{3}{4} + 0{,}8\left(\frac{3}{4}\right)^2\right]^{-1} = \frac{20}{44} = \frac{5}{11} = 0{,}4545$$

$$a_1 = c_1 \frac{\lambda}{\mu} a_0 = 1 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{11} = \frac{15}{44} = 0{,}3409, \quad a_2 = c_2 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 a_0 = 0{,}8\left(\frac{3}{4}\right)^2 \frac{5}{11} = \frac{9}{44} = 0{,}2045$$

$E(N) = a_1 + 2a_2 = \frac{15}{44} + 2\frac{9}{44} = \frac{33}{44} = \frac{3}{4}$, $E(W) = \frac{E(N)}{\lambda} = \frac{\frac{3}{4}}{3} = \frac{1}{4}$, tedy střední hodnota doby pobytu v holičství je 15 minut. Pokud by zákazník nemohl odejít bez obsloužení, je střední hodnota $E(W) = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{4-3} = 1\,\text{h}$.

Příklad 3.: K poštovní přepážce přichází v průměru 15 klientů za 1 h. Průměrná doba obsluhy u přepážky činí 3 minuty. Předpokládáme, že doba mezi příchody zákazníků i doba obsluhy se řídí exponenciálním rozložením. Zjistěte, zda se provoz u poštovní přepážky může stabilizovat. Pokud ano, vyřešte tyto úlohy:

a) Jaká je pravděpodobnost, že klient bude muset čekat ve frontě?

b) Jaká je pravděpodobnost, že ve frontě budou více než 3 klienti?

c) Jaká je průměrná doba pobytu zákazníka na poště? (Výsledek udejte v minutách.)

Řešení: $\lambda = \frac{15}{60} = \frac{1}{4}, \mu = \frac{1}{3}, \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{3}{4} < 1 \Rightarrow$ systém se může stabilizovat

Ad a) Pravděpodobnost čekání = $\rho = 0{,}75$

Ad b)

$$P(N > 3) = 1 - P(N \le 3) = 1 - a_0 - a_1 - a_2 - a_3 = 1 - \sum_{j=0}^{3} (1-\rho)\rho^j = 1 - \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{3}\left(\frac{3}{4}\right)^j = 0{,}3164$$

Ad c) $E(W) = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}} = 12\,\text{min}$.

Příklad 4.: Cestovní kancelář se při zakládání pobočky rozhoduje, jak velkou kancelář si má pronajmout. Může si pronajmout velkou kancelář, ve které dokáže vyřídit požadavek 30 klientů za hodinu, střední, ve které vyřídí 20 požadavků za hodinu nebo malou, ve které zvládne pouze 15 požadavků za hodinu. Odhaduje, že bude potřeba vyřídit kolem 10 požadavků za hodinu. Jakou kancelář si má pronajmout, pokud ji chce mít co nejmenší, ale zároveň nechce, aby její klienti čekali ve frontě průměrně déle než 5 minut?

Řešení: Ve všech třech případech je $\lambda = 10$, $\mu_1 = 30$, $\mu_2 = 20$, $\mu_3 = 15$. Systém se vždy může stabilizovat.

Počítáme $E(W_Q) = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$. Přitom požadujeme, aby $E(W_Q) \leq 5$ min.

Pro velkou kancelář: $E(W_Q) = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{10}{30 \cdot (30 - 10)} = \frac{1}{60} \text{h} = 1 \text{min}$

Pro střední kancelář: $E(W_Q) = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{10}{20 \cdot (20 - 10)} = \frac{1}{20} \text{h} = 3 \text{min}$

Pro malou kancelář: $E(W_Q) = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{10}{15 \cdot (15 - 10)} = \frac{2}{15} \text{h} = 8 \text{min}$

Střední hodnota doba strávené ve frontě je pro velkou kancelář 1 minuta, pro střední 3 minuty a pro malou 8 minut. Cestovní kancelář by tedy měla zvolit středně velkou kancelář.

Charakteristiky stabilizovaného systému poskytne funkce neomezeny_1.m

```
function[a0,ro,ENS,ENQ,EN,EWS,EWQ,EW]=neomezeny_1(lambda,mi);
% [a0,ro,ENS,ENQ,EN,EWS,EWQ,EW]=neomezeny_1(lambda,mi)
% Vypočítá prvek a0 stacionárního rozložení, intenzitu provozu
% a charakteristiky systému hromadné obsluhy M|M|1|Inf|FIFO.
% Vstupní parametry:
% lambda .... parametr vstupního proudu, mi ........ parametr obsluhy
% Výstupní parametry:
% a0 ........ pravděpodobnost, že v systému nebude žádný zákazník
% ro ........ intenzita provozu
% ENS ....... střední hodnota počtu obsluhovaných zákazníků
% ENQ ....... střední hodnota počtu zákazníků ve frontě
% EN ........ střední hodnota počtu zákazníků v systému
% EWS ....... střední hodnota doby, kterou zákazník stráví obsluhou
% EWQ ....... střední hodnota doby, kterou zákazník stráví ve frontě
% EW ........ střední hodnota doby, kterou zákazník stráví v systému
```