Cvičení 8.: Systém M/M/n/∞/FIFO a systémy s omezenou kapacitou

1. Systém M/M/n/∞/FIFO

Vstupní proud zákazníků je Poissonův proces s parametrem λ, doba obsluhy se řídí rozložením $\mathrm{Ex}(\mu)$, v systému je n linek obsluhy, kapacita systému je neomezená, frontový režim je „první vstupuje, první je obsloužen".

Označme $\beta = \frac{\lambda}{\mu}$. Podíl $\rho = \frac{\beta}{n}$ se nazývá intenzita provozu. Systém se může stabilizovat, pokud $\rho < 1$.

Stacionární rozložení: $a_j = \begin{cases} \frac{\beta^j}{j!} a_0 \text{ pro } j = 1,2,\dots,n \\ \frac{\beta^j}{n!n^{j-n}} a_0 \text{ pro } j = n+1, n+2,\dots \end{cases}$, kde $a_0 = \left[\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\beta^j}{j!} + \frac{n\beta^n}{n!(n-\beta)}\right]^{-1}$

Pravděpodobnost, že přicházející zákazník bude čekat ve frontě: $P_Q = a_0 \frac{\beta^n}{n!(1-\rho)}$

Charakteristiky stabilizovaného systému:

Střední hodnota počtu zákazníků v systému: $E(N) = P_Q \frac{\rho}{1-\rho} + n\rho$.

Střední hodnota počtu zákazníků ve frontě: $E(N_Q) = P_Q \frac{\rho}{1-\rho}$.

Střední hodnota počtu obsluhovaných zákazníků: $E(N_S) = n\rho$.

Střední hodnota doby strávené v systému: $E(W) = P_Q \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)} + \frac{1}{\mu}$.

Střední hodnota doby strávené ve frontě: $E(W_Q) = P_Q \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)}$.

Střední hodnota doby strávené obsluhou: $E(W_S) = \frac{1}{\mu}$.

Využití systému: $\kappa = \rho$.

Příklad 1.: K benzínové stanici se dvěma čerpadly přijíždí každých 80 sekund jedno auto, přičemž průměrná doba čerpání je 2 min 30 s. Za předpokladu, že příjezdy aut tvoří Poissonův proces, doba čerpání se řídí exponenciálním rozložením a systém se může stabilizovat (ověřte!), vypočtěte

a) pravděpodobnost, že u čerpací stanice budou právě dvě auta
b) střední hodnotu počtu obsazených stojanů
c) střední hodnotu doby, kterou řidič stráví u čerpací stanice.

Řešení: Za časovou jednotku volíme 1 h.

$n = 2$, $\lambda = \frac{3600}{80} = 45, \mu = \frac{1}{\frac{2,5}{60}} = \frac{600}{25} = 24, \beta = \frac{45}{24} = \frac{15}{8}, \rho = \frac{\beta}{n} = \frac{15}{16} < 1 \Rightarrow$ systém se může stabilizovat ad a) $a_0 = \left[\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\beta^j}{j!} + \frac{n\beta^n}{n!(n-\beta)}\right]^{-1} = \left[1 + \frac{15}{8} + \frac{2\left(\frac{15}{8}\right)^2}{2\left(2 - \frac{15}{8}\right)}\right]^{-1} = \frac{8}{248} = \frac{1}{31} = 0{,}0323$

$$a_2 = \frac{\beta^2}{2!} a_0 = \left(\frac{15}{8}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{31} = \frac{225}{3968} = 0{,}0567$$

ad b) $E(N_S) = n\rho = 2\frac{15}{16} = \frac{15}{8} = 1{,}875$

ad c)

$$P_Q = a_0 \frac{\beta^n}{n!(1-\rho)} = \frac{1}{31} \cdot \frac{\frac{225}{64}}{\frac{1}{8}} = \frac{225}{248}$$

$$E(W) = P_Q \frac{\rho}{(1-\rho)\lambda} + \frac{1}{\mu} = \frac{225}{248} \cdot \frac{\frac{15}{16}}{\left(1 - \frac{15}{16}\right) \cdot 45} + \frac{1}{24} = \frac{32}{93} = 0{,}344 \text{ h} = 20 \text{ min } 38 \text{ s}$$

Návod na řešení pomocí MATLABu:

Použijeme funkci neomezeny_n.m

```
n=2;lambda=45;mi=24;
[a0,ro,PQ,ENS,ENQ,EN,EWS,EWQ,EW]=neomezeny_n(n,lambda,mi)
```

2. Systém M/M/1/1

Vstupní proud zákazníků je Poissonův proces s parametrem λ, doba obsluhy se řídí rozložením $Ex(\mu)$, v systému je 1 linka obsluhy, kapacita systému je 1 (zákazník nemůže čekat ve frontě a je-li systém obsazený, odchází bez obsloužení).

Stacionární rozložení: $\mathbf{a} = \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu} \quad \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)$.

Charakteristiky stabilizovaného systému:

Pravděpodobnost, že přicházející zákazník bude odmítnut: $P_Z = a_1$.

Střední hodnota počtu přijatých zákazníků za jednotku času: $\lambda_P = \lambda a_0$

Střední hodnota počtu odmítnutých zákazníků za jednotku času: $\lambda_Z = \lambda a_1$

Využití systému: $\kappa = \rho a_0 = \frac{\lambda}{\mu} a_0$

Střední hodnota počtu zákazníků v systému: $E(N) = a_1 = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$

Střední hodnota doby strávené v systému: $E(W) = \frac{1}{\lambda+\mu}$

Příklad 2.: Pracovnice v informačním středisku přijme v průměru jedno volání každých 12 minut. Hovor trvá v průměru 6 minut. Za předpokladu, že vstupní proud požadavků je

Poissonův proces a doba trvání hovoru se řídí exponenciálním rozložením, najděte odpovědi na následující otázky:
a) Jaké procento volání bude odbaveno?
b) Kolik hovorů se uskuteční za 1 h?
c) Jaká je pravděpodobnost odmítnutí?
Řešení: Jde o systém M/M/1/1. Za časovou jednotku zvolíme 1 h.
Pak $\lambda = 5$ (požadavků za 1 h), $\mu = 10$ (hovorů za 1 h je odbaveno).
Ad a) $a_0 = \dfrac{\mu}{\lambda+\mu} = \dfrac{10}{5+10} = \dfrac{2}{3}$
Bude odbaveno 66,7 % volání.
Ad b) $\lambda_P = \lambda a_0 = 5 \cdot \dfrac{2}{3} = 3{,}\overline{3}$
Za 1 h se uskuteční průměrně 3,33 hovoru.
Ad c) $P_Z = a_1 = \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu} = \dfrac{5}{5+10} = \dfrac{1}{3}$
Pravděpodobnost odmítnutí je 33,3 %.

3. Systém M/M/n/m/FIFO
Vstupní proud zákazníků je Poissonův proces s parametrem λ, doba obsluhy se řídí rozložením $\text{Ex}(\mu)$, v systému je n linek obsluhy, kapacita systému je omezená (je rovna m) a frontový režim je „první vstupuje, první je obsloužen“.
Označme $\beta = \dfrac{\lambda}{\mu}, \rho = \dfrac{\beta}{n}$. Systém se může stabilizovat vždy.

Stacionární rozložení: $a_j = \begin{cases} \dfrac{\beta^j}{j!} a_0 \text{ pro } j = 1,2,\ldots,n \\ \dfrac{n^n}{n!}\rho^j a_0 \text{ pro } j = n+1,\ldots,m \end{cases}$, kde $a_0 = \dfrac{1}{\sum\limits_{j=0}^{n-1}\dfrac{\beta^j}{j!} + \dfrac{n^n}{n!}\sum\limits_{j=n}^{m}\rho^j}$.

Charakteristiky stabilizovaného systému:
Pravděpodobnost, že přicházející zákazník bude odmítnut: $P_Z = \dfrac{n^n}{n!}\rho^m a_0$.
Pravděpodobnost, že přicházející zákazník bude čekat ve frontě:

$$P_Q = \begin{cases} a_n \dfrac{1-\rho^{m-n}}{1-\rho} \text{ pro } \rho \neq 1 \\ a_n (m-n) \text{ pro } \rho = 1 \end{cases}.$$

Střední hodnota počtu přijatých zákazníků za jednotku času: $\lambda_P = \lambda(1-P_Z)$.
Střední hodnota počtu odmítnutých zákazníků za jednotku času: $\lambda_Z = \lambda P_Z$.
Střední hodnota počtu zákazníků ve frontě: $E(N_Q) = \sum\limits_{j=n+1}^{m}(j-n)a_j$.
Střední hodnota počtu obsluhovaných zákazníků: $E(N_S) = \beta(1-P_Z)$.
Využití systému: $\kappa = \rho(1-P_Z)$.
Ostatní charakteristiky dostaneme pomocí Littleova vzorce.

Příklad 3.: V autoservisu jsou 3 mycí rampy a jeden pracovník, jemuž mytí auta trvá v průměru 12 min. Za 1 h přijedou průměrně 3 auta. Jsou-li však v okamžiku příjezdu auta všechny rampy obsazeny, auto nečeká a vrací se později.

a) Jaká je pravděpodobnost, že v autoservisu budou 0, 1, 2, 3 auta?

b) Vypočtěte střední hodnotu počtu zákazníků v autoservisu a ve frontě.

c) Vypočtěte střední hodnotu doby čekání ve frontě.

d) Jaká je pravděpodobnost, že bude volná aspoň jedna rampa?

e) Vypočtěte využití systému.

Řešení: Jde o systém M/M/n/m/FIFO, kde n = 1, m = 3.

Za časovou jednotku volíme 1 h. $\lambda = 3, \mu = 5, \beta = \frac{3}{5}, \rho = \frac{3}{5}$

ad a) $a_0 = \dfrac{1}{1 + \frac{3}{5} + \frac{9}{25} + \frac{27}{125}} = \dfrac{125}{272}, a_1 = \rho a_0 = \dfrac{75}{272}, a_2 = \rho^2 a_0 = \dfrac{45}{272}, a_3 = \rho^3 a_0 = \dfrac{27}{272}$

$$E(N_Q) = a_2 + 2a_3 = \frac{99}{272} = 0{,}364,$$

ad b) $E(N_S) = \beta(1 - P_Z) = \dfrac{3}{5}\left(1 - \left(\dfrac{3}{5}\right)^3 a_0\right) = \dfrac{147}{272} = 0{,}5404,$

$$E(N) = \frac{246}{272} = 0{,}9044$$

$$P_Z = \frac{n^n}{n!}\rho^m a_0 = \left(\frac{3}{5}\right)^3 \cdot \frac{125}{272} = \frac{27}{272} = 0{,}0993$$

ad c) $E(W_Q) = \dfrac{E(N_Q)}{\lambda_P} = \dfrac{33}{245} = 8\,\text{min}\,5\,\text{s}$

ad d) $1 - a_3 = \dfrac{245}{272} = 0{,}9$

ad e) $\kappa = \rho(1 - P_Z) = \dfrac{147}{272} = 0{,}54$

Návod na řešení pomocí MATLABu:

Použijeme funkci odmitani.m

```
lambda=3;mi=5;n=1;m=3;
[a,PZ,PQ,lambdaP,lambdaZ,kappa,ENS,ENQ,EN,EWS,EWQ,EW]=odmitani(lambda,mi,n,m)
```