Cvičení 9: Uzavřený systém M/M/n/m/FIFO, optimalizace SHO

Uzavřený systém: V systému je m zákazníků, přičemž mohou čekat v omezené frontě délky $m - n \geq 0$. Zákazníci po ukončení obsluhy opouštějí systém, ale později se do něj vracejí s novým požadavkem. Doba pobytu každého zákazníka mimo systém se řídí rozložením $Ex(\lambda)$, doba obsluhy každé linky se řídí rozložením $Ex(\mu)$. Označme $\beta = \frac{\lambda}{\mu}, \rho = \frac{\beta}{n}$.

Stacionární rozložení: $a_j = \begin{cases} \binom{m}{j}\beta^j a_0 \text{ pro } j = 1,2,\ldots,n \\ \frac{n^n m!}{n!(m-j)!}\rho^j a_0 \text{ pro } j = n+1, n+2,\ldots,m \end{cases}$, kde $a_0 = 1 - \sum_{j=1}^{m} a_j$

Pravděpodobnost, že přicházející zákazník bude čekat ve frontě: $P_Q = P(N \geq n) = 1 - \sum_{j=0}^{n-1} a_j$

Charakteristiky stabilizovaného systému:

Střední hodnota počtu zákazníků v systému: $E(N) = \sum_{j=0}^{m} j a_j$.

Střední hodnota počtu obsluhovaných zákazníků: $E(N_S) = \sum_{j=0}^{n-1} j a_j + n\sum_{j=n}^{m} a_j$.

Střední hodnota počtu zákazníků mimo systém: $E(N_R) = m - E(N)$.

Střední hodnota počtu zákazníků přicházejících za jednotku času: $\lambda_R = \lambda E(N_R)$.

Využití systému: $\kappa = \rho E(N_R)$.

Ostatní charakteristiky dostaneme pomocí Littleova vzorce.

Příklad 1.: Skupinu pěti stejných strojů má na starosti jeden údržbář. Doba bezporuchového provozu stroje má exponenciální rozložení se střední hodnotou 1/2 směny a doba opravy má rovněž exponenciální rozložení se střední hodnotou 1/20 směny.
a) Jaká je pravděpodobnost, že všechny stroje pracují?
b) Jaká je pravděpodobnost, že budou současně vyřazeny aspoň dva stroje?

Návod na řešení pomocí MATLABu:
lambda=2;mi=20;n=1;m=5;
function[a,ENS,ENR,EN,lambdaR,kappa]=uzavreny(lambda,mi,n,m)
Výsledky: a) 0,564, b) 0,154;

Optimalizace systému M/M/1/∞/FIFO
Vstupní proud zákazníků je Poissonův proces s parametrem λ, doba obsluhy se řídí exponenciálním rozložením. Známe náklady c_1 na obsluhu jednoho požadavku a náklady c_2 na údržbu prázdného systému za jednotku času. Hledáme intenzitu obsluhy μ tak, aby funkce nákladů a ztrát

$F(\mu) = c_1\mu + c_2 E(N) = c_1\mu + c_2 \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$ nabývala svého minima. Minima dosaženo pro

$\mu = \lambda + \sqrt{\frac{c_2}{c_1}\lambda}$. Optimální intenzitu obsluhy a hodnotu funkce nákladů a ztrát pro tuto optimální intenzitu počítá funkce opt_neomezeny_1.m.

Příklad 2.: Na konci montážní linky se nachází pracoviště kontroly kvality, které se skládá z prostoru na čekání palet a zkušebního pracoviště. Průměrně přichází 80 palet v průběhu osmihodinové směny. Doba mezi příchody palet má exponenciální rozložení a doba kontroly rovněž. Náklady na kontrolu jedné palety činí 100 Kč, prostojové náklady jsou 40 Kč/h. Stanovte optimální dobu kontroly jedné palety a najděte hodnotu funkce nákladů a ztrát pro optimální intenzitu obsluhy.

Návod na řešení pomocí MATLABu:
lambda=10; c1=100; c2=40;
[mi,F]=opt_neomezeny_1(lambda,c1,c2)
Výsledek: 5 minut, tedy za 1 h by se mělo zkontrolovat 12 palet. Funkce nákladů a ztrát nabývá hodnoty 1400.

Optimalizace systému M/M/n/∞/FIFO
Vstupní proud zákazníků je Poissonův proces s parametrem λ, doba obsluhy se řídí exponenciálním rozložením s parametrem μ. Známe náklady c_1 na čekajícího zákazníka za jednotku času a náklady c_2 na nevyužitou linku obsluhy za jednotku času. Hledáme počet linek n tak, aby kriteriální funkce $C(n) = c_1 E(N_Q) + c_2 [n - E(N_S)]$ nabývala svého minima.

Přitom $E(N_Q) = P_Q \dfrac{\rho}{1-\rho}$, $P_Q = a_0 \dfrac{\beta^n}{n!(1-\rho)} = \dfrac{a_n}{1-\rho}$, $\beta = \dfrac{\lambda}{\mu}$, $\rho = \dfrac{\beta}{n}$,

$a_0 = \left[\sum_{j=0}^{n-1} \dfrac{\beta^j}{j!} + \dfrac{n\beta^n}{n!(n-\beta)} \right]^{-1}$, $E(N_S) = n\rho$. Podmínka stabilizace: $n > \dfrac{\lambda}{\mu}$.

Optimální počet linek a hodnotu kriteriální funkce pro tento optimální počet linek počítá funkce opt_neomezeny_n.m.

Příklad 3.: V nově otevřené pobočce České spořitelny bylo rozhodnuto rezervovat pro operace se sporožirovým účtem 3 přepážky. Klienti, kteří do pobočky přicházejí kvůli těmto operacím, se řadí do jedné fronty a po uvolnění libovolné z přepážek mohou být obsluhováni. Po otevření pobočky bylo zjištěno, že v průměru přichází 68 klientů za hodinu, přičemž intervaly mezi jejich příchody mají exponenciální rozložení. Doba nutná pro odbavení klienta je náhodná veličina s exponenciálním rozložením se střední hodnotou 2 min 24 s.
a) Za předpokladu, že náklady na pobyt klienta v pobočce po dobu 1 h jsou 120 Kč a náklady na provoz jedné přepážky činí 300 Kč/h, najděte optimální počet přepážek.
b) Zjistěte, jak by se musely snížit náklady na pobyt klienta v pobočce po dobu 1 h, aby byl optimální původně uvažovaný systém se třemi přepážkami.

Návod na řešení pomocí MATLABu:
lambda=17/15; mi=5/12; k1=120; k2=300;
Za n volíme postupně 3, 4, 5 a voláme funkci [C]=opt_neomezeny_n(n,lambda,mi,k1,k2)
Výsledek:
Ad a)

n	C(n)
3	1050,2
4	485,53
5	708,69

Optimální jsou 4 přepážky.

Ad b) Náklady na čekajícího zákazníka nesmí přesáhnout 41,56 Kč za hodinu.