

10. Pravděpodobnostní vytvořující funkce

10.1. Definice: Definice pravděpodobnostní vytvořující funkce celočíselné nezáporné náhodné veličiny.

Nechť X je celočíselná nezáporná náhodná veličina s pravděpodobnostní funkcí

$$P(X = k) = \begin{cases} p_k & \text{pro } k = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} . \text{ Pravděpodobnostní vytvořující funkce (dále značena p.v.f.)}$$

náhodné veličiny X je dána vztahem: $g_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$, $|z| < 1$.

Vysvětlení: Je zřejmé, že p.v.f. je speciálním případem vytvořující funkce posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$:

$G_a(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. V tomto případě posloupnost $\{p_k\}_{k=0}^{\infty}$ splňuje vztahy:

$$\forall k = 0, 1, 2, \dots : p_k \geq 0, \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1 .$$

Je také vidět, že $g_X(z) = E(z^X) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$.

10.2. Příklad: Najděte pravděpodobnostní vytvořující funkci náhodné veličiny X , která má rozložení: a) $Po(\lambda)$, b) $Bi(n, \vartheta)$, c) $Ge(\vartheta)$.

Řešení:

$$\text{ad a) } p_k = \begin{cases} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} & \text{pro } k = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{jinak} \end{cases},$$

$$g_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} z^k = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda z)^k}{k!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda z} = e^{\lambda(z-1)}$$

$$\text{ad b) } p_k = \begin{cases} \binom{n}{k} \vartheta^k (1-\vartheta)^{n-k} & \text{pro } k = 0, 1, \dots, n \\ 0 & \text{jinak} \end{cases},$$

$$g_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \vartheta^k (1-\vartheta)^{n-k} z^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (z\vartheta)^k (1-\vartheta)^{n-k} = (1-\vartheta + z\vartheta)^n$$

$$\text{ad c) } p_k = \begin{cases} (1-\vartheta)^k \vartheta & \text{pro } k = 0, 1, \dots \\ 0 & \text{jinak} \end{cases},$$

$$g_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} (1-\vartheta)^k \vartheta z^k = \vartheta \sum_{k=0}^{\infty} ((z(1-\vartheta)))^k = \frac{\vartheta}{1-z(1-\vartheta)}.$$

10.3. Věta: Výpočet pravděpodobnostní funkce pomocí pravděpodobnostní vytvořující funkce. Je-li $g_X(z)$ p.v.f. náhodné veličiny X , pak pro pravděpodobnostní funkci náhodné veličiny X

$$\text{platí: } p_k = \left. \frac{g_X^{(k)}(z)}{k!} \right|_{z=0} \text{ pro } k = 0, 1, 2, \dots$$

Důkaz: Plyne z věty 10.4. kurzu Markovské řetězce, protože p.v.f. je speciálním případem vytvořující funkce.

10.4. Věta: Výpočet střední hodnoty a rozptylu pomocí pravděpodobnostní vytvořující funkce. Necht' X je celočíselná nezáporná náhodná veličina s p.v.f. $g_X(z)$. Pak platí:

$$E(X) = \left. \frac{d}{dz} g_X(z) \right|_{z=1}, \quad D(X) = \left. \frac{d^2}{dz^2} g_X(z) \right|_{z=1} + E(X) - [E(X)]^2.$$

$$\text{Důkaz: } \left. \frac{d}{dz} g_X(z) \right|_{z=1} = \left. \frac{d}{dz} \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k \right|_{z=1} = \left. \sum_{k=1}^{\infty} k p_k z^{k-1} \right|_{z=1} = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k = E(X)$$

$$\left. \frac{d^2}{dz^2} g_X(z) \right|_{z=1} = \left. \frac{d^2}{dz^2} \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k \right|_{z=1} = \left. \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) p_k z^{k-2} \right|_{z=1} = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) p_k = E(X(X-1)) = E(X^2) - E(X)$$

Odtud plyne, že $E(X^2) = \left. \frac{d^2}{dz^2} g_X(z) \right|_{z=1} + E(X)$. Protože $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$, dostaneme dokazovaný vztah.

10.5. Příklad: Pomocí pravděpodobnostní vytvořující funkce najděte střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny $X \sim \text{Po}(\lambda)$.

Řešení: Podle příkladu 10.2. (a) $g_X(z) = e^{\lambda(z-1)}$.

$$E(X) = \frac{d}{dz} g_X(z) \Big|_{z=1} = \lambda e^{\lambda(z-1)} \Big|_{z=1} = \lambda.$$

$$D(X) = \frac{d^2}{dz^2} g_X(z) \Big|_{z=1} + E(X) - [E(X)]^2 = \frac{d^2}{dz^2} e^{\lambda(z-1)} \Big|_{z=1} + \lambda - \lambda^2 = \lambda^2 e^{\lambda(z-1)} \Big|_{z=1} + \lambda - \lambda^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

10.6. Věta: Věta o pravděpodobnostní vytvořující funkci součtu n stochasticky nezávislých celočíselných nezáporných náhodných veličin.

Nechť X_1, \dots, X_n jsou stochasticky nezávislé celočíselné nezáporné náhodné veličiny, které mají

p.v.f. $g_{X_1}(z), \dots, g_{X_n}(z)$. Pak pro p.v.f. transformované náhodné veličiny $Y = \sum_{i=1}^n X_i$ platí:

$$g_Y(z) = \prod_{i=1}^n g_{X_i}(z).$$

Důkaz: $g_Y(z) = E(z^Y) = E\left(z^{\sum_{i=1}^n X_i}\right) = E\left(\prod_{i=1}^n z^{X_i}\right) = \prod_{i=1}^n E(z^{X_i}) = \prod_{i=1}^n g_{X_i}(z)$

10.7. Příklad: Necht' X_1, \dots, X_n jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny, $X_i \sim A(\vartheta)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Najděte pravděpodobnostní vytvořující funkci transformované náhodné veličiny

$$Y = \sum_{i=1}^n X_i .$$

Řešení: $X_i \sim A(\vartheta) \Rightarrow p_k = \begin{cases} \vartheta^k (1 - \vartheta)^{1-k} & \text{pro } k = 0, 1 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}, i = 1, 2, \dots, n ,$

$$g_{X_i}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k = \sum_{k=0}^1 \vartheta^k (1 - \vartheta)^{1-k} z^k = \sum_{k=0}^1 (z\vartheta)^k (1 - \vartheta)^{1-k} = 1 - \vartheta + z\vartheta . \text{ Podle věty 10.6. platí:}$$

$$g_Y(z) = g_{X_1}(z) \cdot \dots \cdot g_{X_n}(z) = (1 - \vartheta + z\vartheta)^n \Rightarrow Y \sim \text{Bi}(n, \vartheta).$$

10.8. Věta: Věta o pravděpodobnostní funkci součtu n stochasticky nezávislých celočíselných nezáporných náhodných veličin.

Nechť X_1, \dots, X_n jsou stochasticky nezávislé celočíselné nezáporné náhodné veličiny, které mají

všechny stejnou pravděpodobnostní funkci $P(X_i = k) = \begin{cases} p_k & \text{pro } k = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}, i = 1, \dots, n$. Pak

transformovaná náhodná veličina $Y = \sum_{i=1}^n X_i$ má pravděpodobnostní funkci

$$P(Y = k) = \begin{cases} \{p_k\}^{n*} & \text{pro } k = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}.$$

Důkaz: Nechť $g_X(z)$ je p.v.f. náhodné veličiny $X_i, i = 1, \dots, n$. Pak podle věty 10.6.

$g_Y(z) = [g_X(z)]^n$. Podle věty 10.7. kurzu Markovské řetězce je posloupnost $\{P(Y = k)\}_{k=0}^{\infty}$ n -tou konvoluční mocninou posloupnosti $\{p_k\}_{k=0}^{\infty}$.

10.9. Příklad: Necht' X_1, X_2 jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny, přičemž $X_i \sim \text{Bi}(n, \vartheta)$, $i = 1, 2$. Pomocí věty 10.8. určete rozložení transformované náhodné veličiny $Y = X_1 + X_2$.

Řešení:

$$p_k = \begin{cases} \binom{n}{k} \vartheta^k (1 - \vartheta)^{n-k} & \text{pro } k = 0, 1, \dots, n \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} P(Y = y) &= \{p_k\}^{2*} = p_0 p_k + p_1 p_{k-1} + \dots + p_k p_0 = \binom{n}{0} \vartheta^0 (1 - \vartheta)^n \binom{n}{k} \vartheta^k (1 - \vartheta)^{n-k} + \\ &+ \binom{n}{1} \vartheta^1 (1 - \vartheta)^{n-1} \binom{n}{k-1} \vartheta^{k-1} (1 - \vartheta)^{n-k+1} + \dots + \binom{n}{k} \vartheta^k (1 - \vartheta)^{n-k} \binom{n}{0} \vartheta^0 (1 - \vartheta)^n = \\ &= \sum_{j=0}^k \binom{n}{j} \vartheta^j (1 - \vartheta)^{n-j} \binom{n}{k-j} \vartheta^{k-j} (1 - \vartheta)^{n-k+j} = \vartheta^k (1 - \vartheta)^{2n-k} \sum_{j=0}^k \binom{n}{j} \binom{n}{k-j} = \binom{2n}{k} \vartheta^k (1 - \vartheta)^{2n-k} \end{aligned}$$

$k = 0, 1, \dots, 2n$. Znamená to, že $Y \sim \text{Bi}(2n, \vartheta)$.

(Tento poznatek lze zobecnit pro r stochasticky nezávislých náhodných veličin s týmž binomickým rozložením $\text{Bi}(n, \vartheta)$, $i = 1, 2, \dots$. Jejich součet bude mít rozložení $\text{Bi}(r \cdot n, \vartheta)$.)

10.10. Věta: Věta o pravděpodobnostní funkci součtu náhodného počtu stochasticky nezávislých celočíselných nezáporných náhodných veličin.

Nechť X_1, X_2, \dots jsou stochasticky nezávislé celočíselné nezáporné náhodné veličiny, které mají

všechny stejnou pravděp. funkci $P(X_i = k) = \begin{cases} p_k & \text{pro } k = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}, i = 1, 2, \dots$ a N je celočíselná

nezáporná náhodná veličina, která má pravděpodobnostní funkci $P(N = n) = \begin{cases} q_n & \text{pro } n = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$. Pak

transformovaná náhodná veličina $S = \sum_{i=1}^N X_i$ (součet náhodného počtu náhodných veličin) má

pravděpodobnostní funkci $P(S = k) = \begin{cases} h_k = \sum_{n=0}^{\infty} q_n \{p_k\}^{n*} & \text{pro } k = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$.

Důkaz: Použijeme vzorec úplné pravděpodobnosti $P(A) = \sum_{i \in I} P(H_i)P(A/H_i)$, kde I je nejvýše

spočetná indexová množina a $\{H_i; i \in I\}$ je úplný systém hypotéz. Označme $A = \{S=k\}$, $H_n = \{N=n\}$.

Pak $P(H_n) = P(N=n)$, $P(A/H_n) = P(S=k/N=n) = P(X_1 + \dots + X_N = k/N=n) = P(X_1 + \dots + X_n = k)$, ovšem

podle věty 10.8. $P\left(\sum_{i=1}^n X_i = k\right) = \{p_k\}^{n*}$. Po dosazení do vzorce úplné pravděpodobnosti dostaneme

$$P(A) = P(S = k) = \sum_{n=0}^{\infty} P(H_n)P(A/H_n) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n \{p_k\}^{n*}, k = 0, 1, 2, \dots$$

10.11. Definice: Definice složeného rozložení.

Rozložení $\{h_k\}_{k=0}^{\infty}$ transformované náhodné veličiny $S = \sum_{i=1}^N X_i$ se nazývá složené rozložení.

10.12. Příklad: Necht' X_1, X_2, \dots jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny, přičemž $X_i \sim A(\vartheta)$, $i = 1, 2, \dots$. Necht' N je na nich nezávislá náhodná veličina, $N \sim \text{Po}(\lambda)$. Najděte rozložení náhodné veličiny $S = X_1 + \dots + X_N$.

Řešení: $p_k = \begin{cases} \vartheta^k (1 - \vartheta)^{1-k} & \text{pro } k = 0, 1 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$, $\{p_k\}^{n*} = \begin{cases} \binom{n}{k} \vartheta^k (1 - \vartheta)^{n-k} & \text{pro } k = 0, 1, \dots, n \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$

$$q_n = \begin{cases} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} & \text{pro } n = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} h_k &= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \binom{n}{k} \vartheta^k (1 - \vartheta)^{n-k} = e^{-\lambda} \vartheta^k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{k!(n-k)!} \lambda^n (1 - \vartheta)^{n-k} = |\lambda^n = \lambda^{n-k+k}| = \\ &= e^{-\lambda} \vartheta^k \lambda^k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{[\lambda(1 - \vartheta)]^{n-k}}{k!(n-k)!} = \frac{1}{k!} e^{-\lambda} (\lambda \vartheta)^k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{[\lambda(1 - \vartheta)]^{n-k}}{(n-k)!} = |j = n - k| = \\ &= \frac{1}{k!} e^{-\lambda} (\lambda \vartheta)^k \sum_{j=0}^{\infty} \frac{[\lambda(1 - \vartheta)]^j}{j!} = \frac{1}{k!} e^{-\lambda} (\lambda \vartheta)^k e^{\lambda(1-\vartheta)} = \frac{(\lambda \vartheta)^k}{k!} e^{-\lambda \vartheta} \Rightarrow \end{aligned}$$

$S \sim \text{Po}(\lambda \vartheta)$.

10.13. Věta: Věta o pravděpodobnostní vytvořující funkci náhodné veličiny S.
Pro p.v.f. náhodné veličiny S platí $g_S(z) = g_N(g_X(z))$.

Důkaz:

$$g_S(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} q_n \{p_k\}^{n*} z^k = \sum_{n=0}^{\infty} q_n \sum_{k=0}^{\infty} \{p_k\}^{n*} z^k = \sum_{n=0}^{\infty} q_n [g_X(z)]^n = g_N(g_X(z))$$

10.14. Příklad: Pro náhodnou veličinu S z příkladu 10.12. odvoďte pravděpodobnostní vytvořující funkci.

Řešení: $X_i \sim A(\vartheta) \Rightarrow g_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k = \sum_{k=0}^1 \vartheta^k (1-\vartheta)^{1-k} z^k = 1 - \vartheta + z\vartheta,$

$N \sim \text{Po}(\lambda) \Rightarrow g_N(z) = e^{\lambda(z-1)}, g_S(z) = g_N(g_X(z)) = e^{\lambda(1-\vartheta+z\vartheta-1)} = e^{\lambda\vartheta(z-1)} \Rightarrow S \sim \text{Po}(\lambda\vartheta).$

10.15. Věta: Věta o střední hodnotě a rozptylu náhodné veličiny S .

Nechť X_1, X_2, \dots jsou stochasticky nezávislé celočíselné nezáporné náhodné veličiny, které mají všechny totéž rozložení se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2 . Nechť N je na nich nezávislá celočíselná nezáporná náhodná veličina. Pak náhodná veličina $S = X_1 + \dots + X_N$ má střední hodnotu $E(S) = E(N)\mu$ a rozptyl $D(S) = D(N)\mu^2 + E(N)\sigma^2$.

Důkaz:

$$E(S) = \frac{d}{dz} g_S(z) \Big|_{z=1} = \frac{d}{dz} g_N(g_X(z)) \Big|_{z=1} = g_N'(g_X(z))g_X'(z) \Big|_{z=1} = g_N'(g_X(1))g_X'(1) =$$

$$= g_N'(1)g_X'(1) = E(N)E(X) = E(N)\mu$$

$$D(S) = \frac{d^2}{dz^2} g_S(z) \Big|_{z=1} + E(S) - [E(S)]^2. \text{ Nejprve spočteme 2. derivaci p.v.f. v bodě } z=1:$$

$$\frac{d^2}{dz^2} g_S(z) \Big|_{z=1} = g_N''(g_X(z))g_X'(z)^2 \Big|_{z=1} + g_N'(g_X(z))g_X''(z) \Big|_{z=1} = g_N''(1)g_X'(1)^2 + g_N'(1)g_X''(1) =$$

$$= g_N''(1)\mu^2 + E(N)g_X''(1)$$

Ze vzorce pro rozptyl plyne, že $g_N''(1) = D(N) - E(N) + [E(N)]^2$, $g_X''(1) = \sigma^2 - \mu + \mu^2$, tedy

$$\frac{d^2}{dz^2} g_S(z) \Big|_{z=1} = D(N)\mu^2 - E(N)\mu^2 + [E(N)]^2\mu^2 + E(N)\sigma^2 - E(N)\mu + E(N)\mu^2. \text{ Po dosazení:}$$

$$D(S) = D(N)\mu^2 - E(N)\mu^2 + [E(N)]^2\mu^2 + E(N)\sigma^2 - E(N)\mu + E(N)\mu^2 + E(N)\mu - [E(N)]^2\mu^2 =$$

$$= D(N)\mu^2 + E(N)\sigma^2$$