9. Optimalizace v systémech hromadné obsluhy

Cíl: před linkami obsluhy se nemají vytvářet příliš dlouhé fronty a současně linky obsluhy mají být dostatečně využity.

Je-li malá intenzita obsluhy, tvoří se dlouhá fronta a klesá zisk.
Je-li naopak velká intenzita obsluhy, jsou linky obsluhy po určitou dobu nevyužity a stoupají náklady.

Potřebujeme tedy v systému s jednou linkou obsluhy zajistit optimální intenzitu obsluhy a v systému s více linkami optimální počet linek obsluhy tak, aby při minimálních nákladech bylo dosaženo maximálního zisku.

9.1. Optimalizace systému M/M/1/∞/FIFO

Vstupní proud zákazníků je Poissonův proces s parametrem λ, doba obsluhy se řídí exponenciálním rozložením.
Ve stabilizovaném systému známe:
náklady c_1 na obsluhu jednoho požadavku;
náklady c_2 na údržbu prázdného systému za jednotku času.
Ve většině případů je intenzita vstupního proudu λ dána, můžeme tedy ovlivnit pouze intenzitu obsluhy μ.
Hledáme intenzitu obsluhy μ tak, aby funkce nákladů a ztrát

$$F(\mu) = c_1\mu + c_2 E(N) = c_1\mu + c_2 \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

nabývala svého minima.
Funkci $F(\mu)$ derivujeme podle μ a derivaci položíme rovnu 0:

$$\frac{dF(\mu)}{d\mu} = c_1 - c_2 \frac{\lambda}{(\mu - \lambda)^2} = 0 \Rightarrow \mu = \lambda \pm \sqrt{\frac{c_2}{c_1}\lambda}$$

Vzhledem k tomu, že systém musí být schopen se stabilizovat (tj. $\lambda < \mu$), je minima dosaženo pro $\mu = \lambda + \sqrt{\frac{c_2}{c_1}\lambda}$. (Jedná se skutečně o minimum, což lze ověřit pomocí 2. derivace:

$$\frac{d^2F(\mu)}{d\mu^2} = c_2 \frac{2\lambda}{(\mu - \lambda)^3} > 0$$.)

9.2. Příklad: Na malou poštu s jednou přepážkou přichází v období ustáleného provozu průměrně 18 klientů za 1 h. Náklady na obsluhu jednoho klienta činí 20 Kč a prostojové náklady na přepážku jsou 40 Kč/h. Stanovte optimální dobu obsluhy jednoho klienta a vyčíslete funkci nákladů a ztrát pro optimální intenzitu obsluhy.

Řešení: $\lambda = 18$, $c_1 = 20$, $c_2 = 40$

$$\mu = \lambda + \sqrt{\frac{c_2}{c_1}\lambda} = 18 + \sqrt{\frac{40}{20} \cdot 18} = 18 + 6 = 24$$ zákazníků za 1 h

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{24}\,\mathrm{h} = 2\,\mathrm{min}\,30\mathrm{s}$$

$$F(24) = 20 \cdot 24 + 40 \cdot \frac{18}{24 - 18} = 600\,\mathrm{Kč}$$

Optimální doba obsluhy zákazníka je 2 minuty 30 sekund. Pro tuto optimální dobu obsluhy činí hodnota funkce nákladů a ztrát 600 Kč.

9.3. Poznámka: Uvedeme ještě jiný přístup k optimalizační úloze. Vedle nákladů c_1 a c_2 budeme uvažovat ještě náklady c_3, což jsou náklady orientované na udržení zákazníka za jednotku času. Budeme hledat takovou intenzitu provozu $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$, při níž jsou celkové průměrné náklady minimální.

Zavedeme kriteriální funkci

$$C(\rho) = c_1\rho + c_2(1-\rho) + c_3\frac{\rho}{1-\rho}$$

Hledáme minimum kriteriální funkce vzhledem k ρ:

$$\frac{dC(\rho)}{d\rho} = c_1 - c_2 + c_3\frac{1}{(1-\rho)^2} = 0 \Rightarrow \rho = 1 \pm \sqrt{\frac{c_3}{c_2 - c_1}}$$

Případ $\rho = 1 + \sqrt{\dfrac{c_3}{c_2 - c_1}}$ nevyhovuje, protože ve stabilizovaném systému $\rho < 1$. Tedy optimální intenzita provozu je $\rho = 1 - \sqrt{\dfrac{c_3}{c_2 - c_1}}$, přičemž $0 < \sqrt{\dfrac{c_3}{c_2 - c_1}} < 1$.

Pomocí 2. derivace kriteriální funkce ověříme, že jde skutečně o minimum:

$$\frac{d^2C(\rho)}{d\rho^2} = c_3\frac{2}{(1-\rho)^3} > 0 \text{ pro } \rho = 1 - \sqrt{\frac{c_3}{c_2 - c_1}}.$$

9.4. Příklad: Malá stavební firma s jedním zaměstnancem očekává v příštím měsíci tyto náklady: penalizace úvěrující bankou za nečinnost je 150 000 Kč, náklady na plat zaměstnance jsou 50 000 Kč a náklady na reklamu 10 000 Kč. Za jakých podmínek může mít firma minimální náklady?

Řešení:

$c_1 = 50\,000$, $c_2 = 150\,000$, $c_3 = 10\,000$

$$\rho = 1 - \sqrt{\frac{c_3}{c_2 - c_1}} = 1 - \sqrt{\frac{10000}{150000 - 50000}} = 1 - \sqrt{\frac{1}{10}} = 0{,}683\,.$$

Minimální náklady při této intenzitě provozu činí

$$C(\rho) = c_1\rho + c_2(1-\rho) + c_3\frac{\rho}{1-\rho} = 50000 \cdot 0{,}683 + 150000 \cdot (1 - 0{,}683) + 10000 \cdot \frac{0{,}683}{1-0{,}683} = 103246 \text{ Kč}.$$

Intenzita obsluhy tedy musí být $\mu = \dfrac{\lambda}{0{,}683} = 1{,}464\lambda$.

Znamená to, že intenzita obsluhy musí být takřka 1,5 x vyšší než intenzita vstupu.

9.5. Příklad: Sledujeme činnost výdejny nářadí ve strojírenském závodě. Náklady na obsluhu jednoho požadavku činí 20 Kč, ztráty z prostojů jsou 100 Kč/h. V průměru má výdejna 8 požadavků za 1 h.

Uvažujeme následující 4 varianty činnosti výdejny:

varianta I: neomezená kapacita systému, optimální intenzita obsluhy;

varianta II: ve frontě mohou být maximálně 2 požadavky, optimální intenzita obsluhy;

varianta III: ve výdejně jsou 2 okénka, systém má neomezenou kapacitu, intenzita obsluhy je poloviční než vypočtená optimální;

varianta IV: ve výdejně jsou 2 okénka, ve frontě mohou být maximálně 2 požadavky, intenzita obsluhy je poloviční než vypočtená optimální.

Pro každou z těchto variant vypočtěte:

- pravděpodobnost, že systém je prázdný;
- využití systému;
- $E(N)$, $E(N_Q)$, $E(N_S)$;
- $E(W)$, $E(W_Q)$, $E(W_S)$;
- pravděpodobnost odmítnutí požadavku;
- celkové náklady a ztráty za 1 h provozu.

Řešení:

$\lambda = 8, c_1 = 20, c_2 = 100$, $\mu = \lambda + \sqrt{\frac{c_2}{c_1}\lambda} = 8 + \sqrt{\frac{100}{20} \cdot 8} = 8 + 2\sqrt{10} = 14{,}32$ požadavků za 1 h

Varianta I: Jde o systém M/M/1/∞/FIFO, $\lambda = 8$, $\mu = 14{,}32$

Použijeme funkci neomezeny_1.m

$a_0 = 0{,}4415$

$\kappa = 55{,}85\ \%$

$E(N) = 1{,}2649$

$E(N_Q) = 0{,}7064$

$E(N_S) = 0{,}5585$

$E(W) = 0{,}1581$ h = 9 min 29 s

$E(W_Q) = 0{,}0883$ h = 5 min 18 s

$E(W_S) = 0{,}0698$ h = 4 min 11 s

$P_Z = 0$

$F(\mu) = c_1\mu + c_2\, E(N) = 20(8 + 2\sqrt{10}) + 100.1{,}2649 = 412{,}98$ Kč

Varianta II: Jde o systém M/M/1/3/FIFO, $\lambda = 8$, $\mu = 8 + 2\sqrt{10}$, $n = 1$, $m = 3$

Použijeme funkci odmitani.m

$a_0 = 0,4891$

$\kappa = 51,09$ %

$E(N) = 0,8338$

$E(N_Q) = 0,3229$

$E(N_S) = 0,5109$

$E(W) = 0,11139$ h = 6 min 50 s

$E(W_Q) = 0,0441$ h = 2 min 39 s

$E(W_S) = 0,0698$ h = 4 min 11 s

$P_Z = 0,0852$

$F(\mu) = c_1\mu + c_2\, E(N) = 20(8 + 2\sqrt{10}) + 100.0,8338 = 369,87$ Kč

Varianta III: Jde o systém $M/M/2/\infty/FIFO$, $\lambda = 8$, $\mu = (8 + 2\sqrt{10})/2$, $n = 2$

Použijeme funkci neomezeny_n.m

$a_0 = 0{,}2833$

$\kappa = 55{,}85$ %

$E(N) = 1{,}6233$

$E(N_Q) = 0{,}5063$

$E(N_S) = 1{,}1170$

$E(W) = 0{,}2029$ h = 12 min 10 s

$E(W_Q) = 0{,}0633$ h = 3 min 48 s

$E(W_S) = 0{,}1396$ h = 8 min 22 s

$P_Z = 0$

$F(\mu) = c_1\mu + c_2\, E(N) = 10(8 + 2\sqrt{10}) + 100.1{,}6233 = 305{,}58$ Kč

Varianta IV: Jde o systém M/M/2/4/FIFO, $\lambda = 8$, $\mu = (8 + 2\sqrt{10})/2$, $n = 2$, $m = 4$
Použijeme funkci odmitani.m
$a_0 = 0{,}3045$
$\kappa = 52{,}54\ \%$
$E(N) = 1{,}2754$
$E(N_Q) = 0{,}2246$
$E(N_S) = 1{,}0508$
$E(W) = 0{,}1555$ h = 9 min 20 s
$E(W_Q) = 0{,}0159$ h = 57 s
$E(W_S) = 0{,}1396$ h = 8 min 23 s
$P_Z = 0{,}0593$
$F(\mu) = c_1\mu + c_2\, E(N) = 10(8 + 2\sqrt{10}) + 100.1{,}2754 = 270{,}79$ Kč

Shrnutí výsledků:

typ	a_0	κ	$E(N)$	$E(N_Q)$	$E(N_S)$	$E(W)$	$E(W_Q)$	$E(W_S)$	P_Z	$F(\mu)$
I	0,4415	55,85 %	1,2649	0,7064	0,5585	9 min 29 s	5 min 18 s	4 min 11 s	0	413 Kč
II	0,4891	51,09 %	0,8338	0,3229	0,5109	6 min 50 s	2 min 39 s	4 min 11 s	8,52 %	370 Kč
III	0,2833	55,85 %	1,6233	0,5063	1,1170	12 min 10 s	3 min 48 s	8 min 22 s	0	306 Kč
IV	0,3045	52,54 %	1,2754	0,2246	1,0508	9 min 20 s	0 min 57 s	8 min 23 s	5,93 %	271 Kč

9.6. Optimalizace systému M/M/n/∞/FIFO

Vstupní proud zákazníků je Poissonův proces s parametrem λ, doba obsluhy se řídí exponenciálním rozložením s parametrem μ. Známe:

c_1 … náklady na čekajícího zákazníka za jednotku času,

c_2 … náklady na nevyužitou linku obsluhy za jednotku času.

Cílem je najít takový počet linek obsluhy, při němž jsou průměrné celkové náklady minimální.

Zavedeme kriteriální funkci $C(n) = c_1 E(N_Q) + c_2 [n - E(N_S)]$.

První sčítanec vyjadřuje průměrné náklady na čekajícího zákazníka. Ty jsou úměrné střední hodnotě počtu zákazníků ve frontě.

Druhý sčítanec vyjadřuje průměrné náklady na nevyužití linky obsluhy. Ty jsou úměrné střední hodnotě počtu nevyužitých linek.

Přitom $E(N_Q) = P_Q \frac{\rho}{1-\rho}$, $P_Q = a_0 \frac{\beta^n}{n!(1-\rho)} = \frac{a_n}{1-\rho}$, $\beta = \frac{\lambda}{\mu}$, $\rho = \frac{\beta}{n}$, $a_0 = \left[\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\beta^j}{j!} + \frac{n\beta^n}{n!(n-\beta)}\right]^{-1}$, $E(N_S) = n\rho$.

Po dosazení do kriteriální funkce dostaneme:

$$C(n) = c_1 \frac{a_n \rho}{(1-\rho)^2} + c_2 (n - n\rho)$$

Systém se může stabilizovat, když $1 > \rho = \frac{\beta}{n} = \frac{\lambda}{n\mu}$, tedy $n > \frac{\lambda}{\mu}$. Hledáme n^* tak, že

$$C(n^*) = \min\left\{C(n); n > \frac{\lambda}{\mu}, n \in N\right\}.$$

9.7. Příklad: Začínající softwarová firma může očekávat 4 objednávky za měsíc. Charakter objednávky je takový, že programátor je schopen vyřešit za měsíc průměrně dvě objednávky. Měsíční náklady na provizorní řešení, kdy zákazník čeká na konečné řešení, jsou 50 000 Kč. Nemá-li programátor práci, dostává z rezervního fondu firmy základní plat 10 000 Kč.
V případě, že programátor má objednávku, je jeho základní plat plus výkonnostní příplatek zcela pokryt z ceny objednávky. Při jakém počtu programátorů budou průměrné měsíční náklady stabilizované firmy minimální?

Řešení:

$$\lambda = 4, \mu = 2, c_1 = 50000, c_2 = 10000, \beta = \frac{\lambda}{\mu} = 2, \rho = \frac{\beta}{n} = \frac{2}{n}, \; C(n) = c_1 \frac{a_n \rho}{(1-\rho)^2} + c_2(n - n\rho),$$

$$a_n = \frac{\beta^n}{n!} a_0, \; a_0 = \left[\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\beta^j}{j!} + \frac{n\beta^n}{n!(n-\beta)}\right]^{-1} = \left[\sum_{j=0}^{n-1} \frac{2^j}{j!} + \frac{n2^n}{n!(n-\beta)}\right]^{-1}$$

Z podmínky stability plyne, že minimální počet programátorů je 3.

$$n = 3\text{:}\; \rho = \frac{2}{3}, \; a_0 = \left(1 + 2 + 2 + \frac{3 \cdot 8}{6}\right)^{-1} = \frac{1}{9}, \; a_3 = \frac{\beta^3}{3!} a_0 = \frac{8}{6} \cdot \frac{1}{9} = \frac{4}{27}$$

$$E(N_Q) = a_3 \frac{\rho}{(1-\rho)^2} = \frac{4}{27} \cdot \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{9}} = \frac{24}{27} = \frac{8}{9}, \; E(N_S) = n\rho = 3 \cdot \frac{2}{3} = 2$$

$$C(3) = 50000 \frac{8}{9} + 10000(3-2) = 54444,\overline{4} \text{ Kč}$$

$$n = 4:\ \rho = \frac{1}{2},\ a_0 = \left(1 + 2 + 2 + \frac{4}{3} + \frac{4 \cdot 16}{24 \cdot 2}\right)^{-1} = \frac{3}{23},\ a_4 = \frac{\beta^4}{4!} a_0 = \frac{16}{24} \cdot \frac{3}{23} = \frac{2}{23}$$

$$E(N_Q) = a_4 \frac{\rho}{(1-\rho)^2} = \frac{2}{23} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = \frac{4}{23},\ E(N_S) = n\rho = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

$$C(4) = 50000 \frac{4}{23} + 10000(4-2) = 28695{,}65\ \text{Kč}$$

$$n = 5:\ \rho = \frac{2}{5},\ a_0 = \left(1 + 2 + 2 + \frac{4}{3} + \frac{2}{3} + \frac{5 \cdot 32}{120 \cdot 3}\right)^{-1} = \frac{9}{67},\ a_5 = \frac{\beta^5}{5!} a_0 = \frac{32}{120} \cdot \frac{9}{67} = \frac{12}{335}$$

$$E(N_Q) = a_5 \frac{\rho}{(1-\rho)^2} = \frac{12}{335} \cdot \frac{\frac{2}{5}}{\frac{9}{25}} = \frac{8}{201},\ E(N_S) = n\rho = 5 \cdot \frac{2}{5} = 2$$

$$C(5) = 50000 \frac{8}{201} + 10000(5-2) = 31990{,}05\ \text{Kč}$$

$$n = 6:\ \rho = \frac{1}{3},\ a_0 = \left(1 + 2 + 2 + \frac{4}{3} + \frac{2}{3} + \frac{4}{15} + \frac{2}{15}\right)^{-1} = \frac{5}{37},\ a_6 = \frac{\beta^6}{6!} a_0 = \frac{64}{720} \cdot \frac{5}{37} = \frac{4}{333}$$

$$E(N_Q) = a_6 \frac{\rho}{(1-\rho)^2} = \frac{4}{333} \cdot \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{9}} = \frac{1}{111},\ E(N_S) = n\rho = 6 \cdot \frac{1}{3} = 2$$

$$C(6) = 50000 \frac{1}{111} + 10000(6-2) = 40450{,}45\ \text{Kč}$$

Shrnutí výsledků:

n	ρ	a_n	C(n)
3	$\frac{2}{3} = 0,\overline{6}$	$\frac{4}{27} = 0,1481$	54 444,44 Kč
4	$\frac{1}{2} = 0,5$	$\frac{2}{23} = 0,0870$	28 695,65 Kč
5	$\frac{2}{5} = 0,4$	$\frac{12}{335} = 0,0358$	31 990,05 Kč
6	$\frac{1}{3} = 0,\overline{3}$	$\frac{4}{333} = 0,0120$	40 450,45 Kč

Vidíme, že optimální počet programátorů je 4.