Autonomní systémy

Zvláštnosti nelineárních systémů

Petr Liška

Masarykova univerzita

23.3.2021

Klasický a rozumný příklad

Najděte stacionární body autonomního systému

$$\begin{aligned} x' &= x(x - 3y + 1) \\ y' &= x^2 - 3y - 1 \end{aligned}$$

Nulová reálná část je opravdu problém

Dva podobné, ale různé systémy

Dokažte, že nulová řešení následujících systému mají různou stabilitu:

$$
\begin{aligned}
x' &= y - x(x^2 + y^2) \\
y' &= -x - y(x^2 + y^2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x' &= y + x(x^2 + y^2) \\
y' &= -x + y(x^2 + y^2)
\end{aligned}
$$

Limitní cykl

Ukažte, že následující systém má jako trajektorii alespoň jeden cyklus

$$x' = -y + x(1 - x^2 - y^2)$$
$$y' = x + y(1 - x^2 - y^2)$$

Limitní cykl

Ukažte, že následující systém má jako trajektorii alespoň jeden cyklus

$$x' = -y + x(1 - x^2 - y^2)$$
$$y' = x + y(1 - x^2 - y^2)$$

V čem se liší systém

$$x' = -y(1 - x^2 - y^2)^2 + x(1 - x^2 - y^2)^3 - y^3$$
$$y' = x(1 - x^2 - y^2)^2 + y(1 - x^2 - y^2)^3 + xy^2$$

Uvažme opět náš systém

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{1}$$

Definice ((Asymptoticky) stabilní cykly)

Cyklus C_ω rovnice (1) se nazývá stabilní, jestliže pro každou otevřenou množinu $V \subseteq \mathbb{R}^n$, která obsahuje C_ω, existuje otevřená množina $W \subseteq V$ taková, že každé řešení, které začíná v bodě $\mathbf{x}_0 \in W$ v čase nula, zůstane v množině V pro všechna $t \geq 0$.
Cyklus C_ω se nazývá asymptoticky stabilní, jestliže navíc existuje množina $X \subseteq \mathbb{R}^n$ taková, že každé řešení, které začíná v bodě $\mathbf{x}_0 \in X$, se asymptoticky blíží k C_ω pro $t \to \infty$.

Uvažme opět náš systém

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{1}$$

Definice ((Asymptoticky) stabilní cykly)

Cyklus C_ω rovnice (1) se nazývá stabilní, jestliže pro každou otevřenou množinu $V \subseteq \mathbb{R}^n$, která obsahuje C_ω, existuje otevřená množina $W \subseteq V$ taková, že každé řešení, které začíná v bodě $\mathbf{x}_0 \in W$ v čase nula, zůstane v množině V pro všechna $t \geq 0$.
Cyklus C_ω se nazývá asymptoticky stabilní, jestliže navíc existuje množina $X \subseteq \mathbb{R}^n$ taková, že každé řešení, které začíná v bodě $\mathbf{x}_0 \in X$, se asymptoticky blíží k C_ω pro $t \to \infty$.

Definice ($\varepsilon - \delta$)

Později.

Jak poznat, že cyklus neexistuje?

$$
\begin{aligned}
x' &= f(x,y) \\
y' &= g(x,y)
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Věta (Dulacovo kritérium)

Nechť Ω je jednoduše souvislá oblast ve fázovém prostoru. Existuje-li spojitě diferencovatelná funkce $\phi(x,y)$ taková, že výraz

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\phi(x,y)f(x,y)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\phi(x,y)g(x,y)\right]$$

nemění znaménko v Ω a není identicky roven nule v žádné otevřené podmnožině množiny Ω, pak v Ω neexistuje uzavřená trajektorie systému (2).

Důkaz: Sporem. Nechť C_ω je uzavřená trajektorie a $D \subseteq \Omega$ je množina bodů ležících na C_ω a jejím vnitřku. Potom

$$\iint_D \frac{\partial}{\partial x}\left[\phi(x,y)f(x,y)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\phi(x,y)g(x,y)\right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\ = \oint_C -\phi(x,y)g(x,y)\,\mathrm{d}x + \phi(x,y)f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

Důkaz: Sporem. Nechť C_ω je uzavřená trajektorie a $D \subseteq \Omega$ je množina bodů ležících na C_ω a jejím vnitřku. Potom

$$\iint_D \frac{\partial}{\partial x}\left[\phi(x,y)f(x,y)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[\phi(x,y)g(x,y)\right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\ = \oint_C -\phi(x,y)g(x,y)\,\mathrm{d}x + \phi(x,y)f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

Protože $\mathrm{d}x = f(x,y)\,\mathrm{d}t$ a $\mathrm{d}y = g(x,y)\,\mathrm{d}t$ máme

$$\oint_C -\phi(x,y)g(x,y)\,\mathrm{d}x + \phi(x,y)f(x,y)\,\mathrm{d}y = \\ = \int_{t_0}^{t_0+\omega} \phi(x(t),y(t))\left[-g(x(t),y(t))f(x(t),y(t)) + \right. \\ \left. + f(x(t),y(t))g(x(t),y(t))\right] \mathrm{d}t = 0.$$

Důsledek (Bendixsonovo kritérium)

Nechť Ω *je jednoduše souvislá oblast ve fázovém prostoru. Nemění-li výraz*

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) + \frac{\partial}{\partial y} g(x, y)$$

znaménko v Ω *a není identicky roven nule v žádné otevřené podmnožině množiny* Ω*, pak v* Ω *neexistuje uzavřená trajektorie systému* (2).

Důsledek (Bendixsonovo kritérium)

Nechť Ω je jednoduše souvislá oblast ve fázovém prostoru. Nemění-li výraz

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) + \frac{\partial}{\partial y} g(x, y)$$

znaménko v Ω a není identicky roven nule v žádné otevřené podmnožině množiny Ω, pak v Ω neexistuje uzavřená trajektorie systému (2).

Příklad

Ukažte, že daný systém nemá žádné uzavřené trajektorie

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -x - y + x^2 + y^2 \end{aligned}$$