Autonomní systémy

Charakteristické směry

Petr Liška

Masarykova univerzita

6.4.2021

Resty z minulého týdne

$$x' = f(x), \qquad f \in C(D, \mathbb{R}^2), D \subseteq \mathbb{R}^2 \text{ je otevřená} \tag{1}$$

1. Je-li trajektorie ohraničená pro $t \to \infty$, pak její ω-limitní množina obsahuje buď stacionární bod nebo cyklus.
2. Cyklus musí mít ve svém vnitřku stacionární bod.
3. Obsahuje-li ω-limitní množina stabilní uzel nebo ohnisko, pak obsahuje jen tento bod.
4. ω-limitní množina neobsahuje žádné nestabilní stacionární body.

Slíbená $\varepsilon - \delta$ definice asymptotické orbitální stability

Definice

Nechť $C_\omega \colon x = x_\omega(t)$, $t \in (-\infty, \infty)$, je cyklus rovnice (1) odpovídající periodickému řešení $x_\omega(t)$ s periodou $w > 0$. Cyklus C_ω se nazývá *orbitálně stabilní* (orbitálně stabilní zvnějšku/zvnitřku) pro $t \to \infty$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ takové, že jestliže bod x_0 leží ve vzdálenosti menší než δ od cyklu C_ω (a ve vnějšku/vnitřku cyklu), pak polotrajektorie $C_0^+ \colon x = x_0(t)$ řešení $x_0(t)$ počátečního problému $x' = f(x)$, $x(0) = x_0$ zůstává pro všechna $t \geq 0$ v ε-okolí cyklu C_ω.
Cyklus C_ω se nazývá *asymptoticky orbitálně stabilní* (zvnějšku/zvnitřku) pro $t \to \infty$, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že jestliže bod x_0 leží ve vzdálenosti menší než δ od cyklu C_ω (a ve vnějšku/vnitřku C_ω) pak pro polotrajektorii $C_0^+ \colon x = x_0(t)$ řešení $x_0(t)$ počátečního problému $x' = f(x)$, $x(0) = x_0$ platí $\Omega(C_0^+) = C_\omega$.

Věta

Nechť $C_\omega\colon x = x_\omega(t)$, $t \in (-\infty, \infty)$, *je cyklus rovnice* (1) *odpovídající periodickému řešení* $x_\omega(t)$ *s periodou* $w > 0$. *Pak*

i) pro to, aby C_ω *byl cyklus asymptoticky orbitálně stabilní zvnějšku rovnice* (1) *pro* $t \to \infty$, *je nutné a stačí, aby trajektorie* C_ω *byla* ω*-limitní množinou pro polotrajektorii* C_0^+ *některého řešení* $x_0(t)$, $t \geq 0$, *ležícího ve vnějšku* C_ω;

ii) pro to, aby C_ω *byl cyklus orbitálně stabilní zvnějšku pro* $t \to \infty$ *je nutné a stačí, aby trajektorie* C_ω *byla* ω*-limitní množinou pro některou polotrajektoroii* C_0^+ *ležící ve vnějšku* C_ω *nebo aby pro každé* $\varepsilon > 0$ *existovala uzavřená trajektorie rovnice* (2) *ležící ve vnější části* ε*-okolí trajektorie* C_ω.

Charakteristické směry

Uvažujme autonomní systém

$$
\begin{aligned}
x' &= P(x,y) \\
y' &= Q(x,y)
\end{aligned}
\tag{2}
$$

kde P, $Q \in C(D, \mathbb{R})$, kde D je otevřená množina, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $[0,0] \in D$ a $P(0,0) = Q(0,0) = 0$.
Zavedením polárních souřadnic $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ dostaneme systém ve tvaru

Charakteristické směry

Uvažujme autonomní systém

$$\begin{aligned} x' &= P(x,y) \\ y' &= Q(x,y) \end{aligned} \tag{2}$$

kde P, $Q \in C(D,\mathbb{R})$, kde D je otevřená množina, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $[0,0] \in D$ a $P(0,0) = Q(0,0) = 0$.
Zavedením polárních souřadnic $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ dostaneme systém ve tvaru

$$\begin{aligned} r' &= P(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cos\varphi + Q(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\sin\varphi \\ r\varphi' &= Q(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cos\varphi - P(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\sin\varphi \end{aligned} \tag{3}$$

Definice

Směr $\varphi = \varphi_0$ se nazývá *charakteristickým směrem* pro systém (2) jestliže existuje posloupnost (r_n, φ_n) taková, že

1. $$0 < r_n \to 0, \ \varphi_n \to \varphi_0 \quad \text{pro} \quad n \to \infty,$$

2. $$(P(r_n \cos\varphi_n, r_n \sin\varphi_n), Q(r_n \cos\varphi_n, r_n \sin\varphi_n)) \neq 0 \quad \text{pro} \quad n \in \mathbb{N}$$

3. pro $n \to \infty$
$$\frac{Q(r_n \cos\varphi_n, r_n \sin\varphi_n)\cos\varphi_0 - P(r_n \cos\varphi_n, r_n \sin\varphi_n)\sin\varphi_0}{\sqrt{P^2(r_n \cos\varphi_n, r_n \sin\varphi_n) + Q^2(r_n \cos\varphi_n, r_n \sin\varphi_n)}} \to 0$$

Věta

Je-li $\psi(r)$ kladná a spojitá funkce pro $r > 0$ taková, že platí

$$\lim_{r\to 0^+} \psi(r) = 0$$

a limity

$$p(\varphi) = \lim_{r\to 0^+} \frac{P(r\cos\varphi, r\sin\varphi)}{\psi(r)},$$
$$q(\varphi) = \lim_{r\to 0^+} \frac{Q(r\cos\varphi, r\sin\varphi)}{\psi(r)}$$

existují stejnoměrně pro φ blízká φ_0, přičemž $p^2(\varphi) + q^2(\varphi) \neq 0$, pak $\varphi = \varphi_0$ je charakteristickým směrem právě tehdy, když

$$q(\varphi_0)\cos\varphi_0 - p(\varphi_0)\sin\varphi_0 = 0\,.$$

Věta

Nechť $f, g \in C(D, \mathbb{R})$*, kde* $D \subseteq \mathbb{R}^2$ *je otevřená množina,* $[0,0] \in D$*. Buď* $A = (a_{ij})_{i,j=1}^2$ *regulární konstantní matice. Předpokládejme, že*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|f(x,y)| + |g(x,y)|}{|x| + |y|} = 0.$$

Pak ke každému charakteristickému směru φ_0 *systému*

$$\begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + f(x,y), \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + g(x,y) \end{aligned} \tag{4}$$

existuje reálný vlastní vektor matice A *mající směr* φ_0 *a naopak směr* φ_0 *každého reálného vlastního vektoru matice* A *je charakteristickým směrem rovnice* (4).

Důsledek

Předpokládejme, že funkce P, Q jsou spojité a mají spojité parciální derivace druhého řádu v okolí bodu $[x_0, y_0]$ a že $P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0$. Nechť

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial P(x_0,y_0)}{\partial x} & \frac{\partial P(x_0,y_0)}{\partial y} \\ \frac{\partial Q(x_0,y_0)}{\partial x} & \frac{\partial Q(x_0,y_0)}{\partial y} \end{pmatrix}$$

je regulární matice. Pak ke každému charakteristickému směru φ_0 systému

$$\begin{aligned} x' &= P(x, y), \\ y' &= Q(x, y) \end{aligned} \tag{5}$$

v bodě $[x_0, y_0]$ existuje reálný vlastní vektor matice A mající směr φ_0 a naopak směr φ_0 každého reálného vlastního vektoru matice A je charakteristickým směrem systému (5) v bodě $[x_0, y_0]$.