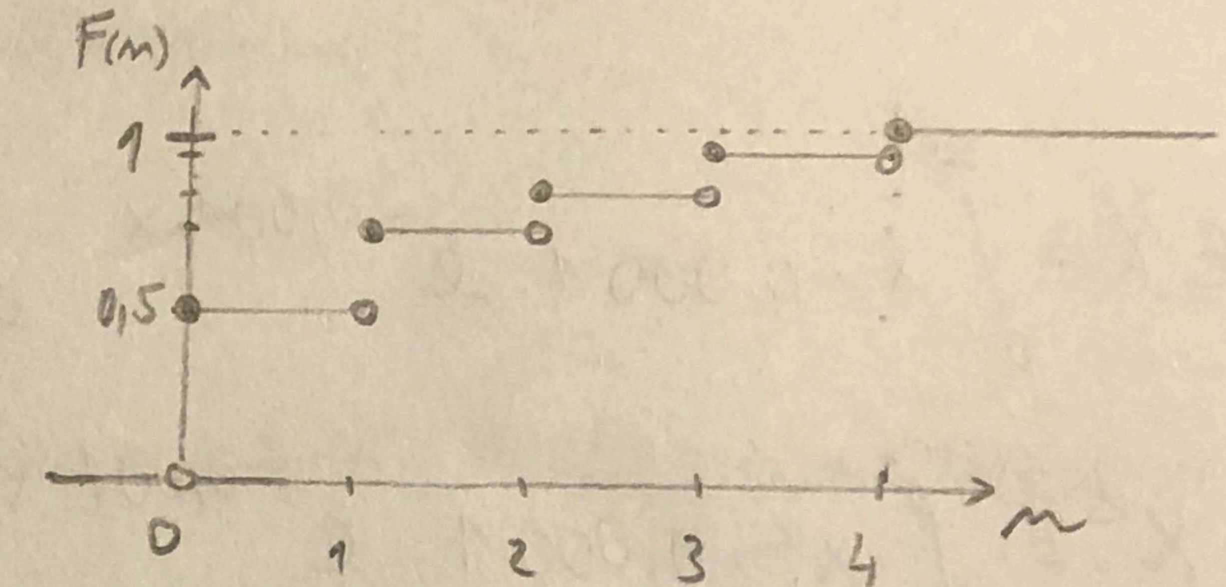
1. cvičení

Příklad 1: V modelu 1 popište distribuční fci a vypočtěte EX a Var X.

$$P(X=n) = \begin{cases} 0{,}5 & n=0 \\ 0{,}25 & n=1 \\ 0{,}12 & n=2 \\ 0{,}08 & n=3 \\ 0{,}05 & n=4 \end{cases} \Rightarrow \quad F(n) = P(X \leq n) = \begin{cases} 0 & n<0 \\ 0{,}5 & 0 \leq n < 1 \\ 0{,}75 & 1 \leq n < 2 \\ 0{,}87 & 2 \leq n < 3 \\ 0{,}95 & 3 \leq n < 4 \\ 1 & n \geq 4 \end{cases}$$



$$EX = 0{,}25 + 2 \cdot 0{,}12 + 3 \cdot 0{,}08 + 4 \cdot 0{,}05 = 0{,}93$$

$$EX^2 = 0{,}25 + 4 \cdot 0{,}19 + 9 \cdot 0{,}08 + 16 \cdot 0{,}05 = 2{,}25$$

$$\mathrm{Var}\, X = EX^2 - E^2X = 2{,}25 - 0{,}93^2 = 1{,}3851$$

Příklad 2: V modelu 2 vypočtěte hustotu, fci přežití a fci míry rizika

$$F(x) = 1 - \left(\frac{2000}{x+2000}\right)^3 \qquad x \geq 0$$

$$f(x) = -3 \left(\frac{2000}{x+2000}\right)^2 2000\,(-1) \frac{1}{(x+2000)^2} = \frac{24\,000\,000\,000}{(x+2000)^4} \qquad \text{... hustota}$$

$$S(x) = 1 - \left[1 - \left(\frac{2000}{x+2000}\right)^3\right] = \left(\frac{2000}{x+2000}\right)^3 \qquad \text{... fce přežití}$$

$$\lambda(x) = \frac{f(x)}{S(x)} = \frac{\frac{24\,000\,000\,000}{(x+2000)^4}}{\frac{2000^3}{(x+2000)^3}} = \frac{3}{x+2000} \qquad \text{... fce míry rizika}$$

Příklad 3: V modelu 3 vypočtěte EX, EX^2, Var X a fci míry rizika

diskrétní část: $P(X=0) = 0{,}9$

spojitá část: $F(x) = 1 - 0{,}1\, e^{-0{,}001 x}$, $x > 0$

"hustota" je $f(x) = 0{,}0001\, e^{-0{,}001 x}$

Pro výpočet EX, EX^2 a Var X můžeme diskrétní část ignorovat, protože z ní dostaneme nulu, tím, že $x = 0$.

$$EX = \int_0^\infty x \cdot 0{,}0001\, e^{-0{,}001 x}\, dx = \underline{\underline{100}}$$

$$EX^2 = \int_0^\infty x^2 \cdot 0{,}0001\, e^{-0{,}001 x}\, dx = \underline{\underline{200\,000}}$$

$$\text{Var}\, X = EX^2 - E^2X = 200\,000 - 10000 = \underline{\underline{190\,000}}$$

Fce míry rizika

$$\lambda(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)} = \frac{0{,}0001\, e^{-0{,}001 x}}{0{,}1\, e^{-0{,}001 x}} = \underline{\underline{0{,}001}} \quad , x > 0$$

Příklad 4: $X \sim \exp(1)$, vypočtěte fci míry rizika $\lambda(x)$

$$f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x} \overset{\lambda=1}{=\!=} e^{-x}$$

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \overset{\lambda=1}{=\!=} 1 - e^{-x}$$

$$S(x) = 1 - F(x) = e^{-x}$$

$$\lambda(x) = \frac{f(x)}{S(x)} = \frac{e^{-x}}{e^{-x}} = \underline{\underline{1}}$$ ... konstantní míra úmrtnosti

Příklad 5: Vypočtěte moment generující fci binomického a Poisson. rozdělení

Binomické:

nechť $X \sim A(p)$ ... alternativní rozdělení, tedy $p(x) = \begin{cases} p & x = 1 \\ 1-p & x = 0 \end{cases}$ | pak

$$M_X(s) = E(e^{sX}) = e^{s \cdot 1} p + e^{s \cdot 0}(1-p) = e^s p + (1-p)$$

nechť $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$, kde X_i jsou IID z alternativního rozdělení, tj. $Y \sim Bi(n, p)$

platí $M_Y(s) = M_{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}(s) = M_{X_1}(s) \cdot M_{X_2}(s) \cdot \ldots \cdot M_{X_n}(s) = (M_X(s))^n =$

$$= \underline{\underline{[e^s p + (1-p)]^n}}$$

Poissonovo:

$$p(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} & x = 0, 1, 2, \ldots \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$M_X(s) = E(e^{sX}) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{sx} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{x=0}^{\infty} \frac{(e^s \lambda)^x}{x!}}_{\text{Taylorova řada pro } e^{e^s \lambda}} =$$

$$= e^{-\lambda} e^{e^s \lambda} = \underline{\underline{e^{\lambda(e^s - 1)}}}$$