4. cvičení

Příklad 1: Vnější rozdělení je $Po(1)$, vnitřní $Ge\left(\frac{1}{2}\right)$. Pomocí Panjerovy rekurze vypočtěte pstí hodnot 0,1,2,3 pro výsledné složené rozdělení.

Poissonovo: $G_N(s) = e^{\lambda(s-1)} = e^{(s-1)}$; $a=0$, $b=\lambda=1$

Geometrické: $q_M(m) = p(1-p)^m = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^m$; $q_M(0) = \frac{1}{2}$

Pst $P(S=0) = g_S(0)$ spočítáme pomocí generující funkce:

$$g_S(0) = G_N(q_M(0)) = e^{\frac{1}{2}-1} = \underline{\underline{e^{-\frac{1}{2}}}} \quad (\doteq 0{,}6065)$$

Psti ostatních hodnot spočítáme Panjerovou rekurzí:

$$g_S(k) = \frac{1}{1-a\cdot q_M(0)} \sum_{j=1}^{k} \left(a+\frac{jb}{k}\right) q_M(j)\, g_S(k-j) \qquad , k=1,2,\dots$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \frac{j}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{j+1} \cdot g_S(k-j)$$

$$g_S(1) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 g_S(0) = \underline{\underline{\frac{1}{4}\cdot e^{-\frac{1}{2}}}} \quad (\doteq 0{,}1516)$$

$$g_S(2) = \sum_{j=1}^{2} \frac{j}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{j+1} g_S(2-j) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 g_S(1) + \left(\frac{1}{2}\right)^3 g_S(0) =$$

$$= \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4} e^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{8} e^{-\frac{1}{2}} = \underline{\underline{\frac{5}{32} e^{-\frac{1}{2}}}} \quad (\doteq 0{,}0948)$$

$$g_S(3) = \sum_{j=1}^{3} \frac{j}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{j+1} g_S(3-j) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^2 g_S(2) + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 g_S(1) + \left(\frac{1}{2}\right)^4 g_S(0) =$$

$$= \frac{1}{12}\cdot\frac{5}{32} e^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{4} e^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{16} e^{-\frac{1}{2}} = \underline{\underline{\frac{37}{384} e^{-\frac{1}{2}}}} \quad (\doteq 0{,}0584)$$

Příklad 2:

• <u>cvičení 3 z DMT</u>: Dokažte pomocí gen. fce, že smíšené Poisson. rozdělení s mísícím gamma rozdělením je negativně binomické

Víme, že generující fce smíšeného Poisson. rozdělení je $G_N(s) = M_\Theta(\lambda(s-1))$, kde $M_\Theta(t)$ je moment generující fce gamma rozdělení.

Mějme $\Theta \sim \text{gamma}(\alpha, \beta)$, $f_\Theta(\theta) = \dfrac{\theta^{\alpha-1} e^{-\frac{\theta}{\beta}}}{\Gamma(\alpha)\,\beta^\alpha}$, $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty \theta^{\alpha-1} e^{-\theta}\, d\theta$

$$M_\Theta(t) = E(e^{t\Theta}) = \int_0^\infty e^{t\theta} \frac{\theta^{\alpha-1} e^{-\frac{\theta}{\beta}}}{\Gamma(\alpha)\,\beta^\alpha}\, d\theta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\beta^\alpha} \int_0^\infty \theta^{\alpha-1} e^{\theta(t-\frac{1}{\beta})}\, d\theta =$$

$$= \left| \begin{array}{l} s = (\frac{1}{\beta} - t)\,\theta \\ ds = (\frac{1}{\beta} - t)\, d\theta \\ \text{meze se nemění} \end{array} \right| = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\beta^\alpha} \int_0^\infty \left(\frac{1}{\frac{1}{\beta} - t}\right)^{\alpha-1} s^{\alpha-1} e^{-s} \frac{1}{(\frac{1}{\beta} - t)}\, ds =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\beta^\alpha} \left(\frac{1}{\frac{1}{\beta} - t}\right)^\alpha \underbrace{\int_0^\infty s^{\alpha-1} e^{-s}\, ds}_{\Gamma(\alpha)} = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1}{\beta}\right)^\alpha \left(\frac{1}{\frac{1}{\beta} - t}\right)^\alpha = \left(\frac{1}{1 - \beta t}\right)^\alpha$$

Potom $G_N(s) = \left(\dfrac{1}{1 - \beta\lambda(s-1)}\right)^\alpha$

Generující fce negativně binomického rozdělení s parametry m, β^* je

$$G_X(s) = \left(\frac{1}{1 - \beta^*(s-1)}\right)^m$$

Tedy generující funkce se rovnají pro $m = \alpha$ a $\beta^* = \beta\lambda$.

• Cvičení 4 z DMT: Dokažte, existuje-li generující fce n. v. N, pak platí

$$G_N(s) = \varphi_N(-i\ln(s)) \quad \text{a} \quad \varphi_N(s) = G_N(e^{is})$$

$$G_N(s) = E(s^N)$$

$$\varphi_N(s) = E(e^{isN})$$

1. rovnost:

$$G_N(s) = E(s^N) = E(e^{\ln(s^N)}) = E(e^{\ln(s)\cdot N}) =$$

$$= E(e^{i(-i)\ln(s)N}) = \varphi_N(-i\ln(s))$$

1. rovnost:

$$\varphi_N(s) = E(e^{isN}) = E([e^{is}]^N) = G_N(e^{is})$$

• <u>cvičení 5 z DMT</u>: Ukažte, že gamma rozdělení je nekonečně dělitelné.

Nápověda: Nechť $X \sim \text{gamma}(\alpha, \beta)$, $\alpha, \beta > 0$ a $X = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$, kde $Y_1, Y_2, \dots Y_n$ jsou IID, pak $Y_j \sim \text{gamma}(\frac{\alpha}{n}, \beta)$.

Charakteristická fce $X \sim \text{gamma}(\alpha, \beta)$ je

cvičení 3

$$\varphi_X(s) = E(e^{isX}) = M_X(is) \overset{\downarrow}{=} \left(\frac{1}{1 - \beta(is - 1)} \right)^{\alpha}$$

Charakteristická fce $Y \sim \text{gamma}(\frac{\alpha}{n}, \beta)$ je

$$\varphi_Y(s) = M_Y(is) = \left(\frac{1}{1 - \beta(is-1)} \right)^{\frac{\alpha}{n}}$$

Celkem tedy

$$\varphi_X(s) = \left(\frac{1}{1-\beta(is-1)} \right)^{\alpha} = \left[\left(\frac{1}{1-\beta(is-1)} \right)^{\frac{\alpha}{n}} \right]^{n} = \left[\varphi_Y(s) \right]^{n}$$