

1) V automobilovom poistení sú 3 skupiny vodičov. Dobrí vodiči tvoria 40% poistených a majú 0 alebo 1 nehodu s pravou 0,9, resp. 0,1. Zlí vodiči tvoria 25% poistených a majú 0 alebo 1 nehodu s pravou 0,5, resp. 0,5. Priemerní vodiči tvoria 35% poistených a majú 0 alebo 1 nehodu s pravou 0,7, resp. 0,3. Pre konkrétnych poistených poznáme hodnoty $x_1=1$ a $x_2=0$.

Vypočítajte pravdepodobnosť, že to je dobrý vodič. Ďalej nájdite prediktívne rozdelenie a celé aposteriorné rozdelenie. (1)

X... počet nehôd za 1 poistné obdobie

- (1) { G ... dobrí vodiči
A ... priemerní vodiči
B ... zlí vodiči

→ PRIOR: $\pi_{\Theta}(\theta) = \begin{cases} 0,4 & , \text{keď } \theta = G \\ 0,35 & , \text{keď } \theta = A \\ 0,25 & , \text{keď } \theta = B \end{cases}$

→ VIEROĎODNOSTI:

x	$f(x G)$	$f(x A)$	$f(x B)$
	$P(X=x \Theta=G)$	$P(X=x \Theta=A)$	$P(X=x \Theta=B)$
0	0,9	0,7	0,5
1	0,1	0,3	0,5

→ marginálne rozdelenie pre $X=(x_1, x_2)$:

$$f_x(1,0) \stackrel{\substack{\text{VÝRAZ} \\ \text{MERANOST}}}{=} \sum_{\theta} f_{x_1}(1|\theta) \cdot f_{x_2}(0|\theta) \cdot \pi_{\Theta}(\theta)$$

$$= 0,1 \cdot 0,9 \cdot 0,4 + 0,3 \cdot 0,7 \cdot 0,35 + 0,5^2 \cdot 0,25$$

$$= 0,172$$

→ aditivné rozdelenie pre (x_1, x_2) :

- $f_{x_1, x_2}(1,0,0) = 0,1 \cdot 0,9^2 \cdot 0,4 + 0,3 \cdot 0,7^2 \cdot 0,35 + 0,5^3 \cdot 0,25 = 0,1151$
- $f_{x_1, x_2}(1,0,1) = 0,1^2 \cdot 0,9 \cdot 0,4 + 0,3^2 \cdot 0,7 \cdot 0,35 + 0,5^3 \cdot 0,25 = 0,0569$

→ PREDIKTÍVNE ROZDELENIE: $\beta_{x_3|x} (0,1,0)$

$$\bullet \beta_{x_3|x} (0|1,0) = \frac{\beta_{x_3,x} (1,0,0)}{\beta_x (1,0)} = \frac{0,1151}{0,172} \approx 0,67$$

$$\bullet \beta_{x_3|x} (1|1,0) = \frac{\beta_{x_3,x} (1,0,1)}{\beta_x (1,0)} = \frac{0,0569}{0,172} \approx 0,33$$

→ POSTERIOR pre Θ :

$$\bullet \pi_{\Theta|x} (G|1,0) = \frac{\beta(1|G) \cdot \beta(0|G) \cdot \pi_0(G)}{\beta_x (1,0)} = \frac{0,1 \cdot 0,9 \cdot 0,4}{0,172} = \frac{9}{43} \approx 0,21$$

$$\bullet \pi_{\Theta|x} (A|1,0) = \frac{0,3 \cdot 0,7 \cdot 0,35}{0,172} \approx 0,43$$

$$\bullet \pi_{\Theta|x} (B|1,0) = \frac{0,5^2 \cdot 0,25}{0,172} \approx 0,36$$

* pravdepodobnosť, že pri histórii $x_1=1$ a $x_2=0$ slo o delreho vedica

2) V automobilovom poistení máme 2 typy vodičov. Spasení vodiči tvoria 80% poistených a majú sa rozdeliť 0 alebo 1 nehodu s pravdepodobnosťami 0,9, resp. 0,1. Neopasení vodiči tvoria 20% poistených a majú 0 alebo 1 nehodu s pravdepodobnosťami 0,7, resp. 0,3. Konkrétny poistený nemá v prvých troch rokoch žiadnu nehodu. Uviete Bayesovské pravidlo pre stavový rozdiel, ak má veľkosť škody fixnú veľkosť 10 000.

X... počet nehôd $\rightarrow X \in \{0, 1\}$
 Y... výška škody $\rightarrow Y = 10\,000 \cdot X \rightarrow Y \in \{0, 10\,000\}$

Θ ... stavový faktor $\rightarrow \Theta \in \{G \dots \text{opasení}, B \dots \text{neopasení}\}$

\rightarrow PRIOR:

$$\pi_{\Theta}(\theta) = \begin{cases} 0,8 & \text{keď } \theta = G \\ 0,2 & \text{keď } \theta = B \end{cases}$$

\rightarrow VIEROHODNOTA

Y	X	$P(Y=y_j \Theta=G)$	$P(Y=y_j \Theta=B)$
		$P(X=x_i \Theta=G)$	$P(X=x_i \Theta=B)$
0	0	0,9	0,7
10 ⁴	1	0,1	0,3

\rightarrow marginálne rozdelenie pre $X = (x_1, x_2, x_3)$, resp. $Y = (y_1, y_2, y_3)$

$$f_Y(0,0,0) = f_X(0,0,0) = \sum_{\Theta} f_{x_1}(0|\Theta) \cdot f_{x_2}(0|\Theta) \cdot f_{x_3}(0|\Theta) \cdot \pi_{\Theta}(\theta)$$

\uparrow
 UPLNÁ PŮJ
 &
 NEZÁVISLOSŤ

$$= 0,9^3 \cdot 0,8 + 0,7^3 \cdot 0,2 = 0,6518$$

\rightarrow individuálne priemer:

- $\mu_4(G) = E(Y_4 | \Theta=G) = 0 \cdot 0,9 + 10\,000 \cdot 0,1 = 1\,000$
- $\mu_4(B) = 0 \cdot 0,7 + 10\,000 \cdot 0,3 = 3\,000$

\rightarrow POSTERIOR:

- $\pi(G|0,0,0) = \frac{[f_Y(0|G)]^3 \cdot \pi_{\Theta}(G)}{f_Y(0,0,0)} = \frac{0,9^3 \cdot 0,8}{0,6518} \approx 0,895$
- $\pi(B|0,0,0) = \frac{[f_Y(0|B)]^3 \cdot \pi_{\Theta}(B)}{f_Y(0,0,0)} = \frac{0,7^3 \cdot 0,2}{0,6518} \approx 0,105$

⇒ Bayesovské pravidlo: $E(Y_{m+1} | Y=y) = \sum_{\theta} w_{m+1}(\theta) \Pi_{01Y}(\theta | y) d\theta$

$$E(Y_4 | 0,0,0) = 1\,000 \cdot 0,895 + 3\,000 \cdot 0,105 = \underline{\underline{1\,210}}$$

ALEBO: $E(Y_{m+1} | Y=y) = \sum_y y_{m+1} \cdot b_{Y_{m+1}|Y}(y_{m+1}|y)$

→ marginální rozdělení pro (Y, Y_4) :

$$\bullet b_{Y, Y_4}(0,0,0,0) = 0,9^4 \cdot 0,8 + 0,7^4 \cdot 0,2 = 0,5729$$

$$\bullet b_{Y, Y_4}(0,0,0,1) = 0,9^3 \cdot 0,1 \cdot 0,8 + 0,7^3 \cdot 0,3 \cdot 0,2 = 0,0789$$

→ podmíněné rozdělení:

$$\bullet b_{Y_4|Y}(0|0,0,0) = \frac{0,5729}{0,6518} = 0,879$$

$$\bullet b_{Y_4|Y}(1|0,0,0) = \frac{0,0789}{0,6518} = 0,121$$

⇒ Bayesovské pravidlo:

$$E(Y_4 | 0,0,0) = 0 \cdot 0,879 + 10\,000 \cdot 0,121 = \underline{\underline{1\,210}}$$