Teorie kredibility

– Bayesovská teorie, která se snaží optimálním způsobem kombinovat všechny dostupné informace o klientovi

– Informace při úpisu pojištění + informace o škodním průběhu klienta (jeho pojistná historie)

– Známe pojistné nároky klienta v minulých n obdobích a chceme odhadnout budoucí nárok v $(n+1)$-ním období.

Základní pojmy:

– Rizikový parametr θ (může být i vektor)

– Pst. rozdělení počtu (velikosti) nároku $f(x|\theta)$ je podmíněné hodnotou θ

– Známe apriorní rozdělení pro rizikový parametr $\pi(\theta)$ v dané tarifní třídě

– Z pozorovaných nároků pomocí Bayesovy věty spočítáme aposteriorní rozdělení θ pro daného klienta;

– Na základě něj spočítáme prediktivní rozdělení pro nárok v následujícím období

– Budeme uvažovat 3 typy pojistného – individuální x kolektivní x bayesovské

- **Teorie kredibility** je nástroj, který pojišťovnám umožňuje upravovat budoucí pojistné klientů v závislosti na jejich historii či rizikové skupině, do níž klient patří.
- Jestliže klient dosahuje trvale **lepších výsledků** (nenárokuje pojistné plnění) než průměrný klient, který platí základní pojistné, pak by bylo spravedlivé, aby takový klient získal **redukci** svého pojistného (slevu).
- Podle stejné logiky by také klienti s **vyšší úrovní rizika** měli platit **vyšší pojistné**.

- Tabulková hodnota pojistného je navržena tak, aby odrážela očekávané zkušenosti **celé skupiny klientů**.
- Ve skupinách však zůstává jistá míra **heterogenity** v úrovních rizika.
- Někteří klienti představují nižší riziko někteří naopak vyšší riziko, než předpokládají tabulky.

Rizikový parametr θ

- V každé tarifní skupině zůstává jistá míra heterogenity. Proto je možné, že se pojištěnec bude odlišovat od toho, co očekáváme.
- Předpokládejme, že úroveň rizika každého klienta můžeme charakterizovat rizikovým faktorem θ, přičemž θ se u jednotlivých pojištěných liší.
- Θ můžeme chápat jako vyjádření nepozorovatelných rizikových faktorů, které způsobují odlišnou rizikovost klienta ve skupině. Θ je nepozorovatelné, neznáme jeho přesnou hodnotu.

Rizikový parametr θ

- V každé skupině jsme však schopni určit rozdělení $\pi(\theta)$ které udává pravděpodobnost jednotlivých hodnot rizikového faktoru Θ uvnitř tarifní skupiny.

- **Distribuční funkce**

$$F_{\Theta}(\theta) = \mathrm{P}(\Theta \leq \theta)$$

náhodné veličiny Θ reprezentuje pravděpodobnost, že náhodně vybraný pojištěnec z dané třídy bude mít hodnotu rizikového parametru menší nebo rovnu θ.

- **Zkušenost** jednotlivých pojištěnců je ovlivněna právě

  hodnotou θ.

- Škody X pak vychází z podmíněného rozdělení X při daném θ.

  s podmíněnou podmíněnou hustotu nebo pst. funkcí $f_{X|\Theta}(x|\theta)$.

Příklad: Uvažujme automobilové pojištění, kde máme 2 skupiny řidičů.

– Dobří řidiči tvoří 75% pojištěných a mají 0,1 nebo 2 nehody s pravděpodobností 0.7, 0.2, resp. 0.1.

– Špatní řidiči tvoří 25% pojištěných a mají 0,1 nebo 2 nehody s pravděpodobností 0.5, 0.3, resp. 0.2.

Popište tento model.

Příklad: Velikost pojistných nároků se řídí exponenciálním rozdělením se střední hodnotou $1/\Theta$ (kde $\theta = \lambda$ v původním označení).

Uvnitř tarifní třídy pojištěných má parametr Θ gama rozdělení s parametrem $n = 4$ a parametrem $\lambda = 1000$.

Popište matematicky tento model.

Bayesovská metodologie

- Nechť pro konkrétního pojištěného máme pozorování $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}$, kde $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, ..., X_n)$ a $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$.
- Snažíme se stanovit takovou sazbu, abychom pokryli pojistný nárok nadcházejícího období, X_{n+1}.
- Budeme předpokládat, že rizikový parametr pojištěného je θ, ale jeho hodnotu neznáme.
- Dále předpokládáme nezávislost $X_1, ..., X_n$ za podmínky θ.

Bayesovská metodologie

- Pokud bychom znali hodnotu θ, pro předpověď škody X_{n+1} by bylo možné použít $f_{X_{n+1}|\Theta}(x_{n+1}|\theta)$.
- Místo toho ovšem známe $\boldsymbol{x}$, které můžeme využít k výpočtu **prediktivní distribuce**, kterou udává podmíněné rozdělení X_{n+1} při daném $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x}$.
- Z Bayesovy věty a předpokladu nezávislosti zkušeností z jednotlivých období za podmínky $\Theta = \theta$ dostáváme

$$f_{\mathbf{X},\Theta}(\boldsymbol{x}, \theta) = f(x_1, \ldots, x_n|\theta)\pi(\theta) = \left[\prod_{j=1}^{n} f_{X_j|\Theta}(x_j|\theta)\right] \pi(\theta).$$

- Z těchto vztahů a s použitím Bayesovy věty získáme **prediktivní hustotu** $f_{X_{n+1}|\mathbf{X}}(x_{n+1}|\mathbf{x})$ ve tvaru

$$f_{X_{n+1}|\mathbf{X}}(x_{n+1}|\mathbf{x}) = \int f_{X_{n+1}|\Theta}(x_{n+1}|\theta)\pi_{\Theta|\mathbf{X}}(\theta|\mathbf{x})\,\mathrm{d}\theta.$$

Příklad:

Předpokládejme automobilové pojištění, kde máme 2 skupiny řidičů. Dobří řidiči tvoří 75% pojištěných a mají 0,1 nebo 2 nehody s pravděpodobností 0.7, 0.2, resp. 0.1. Špatní řidiči tvoří 25% pojištěných a mají 0,1 nebo 2 nehody s pravděpodobností 0.5, 0.3, resp. 0.2. Pro konkrétního pojištěného známe hodnoty $x_1 = 0$ a $x_2 = 1$. Určete prediktivní rozdělení $(X_3|X_1 = 0, X_2 = 1)$ a aposteriorní rozdělení $(\Theta|X_1 = 0, X_2 = 1)$.

Příklad: Velikost pojistných nároků se řídí exponenciálním rozdělením se střední hodnotou $1/\Theta$. Uvnitř tarifní třídy pojištěných má parametr Θ gama rozdělení s parametrem $n = 4$ a parametrem $\lambda = 1000$. Předpokládejme osobu se škodami 100, 950, 450. Určete prediktivní rozdělení čtvrté škody.

Střední hodnota škod

- Kromě prediktivní distribuce může pojišťovna požadovat také určení střední hodnoty počtu škod nebo velikosti ztrát v příštím zkušenostním období.
- Pokud o klientovi nemáme žádné informace, pro střední hodnotu bude platit

$$\mu_{n+1} = \mathrm{E}(X_{n+1}) = \mathrm{E}[\,\mathrm{E}(X_{n+1}|\Theta)] = \mathrm{E}[\mu_{n+1}(\Theta)],$$

kde $\mu_{n+1}(\Theta)$ pro $\Theta = \theta$ je dáno vztahem

$$\mu_{n+1}(\theta) = \mathrm{E}(X_{n+1}|\Theta = \theta) = \int_0^\infty x_{n+1} f_{X_{n+1}|\Theta}(x_{n+1}|\theta)\,\mathrm{d}x_{n+1},$$

Vyjadřuje-li náhodná veličina X_i celkovou ztrátu v i-tém zkušenostním období pro $i = 1, 2, ..., n$, pak vztah

$$\mu_{n+1} = \mathrm{E}(X_{n+1}) = \mathrm{E}[\,\mathrm{E}(X_{n+1}|\Theta)] = \mathrm{E}[\mu_{n+1}(\Theta)],$$

udává **kolektivní pojistné** a vztah

$$\mu_{n+1}(\theta) = \mathrm{E}(X_{n+1}|\Theta = \theta) = \int_0^\infty x_{n+1} f_{X_{n+1}|\Theta}(x_{n+1}|\theta)\,\mathrm{d}x_{n+1},$$

individuální pojistné.

Definice: **Individuální pojistné** $\mu_{n+1}(\theta)$ je pojistné, které by bylo účtováno pojištěnému s rizikovým parametrem θ v případě, že by hodnota tohoto parametru byla známá. Jedná se o očekávanou hodnotu agregovaných ztrát pojištěného v následujícím zkušenostním období při jeho dané úrovni rizika.

- Střední hodnota $\mu_{n+1}(\theta)$ je **hypotetická**.

- Problém s individuálním pojistným spočívá v hodnotě rizikového parametru θ který nejsme schopni v praxi vypozorovat.
- Individuální pojistné tedy nedokážeme přesně stanovit a jedinou možností je odhadnout jej z dat.

Definice: **Kolektivní pojistné** μ_{n+1} je pojistné, které bude účtováno pojištěnému v případě, že nevíme nic o jeho úrovni rizika. Je to očekávaná hodnota náhodné veličiny vyjadřující výši individuálního pojistného, přes celou tarifní skupinu.

- Využívá se v situacích, kdy o pojištěném nemáme žádné informace, tedy například u nového pojištěného při stanovení pojistného na první zkušenostní období.

Bayesovské pojistné

Definice: Nechť $X_1, X_2, ..., X_n$ označují zkušenost pojištěného za n zkušenostních období. **Bayesovské pojistné** $B(X_1, X_2, ..., X_n)$ je potom dáno jako

$$B(X_1, X_2, ..., X_n) = \mathrm{E}[\mu_{n+1}(\Theta)|X_1, X_2, ..., X_n].$$

- Dá se ukázat, že platí také

$$B(X_1, X_2, ..., X_n) = arg\ min_{g(.)}\, \mathrm{E}\left[(\mu_{n+1}(\Theta) - g(X_1, X_2, ..., X_n))^2\right],$$

kde $g(.)$ je nějakou funkcí dat $X_1, X_2, ..., X_n$.

Bayesovské pojistné

Pro výpočet Bayesovského pojistného může použít jeden ze dvou vztahů

– Přímo jako střední hodnotu prediktivního rozdělení

$$E(X_{n+1}|\mathbf{X}=\mathbf{x}) = \int x_{n+1} f_{X_{n+1}|\mathbf{X}}(x_{n+1}|\mathbf{x}) dx_{n+1}.$$

– nebo početně výhodnější vztah jako očekávání individuálního pojistného vzhledem k aposteriorní hustotě θ.

$$E(X_{n+1}|\mathbf{X}=\mathbf{x}) = \int \mu_{n+1}(\theta)\pi_{\Theta|\mathbf{X}}(\theta|\mathbf{x}) d\theta.$$

Příklad: Předpokládejme automobilové pojištění, kde máme 2 skupiny řidičů. Dobří řidiči tvoří 75% pojištěných a mají 0,1 nebo 2 nehody s pravděpodobností 0.7, 0.2, resp. 0.1. Špatní řidiči tvoří 25% pojištěných a mají 0,1 nebo 2 nehody s pravděpodobností 0.5, 0.3, resp. 0.2. Pro konkrétního pojištěného známe hodnoty $x_1 = 0$ a $x_2 = 1$. 1. Popište model matematicky. 2. Najděte prediktivní rozdělení a aposteriorní rozdělení pro θ. 3. Určete Bayesovské pojistné.

Určete Bayesovské pojistné.

Příklad: Počet pojistných nároků se řídí exponenciálním rozdělením se střední hodnotou $1/\Theta$. Uvnitř tarifní třídy pojištěných má parametr Θ gama rozdělení s parametrem $n = 4$ a parametrem $\lambda = 1000$. Předpokládejme osobu se škodami 100, 950, 450. 1. Popište model matematicky. 2. Najděte prediktivní rozdělení a aposteriorní rozdělení pro θ. 3. Určete Bayesovské pojistné. víme-li, že

$$\pi(\theta|100, 950, 450) = \frac{\theta^6 \, \mathrm{e}^{-2500\theta} 2500^7}{\Gamma(7)}$$