Optimální teorie kredibility: Kredibilitní pojistné

4. ledna 2021

- na minulé přednášce jsme došli k závěru, že by bylo pro pojistitele ideální účtovat klientovi individuální pojistné

$$\mu_{n+1}(\theta) = \mathsf{E}(X_{n+1}|\Theta = \theta) = \int_0^\infty x_{n+1} \cdot f_{X_{n+1}|\Theta}(x_{n+1}|\theta)\mathrm{d}x_{n+1}$$

- parametr θ ale bohužel neznáme, proto se Bayesovské pojistné

$$B(\boldsymbol{X}) = \mathsf{E}(X_{n+1}|\boldsymbol{X}) = \mathsf{E}\big(\mu_{n+1}(\Theta)|\boldsymbol{X}\big)$$

kde $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$, zdá jako jeho správná alternativa

- v praxi však může být kalkulace Bayesovského pojistného náročná – mnohdy se setkáme s numerickým integrováním
- v roce 1967 navrhl Bühlmann alternativu k výše uvedeným přístupům výpočtu pojistného – ***kredibilitní pojistné***, jako zjednodušenou verzi bayesovského pojistného

Kredibilitní pojistné

- pro odhad ztrát v následujícím zkušenostním období chceme použít hypotetickou střední hodnotu $\mu_{n+1}(\theta)$
- provedeme její aproximaci pomocí lineární funkce historických dat daného pojištěnce

$$\alpha_0 + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \cdot X_j,$$

kde $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ musíme určit

- vyjdeme z definice Bayesovského pojistného – parametry $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ zvolíme tak, abychom minimalizovali střední kvadratickou chybu

$$Q = \mathsf{E}\left[\left(\mu_{n+1}(\Theta) - \alpha_0 - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \cdot X_j\right)^2\right]$$

- k minimalizaci Q položíme parciální derivace rovny nule

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha_0} = 0$$

$$\mathrm{E}\left[2 \cdot \left(\mu_{n+1}(\Theta) - \alpha_0 - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \cdot X_j\right) \cdot (-1)\right] = 0$$

$$\mathrm{E}\left[\mu_{n+1}(\Theta)\right] - \alpha_0 - \mathrm{E}\left[\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \cdot X_j\right] = 0$$

$$\mathrm{E}\left[\mu_{n+1}(\Theta)\right] = \tilde{\alpha}_0 + \sum_{j=1}^{n} \tilde{\alpha}_j \cdot \mathrm{E}(X_j)$$

$\tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_n$ jsou hodnoty $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ minimalizující Q

- máme $\mathrm{E}(X_{n+1}) = \mathrm{E}\left[\mathrm{E}(X_{n+1}|\Theta)\right] = \mathrm{E}\left[\mu_{n+1}(\Theta)\right]$, tedy

$$\mathrm{E}(X_{n+1}) = \tilde{\alpha}_0 + \sum_{j=1}^{n} \tilde{\alpha}_j \cdot \mathrm{E}(X_j) \tag{1}$$

- analogicky pro $\alpha_i, i = 1, 2, \ldots, n$, máme

$$\frac{\partial Q}{\partial \alpha_i} = 0$$

$$\mathsf{E}\left[2 \cdot \left(\mu_{n+1}(\Theta) - \alpha_0 - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j X_j\right) \cdot (-X_i)\right] = 0$$

$$\mathsf{E}\big[\mu_{n+1}(\Theta) \cdot X_i\big] - \mathsf{E}(\alpha_0 X_i) - \mathsf{E}\left[X_i \sum_{j=1}^{n} \alpha_j X_j\right] = 0$$

$$\mathsf{E}\big[\mu_{n+1}(\Theta) \cdot X_i\big] = \tilde{\alpha}_0 \mathsf{E}(X_i) + \sum_{j=1}^{n} \tilde{\alpha}_j \mathsf{E}(X_j X_i)$$

- využitím vlastností střední hodnoty a nezávislosti mezi $X_i, i = 0, 1, \ldots, n$, a X_{n+1} při podmínění Θ lze psát

$$\mathsf{E}\left[\mu_{n+1}(\Theta) \cdot X_i\right] = \mathsf{E}\left[\mathsf{E}\left(X_i \cdot \mu_{n+1}(\Theta)|\Theta\right)\right] =$$

$$= \mathsf{E}\left[\mu_{n+1}(\Theta) \cdot \mathsf{E}(X_i|\Theta)\right] =$$

$$= \mathsf{E}\big[\mathsf{E}(X_{n+1}|\Theta)\cdot\mathsf{E}(X_i|\Theta)\big] =$$

$$= \mathsf{E}\big[\mathsf{E}(X_{n+1}X_i|\Theta)\big] =$$

$$= \mathsf{E}(X_{n+1}X_i)$$

- odtud

$$\mathsf{E}(X_iX_{n+1}) = \tilde{\alpha}_0\mathsf{E}(X_i) + \sum_{j=1}^{n}\tilde{\alpha}_j\mathsf{E}(X_jX_i) \tag{2}$$

- vynásobením (1) střední hodnotou $\mathrm{E}(X_i)$ a odečtením od (2) obdržíme

$$\mathrm{E}(X_i X_{n+1}) - \mathrm{E}(X_{n+1}) \cdot \mathrm{E}(X_i) = \sum_{j=1}^{n} \tilde{\alpha}_j \mathrm{E}(X_j X_i) - \sum_{j=1}^{n} \tilde{\alpha}_j \mathrm{E}(X_j) \cdot \mathrm{E}(X_i)$$

$$\mathrm{E}(X_i X_{n+1}) - \mathrm{E}(X_{n+1}) \cdot \mathrm{E}(X_i) = \sum_{j=1}^{n} \tilde{\alpha}_j \cdot \left[\mathrm{E}(X_j X_i) - \mathrm{E}(X_j)\mathrm{E}(X_i)\right]$$

$$\mathrm{Cov}(X_i, X_{n+1}) = \sum_{j=1}^{n} \tilde{\alpha}_j \mathrm{Cov}(X_i, X_j), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

- rovnice (1) a n rovnic (3) dohromady tvoří $n+1$ ***normálních rovnic***, jejich řešením získáme $\tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_n$, a tedy i ***kredibilitní pojistné***

$$\mathrm{C}(X_1, X_2, \dots, X_n) = \tilde{\alpha}_0 + \sum_{j=1}^{n} \tilde{\alpha}_j X_j$$

Definice: Nechť náhodné veličiny $X_1, X_2, \ldots, X_n$ značí zkušenosti pojištěnce v n zkušenostních obdobích. Potom je kredibilitní pojistné $\mathrm{C}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ lineární funkcí $X_1, X_2, \ldots, X_n$, tj.

$$\mathrm{C}(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \tilde{\alpha}_0 + \sum_{j=1}^{n} \tilde{\alpha}_j X_j, \tag{4}$$

kde $\tilde{\alpha}_j, j = 1, 2, \ldots, n$, minimalizují střední kvadratickou chybu

$$Q = \mathrm{E}\left[\left(\mu_{n+1}(\Theta) - \alpha_0 - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \cdot X_j\right)^2\right]. \tag{5}$$

Bühlmannův model

- Bühlmannův model je nejjednodušší kredibilitní model
- předpoklady:
  - náhodné veličiny $X_1, X_2, \ldots, X_n$ při podmínění Θ jsou IID
- můžeme tedy definovat
  (i) ***hypotetickou střední hodnotu***

$$\mu(\theta) = \mathsf{E}(X_j | \Theta = \theta),$$

  (ii) ***procesní rozptyl***

$$\nu(\theta) = \mathsf{Var}(X_j | \Theta = \theta)$$

- dále si nadefinujme

(i) *očekávanou hodnotu hypotetických středních hodnot*

$$\mu = \mathsf{E}[\mu(\Theta)]$$

(ii) *očekávanou hodnotu procesního rozptylu*

$$\nu = \mathsf{E}[\nu(\Theta)]$$

(iii) *rozptyl hypotetických středních hodnot*

$$\eta = \mathsf{Var}[\mu(\Theta)]$$

- pro X_j můžeme vyjádřit

$$\mathsf{E}(X_j) = \mathsf{E}\big[\mathsf{E}(X_j|\Theta)\big] = \mathsf{E}[\mu(\Theta)] = \mu,$$

$$\mathsf{Var}(X_j) = \mathsf{E}\big[\mathsf{Var}(X_j|\Theta)\big] + \mathsf{Var}\big[\mathsf{E}(X_j|\Theta)\big] =$$

$$= \mathsf{E}(\nu(\Theta)) + \mathsf{Var}(\mu(\Theta)) = \nu + \eta$$

pro $i \neq j$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X_i, X_j) &= \mathrm{E}(X_i X_j) - \underbrace{\mathrm{E}(X_i) \cdot \mathrm{E}(X_j)}_{=\mu^2} = \\
&= \mathrm{E}\big[\mathrm{E}(X_i X_j|\Theta)\big] - \mu^2 = \\
&= \mathrm{E}\big[\underbrace{\mathrm{E}(X_i|\Theta)}_{=\mu(\Theta)} \cdot \mathrm{E}(X_j|\Theta)\big] - \big(\mathrm{E}[\mu(\Theta)]\big)^2 = \\
&= \mathrm{E}\big(\big[\mu(\Theta)\big]^2\big) - \big(\mathrm{E}[\mu(\Theta)]\big)^2 = \mathrm{Var}(\mu(\Theta)) = \eta
\end{aligned}$$

- dosazením výše uvedených výsledků do normálních rovnic, tj. do (1) a (3), získáme hodnoty parametrů $\tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_n$, které minimalizují Q v (5)
- bude platit

$$\tilde{\alpha}_0 = \frac{\nu\mu}{\nu + n\eta} \tag{6}$$

$$\tilde{\alpha}_j = \frac{\eta}{\nu + n\eta} \quad \text{pro } j = 1, 2, \ldots, n \tag{7}$$

- kredibilitní pojistné bude ve tvaru

$$
\begin{aligned}
C_B(X_1, X_2, \ldots, X_n) &= \tilde{\alpha}_0 + \sum_{j=1}^{n} \tilde{\alpha}_j X_j = \\
&= \frac{\nu\mu}{\nu + n\eta} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\eta}{\nu + n\eta} \cdot X_j = \\
&= \frac{\nu\mu}{\nu + n\eta} + \frac{n\eta}{\nu + n\eta} \cdot \overline{X}
\end{aligned}
\tag{8}
$$

- položíme-li

$$k = \frac{\nu}{\eta} \tag{9}$$

$$Z = \frac{n}{n+k} \tag{10}$$

a dosadíme-li do předchozí rovnice (8), obdržíme kredibilitní pojistné ve tvaru $C_B(X_1, X_2, \ldots, X_n) = Z\overline{X} + (1 - Z)\mu$

- kredibilitní pojistné ve tvaru

$$C_B(X_1, X_2, \ldots, X_n) = Z\overline{X} + (1 - Z)\mu \tag{11}$$

je váženým průměrem apriorní hodnoty μ a zkušenosti klienta, kterou vyjadřuje $\overline{X}$.

- kredibilitní faktor $Z = \frac{n}{n+k}$ s volbou $k = \frac{\nu}{\eta}$ nazýváme

Bühlmannův kredibilitní faktor