Čítací procesy

$\{N_t, t \geq 0\}$ ... stochastický proces

– pro každé pevné t je N_t náhodná veličina

t ... čas

– příklady: Náhodná procházka, Wienerův proces, Poissonův proces

– $N_s - N_t$ .... přírůstek procesu za čas od t do s $(s > t)$.

– stacionární přírůstky ... rozdělení závisí jen na rozdílu $s - t$.

– nezávislé přírůstky ... přes disjunktní časového intervaly.

Závislé přírůstky ... znalost počtu nehod tento rok ovlivní rozdělení počtu nehod příští rok

Definice:

Čítací proces je stochastický proces s hodnotami v $\{0, 1, 2, \dots\}$ kdy pro $t > s$ platí $N_s \geq N_t$.

– navíc se obvykle předpokládá $N(0) = 0$.

– Zajímá nás marginální rozdělení N_t pro konkrétní t

– sdružené rozdělení $(N_{t_1}, \ldots, N_{t_k})$ pro různá t_j i hodnoty k.

– Hodnoty N_{t_j} jsou závislé (z podmínky růstu)

Příklad: N_t ... počet nehod řidiče do času t (v letech).

$N_3 - N_2$ ... počet nehod řidiče ve 3.roce

Procesy s nezávislými přírůstky

– předpokládejme, že přírůstky procesu přes disjunktní intervaly jsou nezávislé.

– následující věta říká, že jediný takový proces - až na transformaci času - je Poissonův proces.

Věta: Nechť X_t je čítací proces s nezávislými přírůstky. Nechť $E(X_t) = m(t)$ je spojitá rostoucí funkce času t a $m(0) = 0$. Pak $m(t)$ lze zavést jako novou časovou proměnnou vztahem

$$\tilde{X}_\tau = X_{m^{-1}(\tau)}$$

tak, že $\tilde{X}$ má stacionární nezávislé přírůstky a $\tilde{X}(\tau)$ má Poissonovo rozdělení s parametrem τ.

– $\tau = m(t)$ se nazývá operační čas.

– namísto roků (hodin ...) měří čas v očekávaném počtu nároků (událostí).

– velmi silná vlastnost, až na změnu času jen Poissonův proces

Markovské procesy

Dále budeme uvažovat podstatně slabší vlastnost.

Uvažujme stochastický proces $X(t),\ t \geq 0$ ve spojitém čase, který nabývá hodnoty v nezáporných celých číslech.

Definice: Proces $X(t),\ t \geq 0$ je Markovský řetězec ve spojitém čase, jestliže pro všechna $s, t \geq 0$ a nezáporná celá čísla $i, j, x(u)$ platí Markovská vlastnost

$$P(X(t+s) = j | X(s) = i, X(u) = x(u), 0 \leq u < s)$$

$$= P(X(t+s) = j | X(s) = i).$$

– Obecně nemusí jít o čítací proces

Markovovská vlastnost tedy říká, analogicky jako v diskrétním případě, že pravděpodobnostní rozdělení budoucích stavů, podmíněné současným a všemi minulými stavy, závisí jen na současném stavu a je nezávislé na minulosti.

Příklad: N_t ... počet nehod do času t

Počet nehod v intervalu (s, t), tedy $N_s - N_t$ závisí na počtu nehod do času s, tedy N_s, ale ne na jejich přesném časovém průběhu.

Markovský proces nemá paměť, ale "ví kde je", na rozdíl od procesu s nezávislými přírůstky.

Hlavní charakteristika Markovského čítacího procesu jsou přechodové pravděpodobnosti

$$p_{k,k+n}(s,t) = P(N_t - N_s = n | N_s = k) = P(N_t = k+n | N_s = k).$$

kde $0 \le s \le t,\ k, n = 0, 1, \dots$.

Pokud tyto pravděpodobnosti závisí jen na rozdílu $t - s$, pak se proces nazývá homogenní

– Stacionarita se týká nepodmíněných pravděpodobností pro přírůstky

– Homogenita se týká podmíněných pravděpodobností

Marginální pst. funkce pro N_t je

$$p_n(t) = p_{0,t}(0, t) = P(N_t = n), \quad n = 0, 1, \dots$$

Marginální pst. funkci pro přírůstek $N_t - N_s$ dostaneme ze zákona o celkové pravděpodobnosti

$$P(N_t - N_s = n) = \sum_{k=0}^{\infty} P(N_t - N_s = n | N_s = k) P(N_s = k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} p_{k,k+n}(s, t) p_k(s)$$

Definice: *Poissonův proces* s intenzitou $\lambda > 0$ je proces $N = \{N(t) : t \geq 0\}$ nabývající hodnoty v $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ takový, že

– $N(0) = 0$ a pro $s < t$ je $N(s) \leq N(t)$.

–

$$\mathrm{P}(N(t+h) = k+n | N(t) = k) = \begin{cases} \lambda h + o(h) & \text{pro } n = 1 \\ o(h) & \text{pro } n > 1 \, . \\ 1 - \lambda h + o(h) & \text{pro } n = 0 \end{cases}$$

– Je-li $s < t$, pak počet $N(t) - N(s)$ událostí v intervalech $[s, t]$ je nezávislý na $N(s)$, t.j. počtu událostí v $[0, s]$.

– $N(t) \dots$ počet příchodů, událostí, emisí do času t.

– N je čítací proces.

– λ je intenzita procesu

Zajímá nás rozložení $N(t)$.

Věta: $N(t)$ má Poissonovo rozdělení s parametrem λt, tedy

$$\mathrm{P}(N(t) = j) = \frac{(\lambda t)^j}{j!}\,\mathrm{e}^{-\lambda t}, \qquad j = 0, 1, 2, \ldots$$

Obecně, λ necháme záviset jak na čase t, tak na současném stavu procesu k.

Definice: *Proces čistého zrodu* je proces $N = \{N(t) : t \geq 0\}$ nabývající hodnoty v $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ takový, že

– $N(0) = 0$ a pro $s < t$ je $N(s) \leq N(t)$.

– $\mathrm{P}(N(t+h) = k + n | N(t) = k) =$

$$\begin{cases} \lambda_n(t)h + o(h) & \text{pro } n = 1 \\ o(h) & \text{pro } n > 1\,. \\ 1 - \lambda_n(t)h + o(h) & \text{pro } n = 0 \end{cases}$$

Obecně, proces zrodu a zániku uvažuje i situaci kdy hodnota N_t klesne o 1 (populační biologie)

$\lambda_k(t)$ je funkce intenzity přechodu

Je-li λ_k nezávislé na t, pak je proces homogenní.

Pokud intenzity přechodu závisí na t a nezávisí na k, pak má proces nezávislé přírůstky, ale ne stacionární.

Obecně je tedy

$$p_{k,k+1}(t, t+h) = \lambda_k(t)h + o(h)$$

a

$$p_{k,k}(t, t+h) = 1 - \lambda_k(t)h + o(h)$$

Odvodíme diferenciální rovnice pro $p_{k,k+n}$.

Chapman-Kolmogorovovy rovnice

Podle věty o celkové pravděpodobnosti, podmíněním hodnotou v t dostaneme

$$p_{k,k+n}(s,t+h) = \sum_{j=0}^{n} p_{k,k+j}(s,t)p_{k+j,k+n}(t,t+h),$$

kde druhý člen je $o(h)$, kromě $j = n-1$ a $j = n$. Tedy

$$p_{k,k+n}(s,t+h) = p_{k,k+n-1}(s,t)\lambda_{k+n-1}(t)h + p_{k,k+n}(s,t)(1-\lambda_{k+n}(t)h)$$

odečteme $p_{k,k+n}$, vydělíme h a vezmeme limitu $h \to 0$.

Tak dostaneme

$$\frac{\partial}{\partial t} p_{k,k+n}(s,t) = p_{k,k+n-1}(s,t)\lambda_{k+n-1}(t) - p_{k,k+n}(s,t)\lambda_{k+n}(t)h.$$

Tento systém ODR vyřešíme rekurentně

Řešením dostaneme následující rekurentní vztahy.

Věta: Přechodové pravděpodobnosti jsou dány rekurentně vztahy

$$p_{k,k}(s,t) = \exp\left(-\int_s^t \lambda_k(x)dx\right)$$

a pro $n = 1, 2, \ldots$

$$p_{k,k+n}(s,t) = \int_s^t \lambda_{k+n-1}(y) p_{k,k+n-1}(s,y) \exp\left[-\int_y^t \lambda_{k+n}(x)dx\right] dy$$

Důkaz - metoda integračního faktoru pro řešení lineárních dif. rovnic (d.ú.).

Je-li $\lambda_k(t) \equiv \lambda$ dostaneme standardní Poissonův proces, kde

$$p_{k,k+n}(s,t) = \frac{[\lambda(t-s)]^n e^{-\lambda(t-s)}}{n!}.$$

Speciálně pro $s = 0$ a $k = 0$

$$P(N_t = n) = \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}$$

Tedy $N_t \sim Po(\lambda t)$

Má stacionární a nezávislé přírůstky, t.j. $N_t - N_s \sim N_{t-s}$ závisí jen na $t - s$.

Procesy s nákazou

– contagion

Nechť
$$\lambda_k(t) = a + bk, \qquad k = 0, 1, \ldots$$

– Proces s lineární nákazou

$b > 0$... kladná nákaza, $b < 0$... záporná nákaza

$b = 0$ ... Poissonův proces

Věta: Je-li $\lambda_k(t) = a + bk \geq 0$ a $b \neq 0$, pak přechodové pravděpodobnosti lze zapsat ve tvaru

$$p_{k,k+n}(s,t) = \binom{\frac{a}{b} + k + n - 1}{n} e^{-(a+kb)(t-s)}[1 - e^{-b(t-s)}]^n$$

Z předchozí věty máme pro $n = 0$

$$p_{k,k}(s,t) = \exp(-\int_s^t (a + kb)dx) = e^{-(a+kb)(t-s)}$$

Tedy vztah platí pro $n = 0$. Dále použijeme indukci (viz Klugman).

Lemma: Pro $b > 0$ (kladná nákaza) a pevné k mají přechodové pravděpodobnosti NB rozdělení.

Důkaz: podle předchozího vztahu máme

$$p_{k,k+n}(s,t) = \binom{\frac{a}{b}+k+n-1}{n} (e^{-b(t-s)})^{\frac{a}{b}+k} [1-e^{-b(t-s)}]^n$$

pro $n = 0, 1, 2, \ldots,$ což je NB rozdělení jako funkce n s parametry $r = \frac{a}{b} + k$ a $p = 1 - e^{-b(t-s)}$

Příklad: nehoda —> tendence k další nehodě se zvýší ("nervozita").

Naopak, při negativní nákaze se pst. další nehody zmenší (řidič si dává větší pozor).

Lemma: Pro $b < 0$ (záporná nákaza) a pevné k mají přechodové pravděpodobnosti Bi rozdělení.

Důkaz: Klugman

$\lambda_k(t)$ nemohou být záporné

$ak + b$ se musí trefit do nuly, tedy $aM + b = 0$ pro nějaké přirozené M.

Pak $\lambda_M(t) = 0$ a tedy nemůže být více než celkem M nároků.

– jako rozdělení procesu s nákazou jsme přirozeně dostali všechna rozdělení třídy $(a, b, 0)$.