3 Dvoufaktorová analýza rozptylu (ANOVA)

Příklad 1. Datový soubor newborns.txt obsahuje porodní hmotnost novorozenců v gramech (proměnná weight.C), jejich pohlaví (proměnná sex.C) a vzdělání matky (proměnná edu.M). Budeme se zabývat studiem závislosti porodní hmotnosti dítěte na jeho pohlaví a vzdělání jeho matky. Kódování proměnné edu.M: 1 - základní, 2 - střední bez maturity, 3 - střední s maturitou, 4 - vysokoškolské.

Načteme data a podíváme se na ně. Soubor obsahuje pozorování s chybějícími hodnotami, ty v analýze použít nemůžete, proto odpovídající řádky vyřadíme pomocí funkce na.omit(). Vidíme, že proměnnou edu.M R načetlo jako numerickou, my ji potřebujeme kategoriální, ke změně použijeme funkci factor(), kde nastavíme odpovídající názvy kategorií.

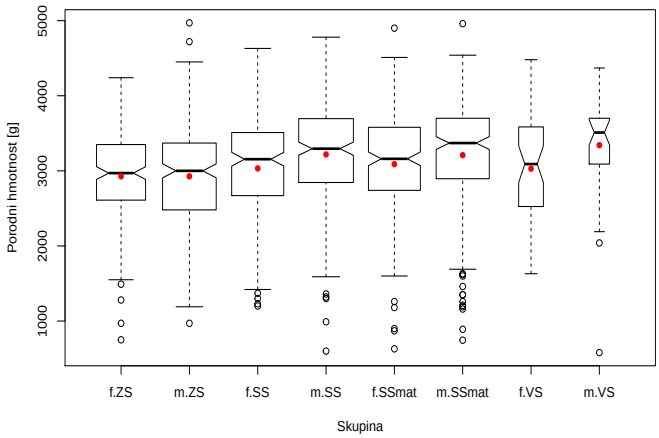
```
data <- read.table('DATA/newborns.txt', header=TRUE)
summary(data)

##      edu.M       sex.C      weight.C
##  Min.   :1.000   f:674   Min.   : 580
##  1st Qu.:1.000   m:729   1st Qu.:2670
##  Median :2.000           Median :3170
##  Mean   :2.129           Mean   :3072
##  3rd Qu.:3.000           3rd Qu.:3560
##  Max.   :4.000           Max.   :4970
##  NA's   :13              NA's   :6

data <- na.omit(data)
data$edu.M <- factor(data$edu.M, labels=c('ZS', 'SS', 'SSmat', 'VS'))
```

Podíváme se, kolik pozorování máme pro jednotlivé kombinace faktorů.

```
table(data$sex.C, data$edu.M)

##
##      ZS  SS SSmat  VS
##   f 190 214   213  48
##   m 227 236   223  33
```

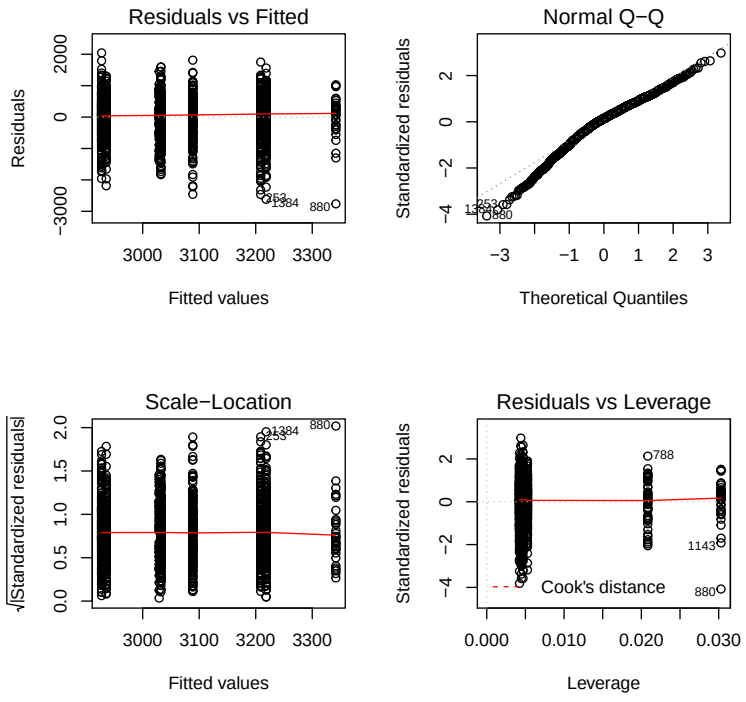
Abychom se lépe seznámili s daty, vykreslíme si krabicové diagramy porodní hmotnosti podle pohlaví dítěte a vzdělání matky. Do grafů zakreslíme červenými body i průměry jednotlivých skupin.

```
boxplot(data$weight.C ~ data$sex.C + data$edu.M, varwidth=T, notch=T,
        xlab='Skupina', ylab='Porodni hmotnost [g]')
mm1 <- mean(data[data$edu.M=='ZS' & data$sex=='f','weight.C'])
mm2 <- mean(data[data$edu.M=='ZS' & data$sex=='m','weight.C'])
mm3 <- mean(data[data$edu.M=='SS' & data$sex=='f','weight.C'])
mm4 <- mean(data[data$edu.M=='SS' & data$sex=='m','weight.C'])
mm5 <- mean(data[data$edu.M=='SSmat' & data$sex=='f','weight.C'])
mm6 <- mean(data[data$edu.M=='SSmat' & data$sex=='m','weight.C'])
mm7 <- mean(data[data$edu.M=='VS' & data$sex=='f','weight.C'])
mm8 <- mean(data[data$edu.M=='VS' & data$sex=='m','weight.C'])
points(1:8, c(mm2,mm2,mm3,mm4,mm5,mm6,mm7,mm8), col='red', pch=16)
```



Předpoklady modelu ověříme pomocí analýzy reziduí. To znamená, že nejprve sestavíme úplný model - s oběma faktory i interakcí. Pomocí funkce plot() použité na sestavený model si zobrazíme diagnostické grafy. První graf ukazuje, zda je model lineární závislosti vhodný (= zobrazená červená křivka je vodorovná kolekm 0, pokud bykřivka vypadala jinak, značí to, že lineární model není vhodný). Druhý je kvantil-kvantilový graf, pomocí nějž ověřujeme normalitu dat. Třetí graf slouží k ověření předpokladu rovnosti rozptylů: pokud je zobrazená křivka horizontální, svědčí to o homogenitě rozptylů, pokud křivka není horizontální, svědčí to o heterogenitě rozptylů. Čtvrtý graf slouží k detekci vlivných pozorování.

```
model.newborns <- aov(weight.C ~ sex.C*edu.M, data=data)
par(mfrow=c(2,2)) #nastavi zobrazeni 4 grafu najednou (na 2 radky a 2 sloupce)
plot(model.newborns)
```



Pro ověření předpokladu normality ještě aplikujeme Shapirův-Wilkův test na rezidua.

```
shapiro.test(model.newborns$residuals)

##
##  Shapiro-Wilk normality test
##
## data:  model.newborns$residuals
## W = 0.97313, p-value = 2.201e-15
```

Shapirův-Wilkův test hypotézu o normalitě dat ....., protože p-hodnota je ....., máme ale velké množství pozorování a žádná vlivná pozorování, na základě centrální limitní věty budeme ..... . Předpoklad rovnosti rozptylů je na základě grafického zhodnocení 3. grafu (Scale-Location) ..... . Budeme tedy předpoklady považovat za splněné.

Interpretujte koeficienty sestaveného modelu.

```
model.newborns$coefficients

##       (Intercept)             sex.Cm           edu.MSS        edu.MSSmat
##       2935.473684          -8.204962         96.816035        153.164813
##           edu.MVS    sex.Cm:edu.MSS sex.Cm:edu.MSSmat    sex.Cm:edu.MVS
##         93.692982        194.347446        128.288437        320.856477
```

- (Intercept)
- sex.Cm
- edu.MSS
- edu.MSSmat
- edu.MVS
- sex.Cm:edu.MSS
- sex.Cm:edu.MSSmat
- sex.Cm:edu.MVS

ANOVA tabulku vypíšeme pomocí funkce anova().

```
anova(model.newborns)

## Analysis of Variance Table
##
## Response: weight.C
##               Df    Sum Sq Mean Sq F value    Pr(>F)
## sex.C          1   3933723 3933723  8.3039  0.004017 **
## edu.M          3  13526215 4508738  9.5178 3.186e-06 ***
## sex.C:edu.M    3   2904470  968157  2.0437  0.105923
## Residuals   1376 651834735  473717
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Testování hypotézy o interakci:

- H_0 : .....
- H_1 : .....
- součet čtverců pro interakce: .....
- stupně volnosti pro interakce: .....
- hodnota testovací statistiky .....
- p-hodnota .....
- závěr .....

Testování hypotézy o faktoru B:

- H_0 : .....
- H_1 : .....
- součet čtverců pro faktor B: .....
- stupně volnosti pro faktor B: .....
- hodnota testovací statistiky .....
- p-hodnota .....
- závěr .....

Testování hypotézy o faktoru A:

- H_0 : .....
- H_1 : .....
- součet čtverců pro faktor A: .....
- stupně volnosti pro faktor A: .....
- hodnota testovací statistiky .....
- p-hodnota .....
- závěr .....

Jednotlivé hypotézy můžeme testovat i pomocí kritického oboru. Vypočítáme si tedy odpovídající kvantily.

```
# pro interakci
qf(0.95, 3, 1376)

## [1] 2.61137

# pro faktor B
qf(0.95, 3, 1376)

## [1] 2.61137

# pro faktor A
qf(0.95, 1, 1376)

## [1] 3.848226
```

Testování hypotézy o interakci:

- hodnota testovací statistiky .....
- kritický obor .....
- závěr .....

Testování hypotézy o faktoru B:

- hodnota testovací statistiky .....
- kritický obor .....
- závěr .....

Testování hypotézy o faktoru A:

- hodnota testovací statistiky .....
- kritický obor .....
- závěr .....

Protože jsme zjistili rozdíly mezi úrovněmi faktorů A i B, přistoupíme k mnohonásobnému porovnávání. Nejprve pomocí Tukeyho metody.

```
TukeyHSD(model.newborns, which=c('sex.C','edu.M'))

##   Tukey multiple comparisons of means
##     95% family-wise confidence level
##
## Fit: aov(formula = weight.C ~ sex.C * edu.M, data = data)
##
## $sex.C
##         diff     lwr      upr     p adj
## m-f 106.7074 34.0663 179.3486 0.0040173
##
## $edu.M
##                diff        lwr      upr     p adj
## SS-ZS    201.02954   80.69368 321.3654 0.0001090
## SSmat-ZS 222.56046  101.29893 343.8220 0.0000154
## VS-ZS    240.15036   25.18725 455.1135 0.0214337
## SSmat-SS  21.53092  -97.43625 140.4981 0.9665581
## VS-SS     39.12082 -174.55643 252.7981 0.9654441
## VS-SSmat  17.58990 -196.61002 231.7898 0.9966695
```

Tukeyho metoda ..... hypotézu o rovnosti středních hodnot pro chlapce a dětčata. U proměnné vzdělání matky se podle Tukeyho metody liší na hladině významnosti $\alpha = 0.05$ dvojice .....
Hypotézy otestujeme i pomocí Scheffého metody. Ta pro faktor A zamítne hypotézu $\alpha_i = \alpha_t$, když

$$|M_{i..} - M_{t..}| > \sqrt{(a-1)\left(\frac{1}{n_{i.}} + \frac{1}{n_{t.}}\right)\frac{S_E}{n-ab}F_{1-\alpha}(a-1, n-ab)}$$

a pro faktor B zamítne hypotézu $\beta_j = \beta_u$, když

$$|M_{.j.} - M_{.u.}| > \sqrt{(b-1)\left(\frac{1}{n_{.j}} + \frac{1}{n_{.u}}\right)\frac{S_E}{n-ab}F_{1-\alpha}(b-1, n-ab)}$$

Scheffého metoda není v R implementovaná, vypočítáme ji ručne. Nejprve si uložíme všechny potřebné členy. Hodnotu zlomku $\frac{S_E}{n-ab}$ získáme z ANOVA tabulky modelu.

```
a <- 2
b <- 4
n <- nrow(data)
m.boys <- mean(data[data$sex.C =='m','weight.C'])
m.girls <- mean(data[data$sex.C =='f','weight.C'])
n.sex <- as.numeric(table(data$sex.C))

m.zs <- mean(data[data$edu.M =='ZS','weight.C'])
m.ss <- mean(data[data$edu.M =='SS','weight.C'])
m.ssmat <- mean(data[data$edu.M =='SSmat','weight.C'])
m.vs <- mean(data[data$edu.M =='VS','weight.C'])
n.edu <- as.numeric(table(data$edu.M))

res.mean.sq <- anova(model.newborns)['Residuals','Mean Sq']
```

Pro každou dvojici si nejprve vypočítáme levou stranu vztahu a pravou stranu vztahu.

```
# chlapci-devcata
abs(m.boys - m.girls)

## [1] 106.7074

sqrt((a-1) * (1/n.sex[1] + 1/n.sex[2]) * res.mean.sq * qf(0.95, a-1, n-a*b))

## [1] 72.64113
```

```
# ZS-SS
abs(m.zs - m.ss)

## [1] 198.9039

sqrt((b-1) * (1/n.edu[1] + 1/n.edu[2]) * res.mean.sq * qf(0.95, b-1, n-a*b))

## [1] 130.9452

# ZS-SSmat
abs(m.zs - m.ssmat)

## [1] 219.0501

sqrt((b-1) * (1/n.edu[1] + 1/n.edu[3]) * res.mean.sq * qf(0.95, b-1, n-a*b))

## [1] 131.9525

# ZS-VS
abs(m.zs - m.vs)

## [1] 225.536

sqrt((b-1) * (1/n.edu[1] + 1/n.edu[4]) * res.mean.sq * qf(0.95, b-1, n-a*b))

## [1] 233.9152
```

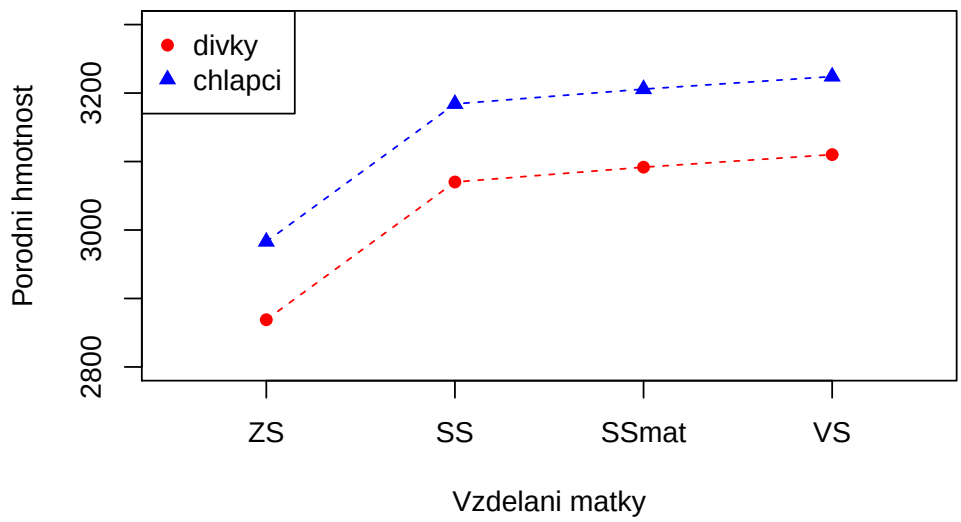
```r
# SS-SSmat
abs(m.ss - m.ssmat)

## [1] 20.14623

sqrt((b-1) * (1/n.edu[2] + 1/n.edu[3]) * res.mean.sq * qf(0.95, b-1, n-a*b))

## [1] 129.4559

# SS-VS
abs(m.ss - m.vs)

## [1] 26.6321

sqrt((b-1) * (1/n.edu[2] + 1/n.edu[4]) * res.mean.sq * qf(0.95, b-1, n-a*b))

## [1] 232.516

# SSmat-VS
abs(m.ssmat - m.vs)

## [1] 6.48587

sqrt((b-1) * (1/n.edu[3] + 1/n.edu[4]) * res.mean.sq * qf(0.95, b-1, n-a*b))

## [1] 233.0847
```

Scheffého metoda ..... hypotézu o rovnosti středních hodnot pro chlapce a dětčata. U proměnné vzdělání matky se podle Scheffého metody liší na hladině významnosti $\alpha = 0.05$ dvojice .....

(Pozn. Protože proměnná pohlaví má jen dvě kategorie, není pro ni nutné *post-hoc* testy provádět. Z testování modelu vyšel tento faktor jako významný, tudíž víme, že se chlapci a děvčata liší.)

Nakonec si výsledný model graficky zobrazíme.

```r
coefs <- aov(weight.C ~ sex.C + edu.M, data=data)$coefficients
girls <- coefs[1] + c(0, coefs[3], coefs[4], coefs[5])
boys <- coefs[2] + girls
boxplot(data$weight.C~data$edu.M, ylim=c(2800, 3300), border='white',
        xlab='Vzdelani matky', ylab='Porodni hmotnost')
points(1:4,girls, col='red', pch=16)
lines(1:4,girls, col='red', lty=2)
points(1:4, boys, col='blue', pch=17)
lines(1:4, boys, col='blue', lty=2)
legend('topleft', legend=c('divky', 'chlapci'), col=c('red', 'blue'), pch=c(16,17))
```


divky
chlapci
Porodni hmotnost
2800
3000
3200
ZS
SS
SSmat
VS
Vzdelani matky