Zkouška 2. termín – MIN201 – jaro 2021 – 30. 6. 2021

Veškeré odpovědi musí být zdůvodněny a výpočty musí být doprovozeny komentářem. (Řešení sestávající pouze z odpovědí budou považována za opsaná a hodnocena 0 body.)

1. (8 bodů) Vypočtěte uvedené integrály:

$$\int \left(\frac{x^2+3}{x^3+x^2+x} \right) dx \quad \text{a} \quad \int_0^{\pi/2} \sin^2(x)\cos(x)\,dx.$$

2. (4 body) Plošný útvar U se skládá z obdélníku, k jehož jedné straně je připojený půlkruh. Označme p a q délky stran obdélníka, přičemž půlkruh je polovina kruhu o průměru p (a je tedy připojen ke straně a délce p).

Určete p a q tak, aby U měl minimální obvod za předpokladu, že obsah U je roven $\frac{1}{2}\,\mathrm{m}^2$. (Připomeňme, že obsah kruhu o poloměru r je πr^2 a jeho obvod je $2\pi r$.)

3. (4 body) Uvažme plochu mezi grafem funkce $h(x) = x - 2$ a osou x na intervalu $x \in [0, 2]$. Rotací této plochy kolem osy x vznikne těleso T. Určete objem a povrch tohoto tělesa. (Připomeňme, že část povrchu je kruh.)

4. (4 body) Určete konvoluci funkcí $f_1 * f_2$, kde

$$f_1(x) = e^{-|x|} \quad \text{a} \quad f_2(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \geq 0 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Řešení a bodování:

1. **[8 bodů]** Rozklad na parciální zlomky dává

$$\frac{x^2+3}{x(x^2+x+1)} = \frac{-2x-3}{x^2+x+1} + \frac{3}{x},$$

tedy

$$\int \frac{x^2+3}{x(x^2+x+1)}\,dx = \int \Big(\frac{-2x-3}{x^2+x+1} + \frac{3}{x}\Big)dx = -\ln(x^2+x+1) - \tfrac{4}{3}\sqrt{3}\arctan\big(\tfrac{2}{\sqrt{3}}(x+\tfrac{1}{2})\big) + 3\ln|x| + C$$

pro $C \in \mathbb{R}$. Dále použitím substituce $t = \sin x$, $dt = \cos x\,dx$ dostaneme

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2(x)\cos(x)\,dx = \int_0^1 t^2\,dt = \tfrac{1}{3}.$$

2. **[4 body]** Obsah útvaru U je $S = pq + \frac{1}{2}\pi(p/2)^2$, tj. $q = \frac{1}{p}[S - \frac{1}{2}\pi(p/2)^2]$. Obvod je tedy

$$o = p + 2q + \pi\tfrac{p}{2} = p + \tfrac{2}{p}[S - \frac{1}{2}\pi(p/2)^2] + \pi\tfrac{p}{2} = \tfrac{2S}{p} + \tfrac{\pi p}{4} + p.$$

Hledáme minimum funkce $o(p)$. Jelikož $o'(p) = -\frac{2S}{p^2} + \frac{\pi}{4} + 1 = 0$, dostáváme pro $S = \frac{1}{2}$ stacionární bod této funkce

$$p = \frac{2}{\sqrt{\pi+4}} \quad \text{a tedy} \quad q = \tfrac{\sqrt{\pi+4}}{2}[\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\tfrac{\pi}{\pi+4}].$$

Jelikož $o''(p) > 0$ pro každé kladné p, jedná se minimum (které je globální pro $p \in (0,\infty)$).

3. **[4 body]** Objem je

$$V = \pi\int_0^2 h^2(x)\,dx = \pi\int_0^2 (x-2)^2\,dx = \frac{8\pi}{3}$$

a obsah (zahrnující kruh o poloměru 2) je

$$S = 4\pi + 2\pi\int_0^2 (-h(x))\sqrt{1+(-h'(x))^2}\,dx = 4\pi + 2\pi\int_0^2 (2-x)\sqrt{2}\,dx = 4\pi + 4\sqrt{2}\pi.$$

4. **[4 body]** Platí $f_1 * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)f_2(t-x)dx$, tedy potřebujeme $t - x \geq 0$, tj. $x \leq t$. Tedy

$$f_1 * f_2(t) = \int_{-\infty}^{t} f_2(x)\,dx = \int_{-\infty}^{t} e^{-|x|}\,dx.$$

Tedy pro $t \leq 0$ máme

$$f_1 * f_2(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-|x|}\,dx = \int_{-\infty}^{t} e^{x}\,dx = e^t$$

a pro $t \geq 0$ dostaneme

$$f_1 * f_2(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-|x|}\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^{x}\,dx + \int_0^t e^{-x}\,dx = 2 - e^{-t}.$$