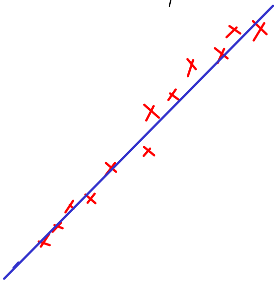
Aproximace pomocí MNČ

$x_0, \dots, x_n$ – uzly
$f_0, \dots, f_n$ – funkční hodnoty
$\Big\}$ DATA

Snažíme se data proložit funkcí určitého typu, např. polynom daného stupně $m < n$

Př



Hledáme přímku, která co nejlépe aproximuje data

↓

polynom 1. stupně

Aproximační funkce $\varphi(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \dots + c_m\varphi_m(x)$

např. $\varphi(x)$ - polynom $\Rightarrow$ $\varphi_2(x) = x^2$

Ideálně by mělo platit

$$\left.\begin{array}{llc} \varphi(x_0) = f_0 & \quad c_0\varphi_0(x_0) + c_1\varphi_1(x_0) + \dots + c_m\varphi_m(x_0) = f_0 \\ \varphi(x_1) = f_1 & \quad c_0\varphi_0(x_1) + c_1\varphi_1(x_1) + \dots + c_m\varphi_m(x_1) = f_1 \\ \vdots & \quad \vdots \\ \varphi(x_n) = f_n & \quad c_0\varphi_0(x_n) + c_1\varphi_1(x_n) + \dots + c_m\varphi_m(x_n) = f_n \end{array}\right\}$$

systém rovnic pro neznámé $c_0, \dots, c_m$

Matice systému

$$A = \begin{pmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_1(x_0) & \dots & \varphi_m(x_0) \\ \vdots & & & \\ \varphi_0(x_n) & \varphi_1(x_n) & \dots & \varphi_m(x_n) \end{pmatrix}$$

pravá strana

$$b = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

neznámé

$$c = \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

Snažíme se najít min $\sum_{i=0}^{n} (\varphi(x_i) - y_i)^2 \longrightarrow$ MNČ

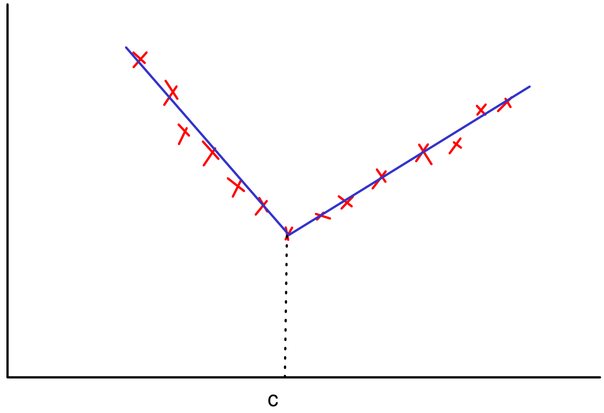
Reziduum $r_c = b - Ac$

$$\|r_c\|^2 = \sum_{i=0}^{n} r_i^2 = \sum_{i=0}^{n} (y_i - c_0\varphi_0(x_i) - c_1\varphi_1(x_i) - \dots - c_m\varphi_m(x_i))^2 = \sum_{i=0}^{n} (y_i - \varphi(x_i))^2$$

Hledáme reziduum s min. normou.

$$\boxed{\hat{c} = (A^T A)^{-1} A^T \cdot b}$$

pro LNZ sloupce A



Bázové funkce

$\varphi_0(x) = 1$

$\varphi_1(x) = x$

$\varphi_2(x) = |x-c|$

pokud sloupce A jsou závislé, můžeme použít tzv. pseudoinverzi A^+

$c = A^+ b$ v Matlabu příkaz pinv(A)

DÚ: Vytvořte funkci v Matlabu, která spočítá a zobrazí aproximaci dat pomocí MNČ

vstup: $\underbrace{x, f}_{\text{data}}, \underbrace{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4}_{\text{bázové funkce - max. 5}}$

výstup: parametry $c = (c_0, \ldots, c_m)$

stejně jako báz. funkcí

Možný postup: použít proměnnou „nargin" - udává počet vstupních param.

Limity

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

Taylorův rozvoj

$$f(x) = f(x_0) + \frac{1}{1!} f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!} f'''(x_0)(x - x_0)^3 + \dots = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k$$