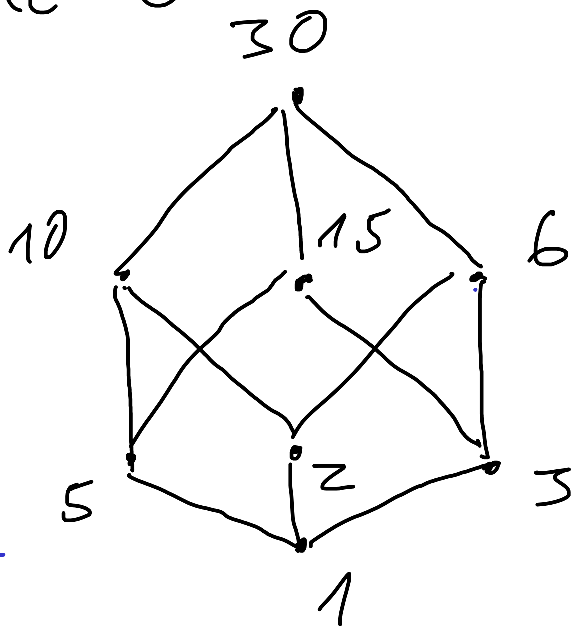
6.3 $n = 30$

má dělitele $\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$



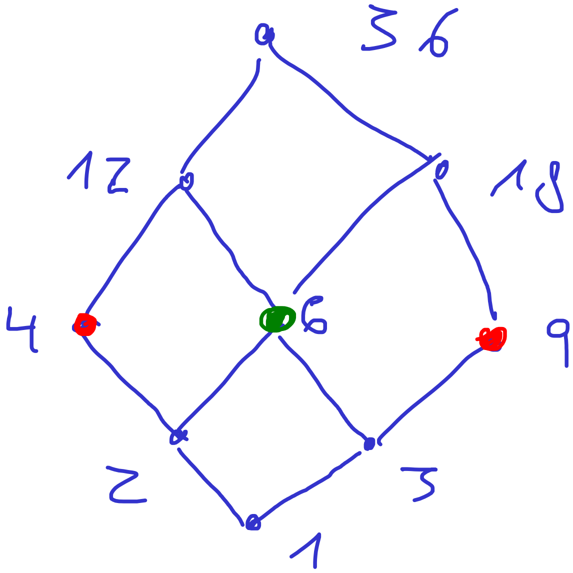
8 dělitelů $= 2^3$ → jediný kandidát je B.a.

$P(\{a,b,c\}) = 2^{\{a,b,c\}}$

→ je Bool. algebra

$n = 36$ má dělitele

$\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$ 9 dělitelů → není B.a.



6 nemá komplement

6.4 Rozhodnět, zda

každý řetězec, který má nejv. a nejm. prvek, je úplný svaz.

$M = \mathbb{N} \ni a, b$

$a \preceq b$:
- b lich, a sudé
- $a \leq b$, a, b liché
- $a \leq b$, a, b sudé

6.5

$M = \{A \subseteq \mathbb{R}^3 \mid A \text{ konvexní}\}$

definujeme $A \wedge B := \underbrace{A \cap B}_{\text{konvexní}}$

— " — $A \vee B := \underbrace{\langle A \cup B \rangle_{konv}}_{\text{konvexní obal mn. } A \cup B}$

$A, B \in M$

$$\langle A\cup B\rangle_{konv.} = \bigcap_{C\in\mathcal{A}} C$$

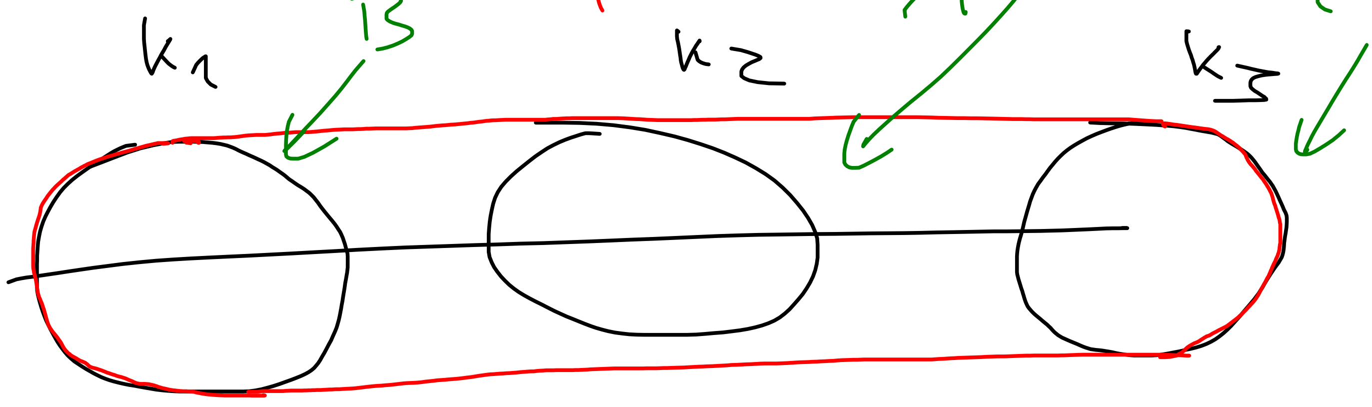
$$\mathcal{A} = \{C \subseteq \mathbb{R}^3 \text{ konv} \mid C \supseteq A\cup B\}$$

Pak $(M, \vee, \wedge)$ je svaz

- úplný svaz
- není distributivní

$$A\wedge(B\vee C) = (A\wedge B)\vee(A\wedge C)$$

↳ neplatí



$$K_2 \subseteq \langle K_1\cup K_3\rangle_{konv}$$

$$\underset{\displaystyle A}{\underset{\parallel}{A\wedge(B\vee C)}} \neq \emptyset\vee\emptyset = \emptyset$$

$\underline{7.1}$ $f(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$

"reciproký pol."

$$f(x) = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1 = 0 \quad / \frac{1}{x^2}$$

$$\underbrace{\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)}_{y^2 - 2} + 2\underbrace{\left(x + \frac{1}{x}\right)}_{y} + 3 = 0$$

$$(y^2 - 2) + 2y + 3 = 0$$

$$y^2 + 2y + 1 = 0$$

$$(y+1)^2 = 0 \Rightarrow y = x + \frac{1}{x} = -1 \quad / \cdot x$$

$$x^2 + 1 = -x$$

nemá řešení nad $\mathbb{R}$

$$x^2 + x + 1 = 0$$

nad $\mathbb{C}$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f(x) = \left(x - \left(-\frac{1}{2} + i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^2 \cdot \left(x - \left(-\frac{1}{2} - i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^2$$

rozklad nad $\mathbb{C}$

$$f(x) = \Big(\big(\underbrace{x}_{A}+\underbrace{\tfrac{1}{2}}_{A} \underbrace{- i\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2}}_{B}\big)\big(\underbrace{x+\tfrac{1}{2}}_{A} \underbrace{+ i\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2}}_{A}\big)\Big)^2$$

$$= \left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \left(i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)^2 =$$

rozklad nad $\mathbb{R}$

$$= \left(x^2 + x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right)^2 = (x^2+x+1)^2$$

<u>Př-2</u>: $f(x) = x^5 + 3x^3 + 3$

rozložte nad $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{Z}_7$

$\rightsquigarrow$ nemá racionální kořeny

$\frac{p}{q} \rightsquigarrow p \mid 3$, $q \mid 1$ $\Rightarrow \frac{p}{q} \in \{\pm 1, \pm 3\}$

nerozložitelný pol. nad $\mathbb{Q}$

Rozklad nad $\mathbb{Z}_7$:

$\cancel{\emptyset}$

	1	0	3	0	0	3	
1	1	1	4	4	4	7	$\equiv 0 \mod 7$
1	1	2	-1	3	7		$\equiv 0 \mod 7$
1	1	3	2	5	-2		$\equiv \mod 7$
-1	1	1	-2	5			
2	1	4	0	5			
-2	1	0	-1	6			
3							
-3	-	-					

$$f(x) \equiv (x-1)^2 \underbrace{(x^3+2x^2-x+3)}_{\text{nemá kořen nad } \mathbb{Z}_7}$$

$\rightsquigarrow$ nerozložitelný pol.

7.3. Najděte všechny ireducibilní pol. ≥ 2 nad $\mathbb{Z}_3$

- $f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

$a_1, a_2, a_0 \in \mathbb{Z}_3$

Uvažme ireducibilní pol. (stačí normované)

NB: možné kořeny $0, \pm 1$

- $x^2, (x \pm 1)^2,$
- $x(x \pm 1), (x+1)(x-1)$

Výsledek – rozložitelné

- x^2
- $x^2 \pm x + 1$
- $x^2 \pm x$
- $x^2 - 1$

Výsledek – nerozložitelné

$x^2+1, \quad x^2 \pm x - 1$

normované, tj. vedoucí koef. $= 1$ nad $\mathbb{Z}_3$

7.4 $f(x) = x^4 + x^3 + x + 2$

možné kořeny $0, \pm 1$

$\rightsquigarrow$ nemá kořeny nad $\mathbb{Z}_3$

Jediná možnost, je pol. rozložit, je tvar

$$x^4 + x^3 + x + 2 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$$

$$= x^4 + (a+c)x^3 + (b + ac + d)x^2 + (ad + bc)x + bd.$$

$$\boxed{b = 1, \ d = 2}$$

$$x^4 + x^3 + x + 2 = x^4 + (a+c)x^3 + \underbrace{ac}_{=0}\, x^2 + (2a+c)x + 2$$

$\boxed{a = 0}$: $\quad x^4 + x^3 + x = x^4 + cx^3 + cx$

$$\boxed{c = 1}$$

$$f(x) = (x^2+1)(x^2+x+2)$$

↳ rozložitelný