

Zkouška 1. termín – MIN401 – jaro 2021 – 17. 6. 2021

Veškeré odpovědi musí být zdůvodněny a výpočty musí být doprovizeny komentářem. (Řešení sestávající pouze z odpovědí budou považována za opsaná a hodnocena 0 body.)

1. (4 body) Rozložte polynom

$$p(x) = x^4 + 2x^3 + 2x + 2$$

na ireducibilní faktory nad \mathbb{Z}_3 .

2. (8 bodů) Uvažme grupy $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Z}_n, +)$, $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$ a grupy permutací (\mathbb{S}_n, \circ) , $n \geq 2$.

- (a) Uvažme podmnožinu

$$M = \{\sigma \in \mathbb{S}_5 \mid \sigma(2) = 2 \text{ nebo } \sigma(2) = 5\} \subseteq \mathbb{S}_5.$$

Rozhodněte, zda je M podgrupa v \mathbb{S}_5 .

- (b1) Určete nejmenší podgrupu H_1 v \mathbb{Z}_{18} obsahující prvky 6 a 9.
(b2) Najděte nějakou netriviální podgrupu H_2 v \mathbb{Z}_{18} neobsahující prvek 6.
(b3) Existuje v \mathbb{Z}_{18} netriviální podgrupa, která neobsahuje ani jeden z prvků 6 a 9?
(c1) Uvažme zobrazení $\varphi : \mathbb{Z}_6 \rightarrow \mathbb{S}_6$ takové, že

$$\varphi(0) = \text{id} \quad \text{a} \quad \varphi(k) = (1, 2, \dots, k+1)$$

kde $k \in \{1, \dots, 5\}$. Rozhodněte, zda φ je homomorfismus grup.

- (c2) Uvažme homomorfismus grup $\psi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{S}_8$ určený podmínkou

$$\psi(1) = (1, 4, 2, 6)(2, 5, 7).$$

Určete jádro $\ker \psi$. Dále určete $\psi(23)$.

- (c3) Uvažme homomorfismus grup $\psi' : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{S}_{10}$ určený podmínkami

$$\psi'(1, 0) = (3, 5)(2, 4) \quad \text{a} \quad \psi'(0, 1) = (1, 7)(6, 10, 8, 9).$$

Určete jádro $\ker \psi'$. Dále určete $\psi'(10, 10)$.

3. (8 bodů) Mějme lineární $(6, 3)$ -kód nad \mathbb{Z}_2 zadaný maticí

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tedy délka zprávy před zakódováním je 3 a po zakódování 6. Byla přijata zpráva

- (a) 100001,
(b) 110011,
(c) 111001.

Ve všech těchto případech určete syndrom a zprávu dekodujte (tj. určete odeslanou zprávu) za předpokladu, že při přenosu došlo k nejmenšímu možnému počtu chyb. Je dekodování za tohoto předpokladu vždy možné jednoznačně? Jestliže nikoliv, určete všechny možnosti s minimem chyb.