Dvojný integrál

Transformace a aplikace dvojného integrálu

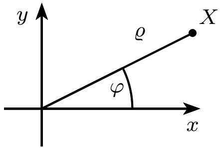
Petr Liška

Masarykova univerzita

22.4.2021

Polární souřadnice

Nechť bod v rovině má kartézské souřadnice $[x, y]$. Pak polární souřadnice ϱ je vzdálenost bodu od počátku a φ úhel, který svírá *průvodič* (tj. úsečka spojující bod s počátkem) s kladným směrem osy x.



$$x = \varrho \cos \varphi,$$
$$y = \varrho \sin \varphi.$$

Transformace dvojného integrálu do polárních souřadnic

Věta

Nechť funkce $f(x, y)$ je spojitá na množině M a nechť je tato množina určená v polárních souřadnicích nerovnostmi

$$\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2, \qquad \varrho_1(\varphi) \leq \varrho \leq \varrho_2(\varphi).$$

Pak platí

$$\iint_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left(\int_{\varrho_1(\varphi)}^{\varrho_2(\varphi)} f(\varrho\cos\varphi,\ \varrho\sin\varphi)\,\varrho\,\mathrm{d}\varrho \right) \mathrm{d}\varphi\,.$$

Transformace obecněji

Definice

Nechť je dáno zobrazení $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ určené rovnicemi

$$x = k(u, v), \quad y = l(u, v),$$

kde funkce k a l mají spojité parciální derivace prvního řádu. Pak F se nazývá *spojitě diferencovatelné zobrazení* a determinant

$$\mathcal{J}(u, v) = \begin{vmatrix} k_u & k_v \\ l_u & l_v \end{vmatrix}$$

se nazývá *jakobián* zobrazení F. Jestliže $\mathcal{J}(u, v) \neq 0$, pak se toto zobrazení nazývá *regulární*.

Transformace obecněji

Věta

Nechť je dána spojitá funkce f proměnných x a y na uzavřené elementární oblasti M. Nechť $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ je prosté regulární spojitě diferencovatelné zobrazení zadané rovnicemi

$$x = k(u, v), \quad y = l(u, v),$$

a nechť $M = F(B)$. Pak platí

$$\iint_M f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_B f\big(k(u, v), l(u, v)\big)\,|\mathcal{J}(u, v)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$

Aplikace dvojného integrálu

Geometrické aplikace

- obsah množiny M

$$\iint_M \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

- objem tělesa omezeného obecnou válcovou plochou tvořenou hranicí M a funkcí $f(x,\,y)$

$$\iint_M f(x,\,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Průměrné hodnoty

- průměrná hodnota funkce $f(x,\,y)$ na množině M o obsahu $m(M)$ (znečištění ovzduší, hustota populace atd.)

$$f_{ave} = \frac{1}{m(M)} \iint_M f(x,\,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Fyzikální aplikace I

- hmotnost desky o tvaru M a hustotě $\varrho(x, y)$

$$m = \iint_M \varrho(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

- stacionární moment desky o tvaru M kolem osy x (M_x) a kolem osy y (M_y)

$$M_x = \iint_M y\varrho(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad M_y = \iint_M x\varrho(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

- souřadnice $[\bar{x}, \bar{y}]$ těžiště desky o tvaru M, hmotnosti m a hustotě $\varrho(x, y)$

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\iint_M x\varrho(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad \bar{y} = \frac{1}{m}\iint_M y\varrho(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Fyzikální aplikace II

- moment setrvačnosti desky o tvaru M a hustotě $\varrho(x, y)$ okolo osy x a okolo osy y

$$I_x = \iint_M y^2 \varrho(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad I_y = \iint_M x^2 \varrho(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

- moment setrvačnost desky o tvaru M a hustotě $\varrho(x, y)$ okolo počátku (polární moment)

$$I_0 = \iint_M (x^2 + y^2)\varrho(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Další aplikace závisí na významu funkce $f(x, y)$ a tedy na významu objemu, který vyjadřuje dvojný integrál. Dvojný integrál se též dá využít k určení součtu řad nebo jednoduchých integrálů, u kterých neznáme primitivní funkci.