Autonomní systémy v rovině

Definice, trajektorie, nulkliny, stacionární body

Petr Liška

Masarykova univerzita

4.3.2021

Autonomní systém v rovině

Definice

Vektorová diferenciální rovnice

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \tag{1}$$

kde

$$\mathbf{x} = (x_1(t), x_2(t))^T$$

a

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_n))^T$$

je definovaná na oblasti $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, se nazývá *autonomní systém v rovině*. Oblast Ω se nazývá *fázový prostor*, proměnná t se nazývá *čas*.

Autonomní systém v rovině

Definice

Vektorová diferenciální rovnice

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \tag{1}$$

kde

$$\mathbf{x} = (x_1(t), x_2(t))^T$$

a

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_n))^T$$

je definovaná na oblasti $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, se nazývá *autonomní systém v rovině*. Oblast Ω se nazývá *fázový prostor*, proměnná t se nazývá *čas*.

Úmluva

Pokud nebude řečeno jinak, tak f_1 i f_2 jsou spojité funkce a počáteční problém (1), $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ je jednoznačný pro libovolné $[t_0, \mathbf{x}_0] \in \mathbb{R} \times \Omega$. Řešením se rozumí úplné řešení.

Základní vlastnost a trajektorie

Lemma

Je-li $\mathbf{x} = \phi(t)$ *řešení rovnice* (1)*, pak i* $\mathbf{x} = \phi(t + c)$ *je řešení rovnice* (1)*.*

Základní vlastnost a trajektorie

Lemma

Je-li $\mathbf{x} = \phi(t)$ *řešení rovnice* (1), *pak i* $\mathbf{x} = \phi(t + c)$ *je řešení rovnice* (1).

Řešení $\mathbf{x} = \phi(t)$ systému (1) můžeme interpretovat jako

1. graf funkce $\mathbf{x} = \phi(t)$ v prostoru $\mathbf{R} \times \Omega$;
2. křivku v prostoru Ω danou parametricky $\mathbf{x} = \phi(t)$.

V druhém případě se tato křivka nazývá *trajektorie*. Jedná se vlastně o kolmý průmět grafu funkce $\mathbf{x} = \phi(t)$ z $\mathbf{R} \times \Omega$ do Ω.

Uzavřená trajektorie se nazývá *cyklus*.

Tři základní otázky

Tři základní otázky

1. Existují rovnovážné hodnoty

$$\mathbf{x}^\star = (x_1^\star, x_2^\star)^T$$

takové, že $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{x}^\star$ je řešením (1)?

Tři základní otázky

1. Existují rovnovážné hodnoty
$$\mathbf{x}^\star = (x_1^\star, x_2^\star)^T$$
takové, že $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{x}^\star$ je řešením (1)?

2. Nechť $\phi(t)$ je řešení (1). Předpokládejme, že $\psi(t)$ je druhé řešení (1) takové, že $\psi(0)$ je velmi blízko $\phi(0)$. Zůstane $\psi(t)$ blízko $\phi(t)$ i v budoucnu nebo se $\psi(t)$ odchýlí od $\phi(t)$ pro $t \to \infty$?

Tři základní otázky

1. Existují rovnovážné hodnoty

$$\mathbf{x}^\star = (x_1^\star, x_2^\star)^T$$

   takové, že $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{x}^\star$ je řešením (1)?

2. Nechť $\phi(t)$ je řešení (1). Předpokládejme, že $\psi(t)$ je druhé řešení (1) takové, že $\psi(0)$ je velmi blízko $\phi(0)$. Zůstane $\psi(t)$ blízko $\phi(t)$ i v budoucnu nebo se $\psi(t)$ odchýlí od $\phi(t)$ pro $t \to \infty$?

3. Co se stane s řešením $\mathbf{x}(t)$ pro $t \to \infty$? Bude se blížit nějakému rovnovážnému stavu? Nebo alespoň třeba nějakému periodickému řešení?

První otázka = stacionární bod

Definice

Bod $\mathbf{x}^\star$ takový, že $\mathbf{f}(\mathbf{x}^\star) = \mathbf{o}$, se nazývá *stacionární bod* (kritický, singulární, rovnovážný). Příslušné řešení $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^\star$ se pak nazývá *stacionární řešení* (rovnovážné).

První otázka = stacionární bod

Definice

Bod $\mathbf{x}^\star$ takový, že $\mathbf{f}(\mathbf{x}^\star) = \mathbf{o}$, se nazývá *stacionární bod* (kritický, singulární, rovnovážný). Příslušné řešení $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^\star$ se pak nazývá *stacionární řešení* (rovnovážné).

Stacionární bod je tedy řešením soustavy rovnic

$$f_1(x_1, x_2) = 0$$

$$f_2(x_1, x_2) = 0$$

První otázka = stacionární bod

Definice

Bod $\mathbf{x}^\star$ takový, že $\mathbf{f}(\mathbf{x}^\star) = \mathbf{o}$, se nazývá *stacionární bod* (kritický, singulární, rovnovážný). Příslušné řešení $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^\star$ se pak nazývá *stacionární řešení* (rovnovážné).

Stacionární bod je tedy řešením soustavy rovnic

$$f_1(x_1, x_2) = 0$$

$$f_2(x_1, x_2) = 0$$

Množina řešení každé libovolné rovnice $f_k(x_1, x_2) = 0$ se nazývá *k-tá nulklina*.

Druhá otázka = stabilita

Definice

Řešení $\mathbf{x}_0$ rovnice (1) se nazývá stabilní, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tak, že každé řešení $\mathbf{x}$ rovnice (1) vyhovující podmínce

$$|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_0(0)| < \delta$$

splňuje

$$|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0(t)| < \varepsilon\,.$$

Není-li řešení $\mathbf{x}_0$ stabilní, řekneme, že je nestabilní.

Druhá otázka = stabilita

Definice

Řešení $\mathbf{x}_0$ rovnice (1) se nazývá stabilní, když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tak, že každé řešení $\mathbf{x}$ rovnice (1) vyhovující podmínce

$$|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_0(0)| < \delta$$

splňuje

$$|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0(t)| < \varepsilon\,.$$

Není-li řešení $\mathbf{x}_0$ stabilní, řekneme, že je nestabilní.

Plně vyřešeno pro

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}, \tag{2}$$

kde A je konstantní matice.

Věta

a) *Každé řešení rovnice* (3) *je stabilní, když všechna vlastní čísla matice* A *mají zápornou reálnou část.*

b) *Předpokládedejme, že všechna vlastní čísla matice* A *mají nezápornou reálnou část a* $\lambda_1 = \mathtt{i}\sigma_1, \dots, \lambda_l = \mathtt{i}\sigma_l$*, jsou kořeny s nulovou reálnou částí, přičemž kořen* λ_j *má násobnost* k_j*. Potom každé řešení rovnice* (3) *je stabilní, když matice* A *má* k_j *lineárně nezávislých vlastních vektorů pro každé vlastní číslo* λ_j*.*

Třetí otázka = vlastnosti trajektorií a charakteristika stacionárních bodů

Věta

Nechť φ, ψ jsou řešení rovnice (1). Pak jejich trajektorie buď splývají, nebo nemají ani jeden bod společný.

Třetí otázka = vlastnosti trajektorií a charakteristika stacionárních bodů

Věta

Nechť φ, ψ *jsou řešení rovnice* (1)*. Pak jejich trajektorie buď splývají, nebo nemají ani jeden bod společný.*

Věta

Nechť $\mathbf{x} = \phi(t)$ *je řešení* (1)*. Jestliže* $\phi(t_0 + T) = \phi(t_0)$ *pro nějaké* t_0 *a* $T > 0$*, potom* $\phi(t + T) \equiv \phi(t)$*.*

Třetí otázka = vlastnosti trajektorií a charakteristika stacionárních bodů

Věta

Nechť φ, ψ *jsou řešení rovnice* (1). *Pak jejich trajektorie buď splývají, nebo nemají ani jeden bod společný.*

Věta

Nechť $\mathbf{x} = \phi(t)$ *je řešení* (1). *Jestliže* $\phi(t_0 + T) = \phi(t_0)$ *pro nějaké* t_0 *a* $T > 0$, *potom* $\phi(t + T) \equiv \phi(t)$.

Autonomní systém (1) tedy může mít trajektorie trojího typu:

1. Singulární body (odpovídají konstantním řešením).
2. Cykly (odpovídají nekonstantním periodickým řešením).
3. Trajektorie, které samy sebe neprotínají.

Typy singulárních bodů

Singulární bod x_0 rovnice (1) se nazývá

střed, když existuje ryzí okolí U bodu x_0 takové, že každým $a \in U$ prochází jediná uzavřená trajektorie, která obsahuje x_0 ve svém vnitřku;

ohnisko, když existuje ryzí okolí U bodu x_0 takové, že bod $x(t)$ trajektorie x vycházející z libovolného bodu $a \in U$ má tu vlastnost, že konverguje pro $t \to \infty$ nebo $t \to -\infty$ k x_0, a to tak, že velikost orientovaného úhlu vektoru $\overrightarrow{x_0x(t)}$ od nějakého pevného vektoru $\overrightarrow{x_0x_1}$ má nevlastní limitu;

uzel, když existuje ryzí okolí U bodu x_0 takové, že pro bod $x(t)$ trajektorie x vycházející z libovolného bodu $a \in U$ platí

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = x_0 \qquad \text{nebo} \lim_{t\to-\infty} x(t) = x_0$$

a velikost orientovaného úhlu vektoru $\overrightarrow{x_0 x(t)}$ od nějakého pevného vektoru $\overrightarrow{x_0 x_1}$ má vlastní limitu;

sedlo, když existuje jen konečný počet trajektorií $x(t)$ takových, že

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = x_0 \qquad \text{nebo} \lim_{t\to-\infty} x(t) = x_0$$

bod rotace, jestliže v libovolném okolí bodu x_0 existuje alespoň jeden cykl, obsahující ve svém vnitřku bod x_0.

Lineární autonomní systém

Uvažujme lineární autonomní systém, tj.

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}, \qquad \text{kde} \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Věta

Nechť A je regulární matice systému (3) a nechť λ_1, λ_2 jsou vlastní čísla matice A. Stacionární bod $[0,0]$ je

- *nestabilní uzel, jsou-li λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ a $\lambda_1 \geq \lambda_2 > 0$;*
- *stabilní uzel, jsou-li λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ a $\lambda_1 \leq \lambda_2 < 0$;*
- *sedlo, jsou-li λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ a $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$;*
- *nestabilní ohnisko, jsou-li $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta \mathtt{i}$ a $\alpha > 0$;*
- *stabilní ohnisko, jsou-li $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta \mathtt{i}$ a $\alpha < 0$;*
- *střed, jsou-li $\lambda_{1,2} = \pm\beta \mathtt{i}$.*