

Dvojný a trojný integrál

Aplikace

Petr Liška

Masarykova univerzita

6.5.2021

Aplikace dvojného integrálu

Geometrické aplikace

- obsah množiny M

$$\iint_M dx dy$$

- objem tělesa omezeného obecnou válcovou plochou tvořenou hranicí M a funkcí $f(x, y)$

$$\iint_M f(x, y) dx dy$$

Průměrné hodnoty

- průměrná hodnota funkce $f(x, y)$ na množině M o obsahu $m(M)$ (znečištění ovzduší, hustota populace atd.)

$$f_{ave} = \frac{1}{m(M)} \iint_M f(x, y) dx dy$$

Fyzikální aplikace I

- hmotnost desky o tvaru M a hustotě $\rho(x, y)$

$$m = \iint_M \rho(x, y) dx dy$$

- stacionární moment desky o tvaru M kolem osy x (M_x) a kolem osy y (M_y)

$$M_x = \iint_M y\rho(x, y) dx dy \quad M_y = \iint_M x\rho(x, y) dx dy$$

- souřadnice $[\bar{x}, \bar{y}]$ těžiště desky o tvaru M , hmotnosti m a hustotě $\rho(x, y)$

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \iint_M x\rho(x, y) dx dy \quad \bar{y} = \frac{1}{m} \iint_M y\rho(x, y) dx dy$$

Fyzikální aplikace II

- moment setrvačnosti desky o tvaru M a hustotě $\rho(x, y)$ okolo osy x a okolo osy y

$$I_x = \iint_M y^2 \rho(x, y) \, dx \, dy \quad I_y = \iint_M x^2 \rho(x, y) \, dx \, dy$$

- moment setrvačnosti desky o tvaru M a hustotě $\rho(x, y)$ okolo počátku (polární moment)

$$I_0 = \iint_M (x^2 + y^2) \rho(x, y) \, dx \, dy$$

Další aplikace závisí na významu funkce $f(x, y)$ a tedy na významu objemu, který vyjadřuje dvojný integrál. Dvojný integrál se též dá využít k určení součtu řad nebo jednoduchých integrálů, u kterých neznáme primitivní funkci.

Těžiště ve 2D

Určete těžiště trojúhelníkové desky s vrcholy $[0, 0]$, $[1, 0]$ a $[0, 2]$, jestliže její hustota je dána funkcí $\rho(x, y) = 1 + 3x + y$.

Pravděpodobnost a šíření epidemie

Předpokládejme, že pravděpodobnost, že nakažený jedinec rozšíří nemoc na zdravého jedince je funkce vzdálenosti mezi nimi. Uvažme kruhové město o poloměru 10 km s rovnoměrně rozdělenou populací a uvažme pravděpodobnostní funkci ve tvaru

$$f(P) = \frac{1}{20}[20 - d(P, A)],$$

kde $A(x_0, y_0)$ jsou souřadnice zdravého jedince a $d(P, A)$ značí vzdálenost mezi P a A . Expozice jedince nemoci je pak součtem pravděpodobnosti chycení nemoci ode všech obyvatel města. Předpokládejme, že nakažení jsou rovnoměrně rozptýleni po městě s hustotou k jedinců na kilometr čtvereční. Určete expozici jedince, který bydlí uprostřed města, a jedince, který bydlí na kraji města.

Aplikace trojného integrálu

Fyzikální aplikace I

Je-li $\rho(x, y, z)$ funkce popisující hustotu tělesa, které vyplňuje množinu V , pak jeho

- hmotnost je

$$m = \iiint_V \rho(x, y, z) dx dy dz$$

- jeho stacionární momenty okolo souřadnicových rovin jsou

$$M_{yz} = \iiint_V x\rho(x, y, z) dx dy dz, \quad M_{xz} = \iiint_V y\rho(x, y, z) dx dy dz,$$

$$M_{xy} = \iiint_V z\rho(x, y, z) dx dy dz.$$

- souřadnice těžiště pak jsou

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{m}, \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{m}, \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{m}.$$

Fyzikální aplikace II

Dále můžeme spočítat například momenty setrvačnosti kolem souřadných os

$$I_x = \iiint_V (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dx dy dz,$$

$$I_y = \iiint_V (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) dx dy dz,$$

$$I_z = \iiint_V (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dx dy dz$$

nebo celkový elektrický náboj Q tělesa

$$Q = \iiint_V \sigma(x, y, z) dx dy dz,$$

kde σ je hustota náboje.

Závody z kopce - Moment setrvačnosti

Pustíme plnou kouli, dutou kouli, plný válec a dutý válec po nakloněné rovině dolů. Který z těchto objektů bude dole jako první?