Metrické prostory

Smršť a Banachova věta

Petr Liška

Masarykova univerzita

01.04.2021

Uzavřené množiny

Definice

Nechť $A \subseteq P$. Množina $\overline{A} = \{x \in P\colon \varrho(x, A) = 0\}$ se nazývá *uzávěr* množiny A. Množina A se nazývá *uzavřená*, pokud $A = \overline{A}$.

Věta

Nechť $A \subseteq P$. Množina A je uzavřená, právě když pro každou konvergentní posloupnost prvků $x_n \in A$, $x_n \to x_0$ platí $x_0 \in A$.

Otevřené množiny a okolí bodu

Definice

Množina $A \subseteq P$ se nazývá *otevřená*, jestliže její komplement $P \setminus A$ je uzavřená množina.

Definice

Nechť $a \in P$ a $\varepsilon > 0$. Množinu

$$\mathcal{O}_\varepsilon(a) = \{x \in P \colon \varrho(x, a) < \varepsilon\}$$

nazýváme (*epsilonovým*) *okolím bodu a*.

Definice

Množina $A \subseteq P$ se nazývá *otevřená*, jestliže pro každé $a \in A$ existuje $\mathcal{O}(a)$ takové, že $\mathcal{O}(a) \subset A$.

Definice

Nechť $A \subseteq P$, $a \in P$. Bod a se nazývá:

i) *Vnitřním bodem* množiny A, jestliže existuje $\mathcal{O}(a)$ takové, že $\mathcal{O}(a) \subset A$. Množina všech vnitřních bodů se nazývá *vnitřek* a značí se A^o.

ii) *Hraničním bodem* množiny A, jestliže pro každé okolí $\mathcal{O}(a)$ platí

$$\mathcal{O}(a) \cap A \neq \emptyset \quad \wedge \quad \mathcal{O}(a) \cap (P \setminus A) \neq \emptyset.$$

Množina všech hraničních bodů se nazývá *hranice* a značí se $h(A)$.

iii) *Hromadným bodem* množiny A, jestliže každé okolí $\mathcal{O}(a)$ obsahuje nekonečně mnoho bodů množiny A.

iv) *Izolovaným bodem* množiny A, jestliže existuje okolí $\mathcal{O}(a)$ takové, že $\mathcal{O}(a) \cap A = \{a\}$.

Definice

Nechť $A \subseteq P$, $a \in P$. Bod a se nazývá:

i) *Vnitřním bodem* množiny A, jestliže existuje $\mathcal{O}(a)$ takové, že $\mathcal{O}(a) \subset A$. Množina všech vnitřních bodů se nazývá *vnitřek* a značí se A^o.

ii) *Hraničním bodem* množiny A, jestliže pro každé okolí $\mathcal{O}(a)$ platí

$$\mathcal{O}(a) \cap A \neq \emptyset \quad \wedge \quad \mathcal{O}(a) \cap (P \setminus A) \neq \emptyset.$$

Množina všech hraničních bodů se nazývá *hranice* a značí se $h(A)$.

iii) *Hromadným bodem* množiny A, jestliže každé okolí $\mathcal{O}(a)$ obsahuje nekonečně mnoho bodů množiny A.

iv) *Izolovaným bodem* množiny A, jestliže existuje okolí $\mathcal{O}(a)$ takové, že $\mathcal{O}(a) \cap A = \{a\}$.

Množina je otevřená právě tehdy, když $A = A^o$. Množina je uzavřená právě tehdy, když obsahuje svoji hranici.

Úplný metrický prostor

Definice

Metrický prostor (P, ϱ) se nazývá úplný, jestliže v něm každá cauchyovská posloupnost má limitu, tj. každá cauchyovská posloupnost je konvergentní.

Úplný metrický prostor

Definice

Metrický prostor (P, ϱ) se nazývá úplný, jestliže v něm každá cauchyovská posloupnost má limitu, tj. každá cauchyovská posloupnost je konvergentní.

Věta

Nechť (P, ϱ) je úplný metrický prostor a $A \subseteq P$ je uzavřená množina. Pak A s metrikou, která je indukovaná metrikou ϱ, je úplný metrický prostor.

Kompaktní prostor a množina

Definice

Metrický prostor (P, ϱ) se nazývá *kompaktní*, jestliže z každé posloupnosti jeho bodů lze vybrat konvergentní podposloupnost. Množina $A \subseteq P$ se nazývá *kompaktní*, jestliže A s metrikou indukovanou metrikou ϱ je kompaktní prostor, tj. z každé posloupnosti bodů množiny A lze vybrat podposloupnost mající v A limitu.

Věta

Je-li metrický prostor (P, ϱ) kompaktní, pak je úplný.

Věta

i) *Nechť A je kompaktní množina v metrickém prostoru (P, ϱ). Pak A je uzavřená a ohraničená.*

ii) *Nechť A je podmnožina v $\mathbb{E}^n$. Množina A je kompaktní, právě když je uzavřená a ohraničená.*

Spojitá zobrazení

Definice

Nechť (P, ϱ), (Q, σ) jsou metrické prostory, F je zobrazení z P do Q. Řekneme, že toto zobrazení je *spojité v bodě* x_0, jestliže ke každému okolí V bodu $F(x_0)$ v Q existuje okolí U bodu x_0 v P takové, že $F(x) \in V$ pro každé $x \in U$. Řekneme, že F je spojité na P, je-li spojité v každém bodě P.

Věta

Nechť (P, ϱ), (Q, σ) jsou metrické prostory. Zobrazení $F\colon P \to Q$ je spojité v bodě $x_0 \in P$, právě tehdy když pro každou posloupnost bodů v P, pro niž $x_n \xrightarrow{\varrho} x_0$, platí $F(x_n) \xrightarrow{\sigma} F(x_0)$.

Věta

Nechť (P, ϱ), (Q, σ) jsou metrické prostory a $F\colon P \to Q$ je spojité a $A \subseteq P$ je kompaktní. Pak $F(A)$ je kompaktní v Q.

Kontrakce

Definice

Nechť (P, ϱ), (Q, σ) jsou metrické prostory, $F\colon P \to Q$. Řekneme, že zobrazení F je *lipschitzovské*, jestliže existuje nezáporná reálná konstanta L taková, že

$$\sigma\left(F(x), F(y)\right) \leq L\varrho(x, y) \quad \text{pro každé } x, y \in P.$$

Je-li $L < 1$, pak říkáme, že F je *kontrakce*.

Věta

Nechť (P, ϱ), (Q, σ) jsou metrické prostory, $F\colon P \to Q$ je lipschitzovské zobrazení. Pak F je spojité.

Banachova věta

Věta

Nechť (P, ϱ) *je úplný metrický prostor a* $F\colon P \to P$ *je kontrakce. Pak existuje právě jeden pevný bod zobrazení* F*, tj. existuje právě jedno* $x_0 \in P$ *takové, že* $F(x_0) = x_0$.