Metrické prostory

Aplikace Banachovy věty

Petr Liška

Masarykova univerzita

08.04.2021

Existence a jednoznačnost řešení počátečního problému

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0 \tag{1}$$

Věta (**Picard-Lindelöfova**)

Nechť je dána množina

$$R = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\},$$

kde $a, b \in \mathbb{R}^+$ *a* $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$. *Dále mějme spojitou funkci* $f : R \to \mathbb{R}$, *která je lipschitzovská vzhledem k proměnné* y. *To znamená, že:*

$\exists\, L \in \mathbb{R}_0^+ : \forall\, [x, y_1], [x, y_2] \in \mathbb{R}$ *platí, že* $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L\, |y_1 - y_2|$.

Pak existuje právě jedno řešení počátečního problému (1), *které je definované na intervalu* $I = \langle x_0, x_0 + \delta\rangle$, *kde* $\delta = \min\{a, \frac{b}{m}\}$ *pro* $m = \max\limits_{\langle x,y\rangle \in \mathbb{R}} |F(x, y)|$.

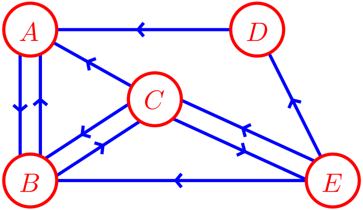
Jak funguje Google?

Jak funguje Google?

Jak se poznají dobré webové stránky? Tak, že na ně odkazují dobré webové stránky!

Jak funguje Google?

Jak se poznají dobré webové stránky? Tak, že na ně odkazují dobré webové stránky!



$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{matrix} A & B & C & D & E \end{matrix} \\
\begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

$$P^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{11}{18} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{4}{9} & 1 & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{5}{18} & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 1 & 0 & \frac{1}{9} \end{pmatrix}, \cdots,$$

$$P^{32} = \begin{pmatrix} 0{,}293 & 0{,}293 & 0{,}293 & 0{,}293 & 0{,}293 \\ 0{,}390 & 0{,}390 & 0{,}390 & 0{,}390 & 0{,}390 \\ 0{,}220 & 0{,}220 & 0{,}220 & 0{,}220 & 0{,}220 \\ 0{,}024 & 0{,}024 & 0{,}024 & 0{,}024 & 0{,}024 \\ 0{,}073 & 0{,}073 & 0{,}073 & 0{,}073 & 0{,}073 \end{pmatrix}$$

Každý sloupec této matice je vektor (tzv. stacionární distribuce)

$$\pi^T = (0{,}293; 0{,}390; 0{,}220; 0{,}024; 0{,}073)$$

$$P^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{11}{18} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{4}{9} & 1 & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{5}{18} & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 1 & 0 & \frac{1}{9} \end{pmatrix}, \cdots,$$

$$P^{32} = \begin{pmatrix} 0{,}293 & 0{,}293 & 0{,}293 & 0{,}293 & 0{,}293 \\ 0{,}390 & 0{,}390 & 0{,}390 & 0{,}390 & 0{,}390 \\ 0{,}220 & 0{,}220 & 0{,}220 & 0{,}220 & 0{,}220 \\ 0{,}024 & 0{,}024 & 0{,}024 & 0{,}024 & 0{,}024 \\ 0{,}073 & 0{,}073 & 0{,}073 & 0{,}073 & 0{,}073 \end{pmatrix}$$

Každý sloupec této matice je vektor (tzv. stacionární distribuce)

$$\pi^T = (0{,}293; 0{,}390; 0{,}220; 0{,}024; 0{,}073)$$

Překvapení?!

$$P \cdot \pi = \pi$$

Věta (Perron-Frobenius)

Nechť $P = (p_{ij})$ je čtvercová matice řádu n taková, že $p_{ij} \in [0,1]$, $\sum_{i=1}^{n} p_{ij} = 1$, pak

1. *$\lambda = 1$ je vlastní číslo matice P*
2. *Všechny vlastní čísla splňují $|\lambda| \leq 1$*
3. *Existuje vlastní vektor π příslušný vlastnímu čísla 1 takový, že všechny jeho složky jsou nezáporné.*

Matice P se nazývá *stochastická*.

Věta (Perron-Frobenius)

Nechť $P = (p_{ij})$ *je čtvercová matice řádu* n *taková, že* $p_{ij} \in [0, 1]$, $\sum_{i=1}^{n} p_{ij} = 1$, *pak*

1. $\lambda = 1$ *je vlastní číslo matice* P
2. *Všechny vlastní čísla splňují* $|\lambda| \leq 1$
3. *Existuje vlastní vektor* π *příslušný vlastnímu čísla 1 takový, že všechny jeho složky jsou nezáporné.*

Matice P se nazývá *stochastická*.
Problémy:

Vlastní číslo $\lambda = 1$ může být vícenásobné.

Může existovat další vlastní číslo s $|\lambda| = 1$.

Definice

Stochastická matice se nazývá *regulární*, když vlastní číslo jedna je jednoduchý kořen její charakteristické rovnice a pro všechna ostatní vlastní čísla λ platí, že $|\lambda| < 1$.

Definice

Stochastická matice se nazývá *regulární*, když vlastní číslo jedna je jednoduchý kořen její charakteristické rovnice a pro všechna ostatní vlastní čísla λ platí, že $|\lambda| < 1$.

Uvažme čtvercovou matici $Q = (q_{ij})$ řádu n, kde $q_{ij} = \frac{1}{n}$ a vytvořme matici

$$P_\beta = (1-\beta)P + \beta Q.$$

Definice

Stochastická matice se nazývá *regulární*, když vlastní číslo jedna je jednoduchý kořen její charakteristické rovnice a pro všechna ostatní vlastní čísla λ platí, že $|\lambda| < 1$.

Uvažme čtvercovou matici $Q = (q_{ij})$ řádu n, kde $q_{ij} = \frac{1}{n}$ a vytvořme matici

$$P_\beta = (1 - \beta)P + \beta Q.$$

Věta

Pro každou stochastickou matici P, existuje libovolně malé $\beta > 0$ takové, že matice P_β je regulární.

Kde je ta Banachova věta?

Nechť P je regulární stochastická matice řádu n, která má n různých vlastních čísel s příslušnými vlastními vektory $v_1, \ldots, v_n$. Na množině

$$\mathcal{S} = \left\{ (p_1, \ldots, p_n) \mid p_i \in [0,1], \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \right\}$$

definujeme vzdálenost

$$\varrho(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i|,$$

kde

$$x = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i, \qquad y = \sum_{i=1}^{n} b_i v_i$$

Pak $(\mathcal{S}, \varrho)$ je úplný metrický prostor a zobrazení $L\colon \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ dané předpisem $L(x) = Px$ je kontrakce.