Trojný integrál

Zavedení, výpočet a transformace

Petr Liška

Masarykova univerzita

29.4.2021

Uvažme funkci $f(x, y, z)$ definovanou na kvádru

$$V = \{(x, y, z) \mid a \leq x \leq b,\, c \leq y \leq d,\, e \leq z \leq g\},$$

- interval $[a, b]$ rozdělíme na l subintervalů $[x_{i-1}, x_i]$ délky Δx,
- interval $[c, d]$ rozdělíme na m subintervalů $[y_{i-1}, y_i]$ délky Δy,
- interval $[e, g]$ rozdělíme na n subintervalů $[z_{i-1}, z_i]$ délky Δz,
- roviny rovnoběžné se souřadnicovými rovinami, které jdou koncovými body těchto subintervalů, rozdělí kvádr na $l \cdot m \cdot n$ kvádříků

  $$V_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]$$

  každý o objemu $\Delta x \Delta y \Delta z$.

Uvažme funkci $f(x, y, z)$ definovanou na kvádru

$$V = \{(x, y, z) \mid a \leq x \leq b,\, c \leq y \leq d,\, e \leq z \leq g\},$$

- interval $[a, b]$ rozdělíme na l subintervalů $[x_{i-1}, x_i]$ délky Δx,
- interval $[c, d]$ rozdělíme na m subintervalů $[y_{i-1}, y_i]$ délky Δy,
- interval $[e, g]$ rozdělíme na n subintervalů $[z_{i-1}, z_i]$ délky Δz,
- roviny rovnoběžné se souřadnicovými rovinami, které jdou koncovými body těchto subintervalů, rozdělí kvádr na $l \cdot m \cdot n$ kvádříků

  $$V_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]$$

  každý o objemu $\Delta x \Delta y \Delta z$.

$$\text{„objem“} \approx \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f(x^\star_{ijk}, y^\star_{ijk}, z^\star_{ijk}) \Delta x \Delta y \Delta z$$

kde $(x^\star_{ijk}, y^\star_{ijk}, z^\star_{ijk})$ je libovolný bod z kvádříku V_{ijk}.

Trojný integrál na kvádru

Definice

Nechť $f(x, y, z)$ je ohraničená funkce na kvádru V. Trojný (Riemannův) integrál této funkce $f(x, y, z)$ na V je

$$\iiint_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \lim_{l,m,n\to\infty} \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} f(x^\star_{ijk}, y^\star_{ijk}, z^\star_{ijk}) \Delta x \Delta y \Delta z$$

jestliže tato limita existuje.

Věta (Fubini)

Nechť funkce $f(x,y,z)$ je spojitá na kvádru (trojrozměrném intervalu) $V=[a,b]\times[c,d]\times[e,g]$. Pak trojný integrál je

$$
\begin{aligned}
\iiint_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int_a^b \left\{\int_c^d \left(\int_e^g f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y\right\}\mathrm{d}x = \\
&= \int_a^b \left\{\int_e^g \left(\int_c^d f(x,y,z)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z\right\}\mathrm{d}x = \\
&= \int_c^d \left\{\int_a^b \left(\int_e^g f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\right\}\mathrm{d}y = \\
&= \int_c^d \left\{\int_e^g \left(\int_a^b f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}z\right\}\mathrm{d}y = \\
&= \int_e^g \left\{\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y,z)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\right\}\mathrm{d}z = \\
&= \int_e^g \left\{\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\right\}\mathrm{d}z.
\end{aligned}
$$

Definice

Nechť f je funkce definovaná a ohraničená na ohraničené uzavřené souvislé množině $B \subset \mathbb{R}^3$ a nechť V je kvádr takový, že $B \subseteq V$. Definujme na V funkci g předpisem

$$F(x,y,z) = \begin{cases} f(x,\, y,\, z) & \text{je-li } (x,y,z) \in B \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

a předpokládejme, že funkce F je na V integrovatelná. Pak *trojný integrál funkce f na množině B* definujeme vztahem

$$\iiint_M f(x,\, y,\, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_V F(x,\, y,\, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

Věta (Fubini)

Nechť je dána množina v rovině

$$M = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2\colon\ a \le x \le b,\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\},$$

kde $\varphi(x)$, $\psi(x)$ *jsou spojité funkce na intervalu* $[a,b]$ *a* $\varphi(x) \le \psi(x)$, *a množina v prostoru*

$$V \ = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3\colon\ [x,y] \in M,\ \Phi(x,y) \le z \le \Psi(x,y)\},$$

kde $\Phi(x,y)$, $\Psi(x,y)$ *jsou spojité funkce na množině* M *a* $\Phi(x,y) \le \Psi(x,y)$.
Je-li funkce $f(x,y,z)$ *spojitá na množině* V *v prostoru, pak platí*

$$\iiint_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_a^b \left\{ \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \left(\int_{\Phi(x,y)}^{\Psi(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}y \right\} \mathrm{d}x.$$

Transformace trojného integrálu

Definice

Nechť je dáno zobrazení $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ určené rovnicemi

$$x = k(u, v, w), \quad y = l(u, v, w), \quad z = m(u, v, w)$$

kde funkce k a l mají spojité parciální derivace prvního řádu. Pak F se nazývá *spojitě diferencovatelné zobrazení* a determinant

$$\mathcal{J}(u, v, w) = \begin{vmatrix} k_u & k_v & k_w \\ l_u & l_v & l_w \\ m_u & m_v & m_w \end{vmatrix}$$

se nazývá *jakobián* zobrazení F. Jestliže $\mathcal{J}(u, v, w) \neq 0$, pak se toto zobrazení nazývá *regulární*.

Věta

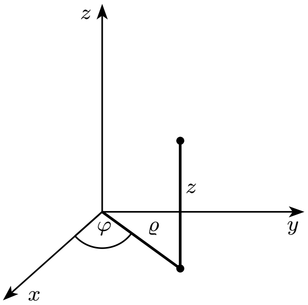
Nechť je dána spojitá funkce f proměnných x, y a z na uzavřené elementární oblasti V. Nechť $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je prosté regulární spojitě diferencovatelné zobrazení zadané rovnicemi

$$x = k(u, v, w), \quad y = l(u, v, w), \quad z = m(u, v, w)$$

a nechť $V = F(B)$. Pak platí

$$\iiint_V f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \\ = \iiint_B f\big(k(u, v, w), l(u, v, w), m(u, v, w)\big)\,|\mathcal{J}(u, v, w)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w.$$

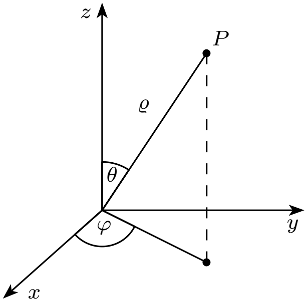
Transformace trojného integrálu do válcových souřadnic



$$x = \varrho \cos \varphi,$$
$$y = \varrho \sin \varphi,$$
$$z = z.$$

$$\mathcal{J} = \begin{vmatrix} x_\varrho & y_\varrho & z_\varrho \\ x_\varphi & y_\varphi & z_\varphi \\ x_z & y_z & z_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\varrho \sin \varphi & \varrho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \varrho.$$

Transformace trojného integrálu do sférických souřadnic



$$x = \varrho \sin\theta \cos\varphi,$$
$$y = \varrho \sin\theta \sin\varphi,$$
$$z = \varrho \cos\theta.$$

$$\mathcal{J} = -\varrho^2 \sin\theta$$