GEOMETRICKÁ ZOBRAZENÍ
sbírka příkladů

Josef Janyška

1. března 2021

Obsah

Řešené úlohy a cvičení

V tomto textu naleznete úlohy k procvičení k textu Geometrická zobrazení. Výsledky početních a teoretických úloh jsou uvedeny hned za zadáním úlohy v závorkách { }. U složitějších konstrukčních úloh je uváděn návod nebo rozbor řešení úlohy. Popis konstrukce a diskusi ponecháváme na čtenáři. Obrázky jsou vytvořeny v programu GeoGebra.

V části 4 textu jsou uvedeny typické planimetrické úlohy, při jejichž řešení se dá využít shodnost, podobnost nebo kruhová inverze. V části 5 jsou rozebrány Pappovy[1] a Apolloniovy[2] úlohy. U složitějších úloh je zpravidla uveden návod na řešení v obecné i speciální poloze a návod, jak se při jejich řešení dají využít geometrická zobrazení. Úlohy označené ♠ jsou konstrukčně složité a stačí proto umět jen rozbor řešení. U ostatních úloh byste měli umět i popis konstrukce a narýsovat řešení.

1 Afinní zobrazení

1.1. V $\mathcal{A}_2$ jsou dány tři body A, B, C v obecné poloze. Ve vhodně zvoleném afinním repéru určete rovnice afinity, která zobrazí A na B, B na C a C na A. Určete také rovnice inverzní afinity. Má tato afinita samodružný bod? Jestliže ano, určete jej.

> { Rovnice afinity závisejí na zvoleném afinním repéru. Bez ohledu na jeho volbu je samodružný bod $T = \frac{1}{3}(A + B + C)$. }

1.2. V $\mathcal{A}_2$ je dán rovnoběžník $ABCD$. Rozhodněte, jaké zobrazení vznikne zobrazením bodů:

a) $A \mapsto B$, $B \mapsto C$, $C \mapsto D$;
b) $A \mapsto A$, $C \mapsto C$, $B \mapsto D$;
c) $A \mapsto A$, $B \mapsto B$, $C \mapsto D$;

[1] Pappos z Alexandrie byl řecký matematik a astronom 4. století, poslední významný matematik starověku.

[2] Apollónios z Pergy byl starověký řecký geometr, matematik a astronom ze 3.-2. století př. n. l. Zabýval se především studem kuželoseček.

d) $B \mapsto B$, $C \mapsto C$, $A \mapsto B$;
e) $A \mapsto B$, $C \mapsto B$, $D \mapsto B$.

{ a) Afinita se samodružným bodem ve středu rovnoběžníka $ABCD$; b) Osová afinita s charakteristikou -1, tj. šikmá osová symetrie podle osy AC ve směru $\overrightarrow{BD}$; c) Elace s osou AB; d) Rovnoběžná projekce na přímku BC ve směru $\overrightarrow{AB}$; e) Konstantní zobrazení na bod B. }

1.3. Určete maticovou rovnici afinního zobrazení $f : \mathcal{A}_3 \to \mathcal{A}_3$ vzhledem k afinnímu repéru $\mathfrak{R} = \langle P; \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \rangle$, jestliže je dán obraz $f(P)$ počátku a obrazy vektorů $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$:

a) $f(P) = [-2; 3; 1]$, $\varphi_f(\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3$, $\varphi_f(\mathbf{u}_2) = 2\mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_3$, $\varphi_f(\mathbf{u}_3) = \mathbf{u}_1$;

b) $f(P) = [1; 2; 3]$, $\varphi_f(\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_2 - 2\mathbf{u}_3$, $\varphi_f(\mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + 2\mathbf{u}_3$, $\varphi_f(\mathbf{u}_3) = -\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2$.

{ a) $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. }

1.4. Určete maticovou rovnici afinního zobrazení $f : \mathcal{A}_3 \to \mathcal{A}_3$ vzhledem k afinnímu repéru $\mathfrak{R} = \langle P; \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \rangle$, jestliže je dán obraz $f(P) = [-2; 3; 1]$ počátku a vektory $\varphi_f(\mathbf{u}_1)$, $\varphi_f(\mathbf{u}_2)$, $\varphi_f(\mathbf{u}_3)$ splňují následující vztahy:

$$\begin{aligned} \varphi_f(\mathbf{u}_1) &= \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_3, \\ \varphi_f(\mathbf{u}_1) + 2\varphi_f(\mathbf{u}_3) &= \mathbf{u}_2, \\ \varphi_f(\mathbf{u}_2) + \varphi_f(\mathbf{u}_3) &= \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_2. \end{aligned}$$

{ $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. }

1.5. Určete maticovou rovnici afinního zobrazení $f : \mathcal{A}_n \to \mathcal{A}_n$ vzhledem k afinnímu repéru $\mathfrak{R} = \langle P; \mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_n \rangle$, je-li :

a) $n = 2$, $\varphi_f(\mathbf{u}_1) = (-1; 1)$, $\varphi_f(\mathbf{u}_2) = (0; 2)$, $B = [-1; 0]$, $f(B) = [1; 1]$;

b) $n = 3$, $\varphi_f(\mathbf{u}_1) = (-1; 0; 1)$, $\varphi_f(\mathbf{u}_2) = (0; -2; -1)$, $\varphi_f(\mathbf{u}_3) = (2; 3; 1)$, $B = [-1; 2; 1]$, $f(B) = [2; -5; 4]$;

c) $n = 3$, $\varphi_f(\mathbf{u}_1) = (-1; 2; 3)$, $\varphi_f(\mathbf{u}_2) = (0; 2; -2)$; $\varphi_f(\mathbf{u}_3) = (3; -1; 1)$, $B = [1; -1; 0]$, $f(B) = [-2; 0; 3]$.

{ a) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$. }

1.6. Afinní zobrazení f na $\mathcal{A}_3$ je dáno obrazem jednoho bodu a obrazy tří lineárně nezávislých vektorů. Určete rovnice f v daném afinním repéru, ve kterém jsou body a vektory zadány:

a) $[1;0;1] \mapsto [4;-6;4]$, $(1;2;0) \mapsto (7;8;-14)$,
$(2;-1;1) \mapsto (4;-13;10)$, $(-1;2;1) \mapsto (1;8;-11)$;

b) $[0;1;1] \mapsto [-14;10;13]$, $(0;2;1) \mapsto (-21;13;17)$,
$(1;-1;2) \mapsto (-24;10;20)$, $(1;2;-1) \mapsto (-6;7;5)$;

c) $[0;0;0] \mapsto [1;0;-3]$, $(0;1;1) \mapsto (2;4;4)$,
$(1;0;0) \mapsto (-1;-3;-3)$, $(2;1;0) \mapsto (1;-1;-3)$;

d) $[0;0;0] \mapsto [1;-1;0]$, $(1;2;0) \mapsto (1;-1;0)$,
$(0;1;-1) \mapsto (1;1;-1)$, $(-1;1;2) \mapsto (0;1;1)$.

{ a) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & -4 \\ 0 & -7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -5 & -11 \\ 4 & 4 & 5 \\ 6 & 4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$;

c) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & -4 \\ 0 & -7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/5 & 3/5 & -2/5 \\ -9/5 & 2/5 & -3/5 \\ 2/5 & -1/5 & 4/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. }

1.7. Pro zobrazení z Cvičení 1.6 a), b) a c) určete samodružné body, charakteristickou rovnici, vlastní čísla a vlastní směry směry.

{ a) $S = [-\frac{7}{8}; \frac{3}{8}; \frac{13}{16}]$, $\lambda^3 - 11\lambda^2 + 15\lambda + 27 = 0$, $\lambda_1 = -1$, $\mathbf{u}_1 = (-2;4;7)$, $\lambda_2 = 3$, $\mathbf{u}_2 = (-2;0;1)$, $\lambda_3 = 9$, $\mathbf{u}_2 = (2;-6;7)$;
b) Nemá samodružný bod, $\lambda^3 - 6\lambda^2 - 11\lambda - 6 = 0$, $\lambda_1 = 1$, $\mathbf{u}_1 = (2;-1;-1)$, $\lambda_2 = 2$, $\mathbf{u}_2 = (3;-1;-2)$, $\lambda_3 = 3$, $\mathbf{u}_3 = (7;-3;-5)$;
c) $S = [\frac{1}{8}; -\frac{5}{8}; -\frac{11}{16}]$, $\lambda^3 - 11\lambda^2 + 15\lambda + 27 = 0$, $\lambda_1 = -1$, $\mathbf{u}_1 = (-2;4;7)$, $\lambda_2 = 3$, $\mathbf{u}_2 = (-2;0;1)$, $\lambda_3 = 9$, $\mathbf{u}_2 = (-2;-6;7)$. }

1.8. Ztransformujte rovnice afinního zobrazení

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

do nových reperů $\mathfrak{R} = \langle P; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$ na $\mathcal{A}_2$ a $\mathfrak{R}' = \langle Q; \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3 \rangle$ na $\mathcal{A}_3$, kde ve starých souřadnicích je $P = [1; 1]$, $\mathbf{e}_1 = (1; 1)$, $\mathbf{e}_2 = (2; -1)$, $Q = [2; 1; 1]$, $\mathbf{d}_1 = (0; 1; 2)$, $\mathbf{d}_2 = (2; 1; 2)$, $\mathbf{d}_3 = (3; 1; 0)$.

$$\left\{ \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \tfrac{1}{4} \begin{pmatrix} 11 & 1 \\ -9 & -3 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \tfrac{1}{4} \begin{pmatrix} 30 \\ -34 \\ 20 \end{pmatrix} . \right\}$$

1.9. Určete rovnice afinního zobrazení, které má bod B jako samodružný bod a vektor $\mathbf{u}_i$ je vlastní vektor pro vlastní číslo λ_i:

a) $B = [2; 3; 3]$, $\mathbf{u}_1 = (1; 1; 0)$, $\lambda_1 = -2$,
$\mathbf{u}_2 = (0; 1; 1)$, $\lambda_2 = -2$, $\mathbf{u}_3 = (1; 1; 2)$, $\lambda_3 = 4$;

b) $B = [1; 0; 2]$, $\mathbf{u}_1 = (1; 0; 0)$, $\lambda_1 = 2$,
$\mathbf{u}_2 = (1; 1; 0)$, $\lambda_2 = 2$, $\mathbf{u}_3 = (0; 1; 2)$, $\lambda_3 = -1$;

c) $B = [\sqrt{2}; 0; 0]$, $\mathbf{u}_1 = (1; 1; 0)$, $\lambda_1 = 2$,
$\mathbf{u}_2 = (1; -1; 0)$, $\lambda_2 = 2$, $\mathbf{u}_3 = (0; 1; 2)$, $\lambda_3 = -1$;

d) $B = [1; 2; 3]$, $\mathbf{u}_1 = (2; 1; 0)$, $\lambda_1 = 1$,
$\mathbf{u}_2 = (1; 0; -1)$, $\lambda_2 = 1$, $\mathbf{u}_3 = (1; 2; 1)$, $\lambda_3 = -1$;

e) $B = [6; 0; 7]$, $\mathbf{u}_1 = (-1; 1; 2)$, $\lambda_1 = -1$,
$\mathbf{u}_2 = (-2; 1; 0)$, $\lambda_2 = -2$, $\mathbf{u}_3 = (1; 0; 1)$, $\lambda_3 = 3$.

$$\{ \text{ a) } \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix};$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix};$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{d) } \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix};$$

$$\text{e) } \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 22 & -6 \\ -1 & -4 & 1 \\ 8 & 16 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} . \}$$

1.10. Afinní zobrazení $f : \mathcal{A}_2 \to \mathcal{A}_2$ je dáno obrazy tří bodů v obecné poloze. Určete rovnice tohoto zobrazení:

a) $[1; 1] \mapsto [-7; 5]$, $[3; -2] \mapsto [5; -3]$, $[-1; -1] \mapsto [11; -7]$;
b) $[2; 1] \mapsto [-16; 7]$, $[3; 5] \mapsto [-33; 17]$, $[2; 0] \mapsto [-12; \frac{14}{3}]$;
c) $[2; 1] \mapsto [\frac{4}{3}; \frac{2}{3}]$, $[3; 1] \mapsto [3; 1]$, $[2; 3] \mapsto [\frac{4}{3}; \frac{4}{3}]$.

{ a) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$;
b) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ \frac{2}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -10 \\ \frac{10}{3} \end{pmatrix}$;
c) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$. }

1.11. Podle počtu samodružných bodů a vlastních směrů určete u zobrazení z Úlohy 1.10 o jaké zobrazení se jedná.

{ a) Zobrazení má přímku samodružných bodů $p \equiv 2\,x + 3\,y - 1 = 0$. Charakteristická rovnice je $\lambda^2 - \lambda = 0$ s kořeny $\lambda_1 = 1$ a $\lambda_2 = 0$. Vlastní vektor odpovídající λ_1 je směrový vektor přímky p. Vlastní vektor $\mathbf{u} = (-2; 1)$ odpovídající λ_2 generuje jádro asociovaného lineárního zobrazení. Jedná se o rovnoběžnou projekci na přímku p ve směru vektoru $\mathbf{u}$.
b) Zobrazení má přímku samodružných bodů $o \equiv x + 2\,y + 5 = 0$. Charakteristická rovnice je $\lambda^2 - \frac{4}{3}\lambda + \frac{1}{3} = 0$ s kořeny $\lambda_1 = 1$ a $\lambda_2 = \frac{1}{3}$. Vlastní vektor odpovídající λ_1 je směrový vektor přímky o. Vlastní vektor odpovídající λ_2 je $\mathbf{u} = (-3; 1)$ Jedná se o osovou afinitu s osou o, směrem určeným vektorem $\mathbf{u}$ a charakteristikou λ_2.
c) Zobrazení má přímku samodružných bodů $o \equiv x - 2\,y - 1 = 0$. Charakteristická rovnice je $\lambda^2 - 2\,\lambda + 1 = 0$ s kořeny $\lambda_{1,2} = 1$. Vlastní vektory odpovídající $\lambda_{1,2}$ jsou směrové vektory přímky o. Jedná se o elaci s osou o. }

1.12. Afinní zobrazení $f : \mathcal{A}_3 \to \mathcal{A}_3$ je dáno obrazy čtyř bodů v obecné poloze. Určete rovnice tohoto zobrazení:

a) $[1;1;1] \mapsto [3;-5;-4]\,,\qquad [2;0;1] \mapsto [6;-6;-3]\,,$
$[0;1;1] \mapsto [2;-7;-6]\,,\qquad [0;0;-1] \mapsto [0;-2;-3]\,;$

b) $[1;-1;1] \mapsto [2;-4;2]\,,\qquad [0;2;-2] \mapsto [12;-4;-28]\,,$
$[2;-3;-1] \mapsto [2;-14;2]\,,\qquad [3;-2;0] \mapsto [14;-18;-16]\,;$

c) $[1;-1;3] \mapsto [5;-1;0]\,,\qquad [0;-1;1] \mapsto [-2;0;3]\,,$
$[-2;0;5] \mapsto [0;0;-1]\,,\qquad [1;1;-2] \mapsto [10;-2;1]\,;$

d) $[1;-1;0] \mapsto [4;11;9]\,,\qquad [1;0;-1] \mapsto [-2;3;-1]\,,$
$[1;1;1] \mapsto [1;4;1]\,,\qquad [0;1;-1] \mapsto [-6;-5;-13]\,;$

e) $[1;1;0] \mapsto [-2;1;-3]\,,\qquad [0;1;1] \mapsto [0;1;-5]\,,$
$[1;0;1] \mapsto [4;9;7]\,,\qquad [1;1;1] \mapsto [1;4;1]\,;$

f) $[1;1;1] \mapsto [2;-1;2]\,,\qquad [2;0;1] \mapsto [2;-5;0]\,,$
$[1;2;0] \mapsto [4;2;2]\,,\qquad [0;1;1] \mapsto [1;1;3]\,;$

g) $[1;1;1] \mapsto [1;1;1]\,,\qquad [1;2;3] \mapsto [-7;-8;-9]\,,$
$[2;0;3] \mapsto [3;-16;0]\,,\qquad [-1;-2;3] \mapsto [-11;-16;21]\,;$

h) $[1;2;3] \mapsto [-1;0;1]\,,\qquad [-1;2;-3] \mapsto [-2;-1;-5]\,,$
$[2;0;1] \mapsto [0;1;3]\,,\qquad [0;3;0] \mapsto [-1;3;1]\,.$

{ a) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -5 \end{pmatrix};$

b) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5 & -1 \\ -6 & 0 & 2 \\ -12 & -10 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix};$

c) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & \frac{3}{2} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{7}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{7}{2} \end{pmatrix};$

d) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix};$

e) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix};$

f) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$

g) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -2 & 3 & -6 \\ -3 & -6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix};$

h) $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/5 & 1/2 & -3/10 \\ 5 & 7/2 & -3/2 \\ 6 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5/2 \\ 15/2 \\ 8 \end{pmatrix}. \}$$

1.13. Pro zobrazení z Cvičení 1.12 a), b), d), f) a g) určete samodružné body, charakteristickou rovnici, vlastní čísla a vlastní vektory.

{ a) Přímka samodružných bodů $X = [2; 1; 0] + t(1; 1; 1)$, $-\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$, $\lambda_1 = 1$, $\mathbf{u}_1 = (1; 1; 1)$, $\lambda_2 = -1$, $\mathbf{u}_2 = (0; 1; 1)$, $\lambda_3 = 2$, $\mathbf{u}_3 = (2; 0; 1)$;
b) $S = [0; 0; 0]$, $\lambda^3 - 12\lambda^2 + 70\lambda - 100 = 0$, $\lambda_1 = 2$, $\mathbf{u}_1 = (4; -2; 9)$, $\lambda_{2,3} = 5 \pm 5\,i$;
d) $S = [2; 3; 3]$, $\lambda^3 - 12\lambda - 16 = 0$, $\lambda_{1,2} = -2$, $\mathbf{u}_1 = (1; 1; 0)$, $\mathbf{u}_2 = (1; 0; -1)$, $\lambda_3 = 4$, $\mathbf{u}_3 = (1; 1; 2)$;
f) $S = [-\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}]$, $-\lambda^3 + 4\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$, $\lambda_1 = 2$, $\mathbf{u}_1 = (-1; 1; 2)$, $\lambda_{2,3} = 1 \pm \sqrt{2}\,i$;
g) $S = [1; 1; 1]$, $-\lambda^3 + 7\lambda^2 + 49\lambda - 343 = 0$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 7$, $\mathbf{u}_1 = (-2; 1; 0)$, $\mathbf{u}_2 = (-3; 0; 1)$, $\lambda_3 = -7$, $\mathbf{u}_3 = (1; 2; 3)$. }

1.14. Afinitu
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$
v $\mathcal{A}_2$ rozložte na základní afinity.

1.15. Afinitu
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$
v $\mathcal{A}_3$ rozložte na základní afinity.

2 Shodná a podobná zobrazení

2.1. Jako symetrii rovinného útvaru v euklidovské rovině rozumíme shodnost, která zobrazí daný útvar na sebe. Grupa symetrií daného útvaru je potom množina všech symetrií tohoto útvaru spolu s operací skládání zobrazení.

Popište grupu symetrií (určete počet prvků grupy, počet středových a osových symetrií v grupě) následujících rovinných útvarů:
a) Rovnostranného trojúhelníka.
b) Čtverce.
c) Obdélníka o hranách a, b, $a \neq b$.
d) Pravidelného 5-úhelníku..
e) Pravidelného n-úhelníku ($n \geq 6$).

f) Elipsy.
g) Hyperboly.
h) Paraboly.
ch) Kružnice.
i) Kosočtverce.
j)Kosodélníku.
k) Srdce (karetní herce).

{ a) Grupa symetrií má 6 prvků, z toho jsou 3 osové symetrie, žádná středová symetrie.
b) Grupa symetrií má 8 prvků, z toho jsou 4 osové symetrie, jedna středová symetrie.
c) Grupa symetrií má 4 prvky, z toho jsou 2 osové symetrie, jedna středová symetrie.
d) Grupa symetrií má 10 prvků, z toho je 5 osových symetrií, žádná středová symetrie.
e) Grupa symetrií má $2n$ prvků, z toho je n osových symetrií, Pro n sudé je v grupě jedna středová symetrie, pro n liché není v grupě žádná středová symetrie.
f) Grupa symetrií elipsy má 4 prvky - identitu, dvě osové symetrie podle os elipsy a jednu středovou symetrii se středem ve středu elipsy.
g) Grupa symetrií hyperboly má 4 prvky - identitu, dvě osové symetrie podle os hyperboly a jednu středovou symetrii se středem ve středu hyperboly.
h) Grupa symetrií paraboly má 2 prvky - identitu a osovou symetrii podle osy paraboly.
ch) Grupa symetrií kružnice má nekonečně mnoho prvků - identitu, otočení kolem středu kružnice o libovolný úhel (zahrnuje i středovou symetrii), osové symetrie podle všech přímek procházejících středem kružnice.
i) Grupa symetrií kosočtverce má 4 prvky - identitu, dvě osové symetrie a jednu středovou symetrii.
j) Grupa symetrií kosodélníku má 2 prvky - identitu a jednu středovou symetrii.
k) Grupa symetrií srdce má 2 prvky - identitu a jednu osovou symetrii.
}

2.2. V $\mathcal{E}_2$ je dán rovnostranný trojúhelník ABC.

a) Určete, jaké zobrazení vznikne složením otočení (v daném pořadí vždy ve směru hodinových ručiček) kolem bodu A o úhel α, kolem bodu B o úhel β a kolem bodu C o úhel γ. Řešte konstrukčně a zobrazte body A, B, C ve výsledném zobrazení.

b) Určete, jaké zobrazení vznikne složením středových symetrií (v daném pořadí) se středem v bodech A a B. Řešte konstrukčně a zobrazte body A, B, C ve výsledném zobrazení.

c) Určete, jaké zobrazení vznikne složením středových symetrií (v daném pořadí) se středem v bodech A, B a C. Řešte konstrukčně a zobrazte body A, B, C ve výsledném zobrazení.

d) Určete, jaké zobrazení vznikne složením (v daném pořadí) osových symetrií podle přímek a, b. Řešte konstrukčně a zobrazte body A, B, C ve výsledném zobrazení.

e) Určete, jaké zobrazení vznikne složením (v daném pořadí) osových symetrií podle přímek a, b, c. Řešte konstrukčně a zobrazte body A, B, C ve výsledném zobrazení.

{ a) Středová symetrie se středem $S = \frac{1}{2}(A + C)$.
b) Posunutí o vektor $2\overrightarrow{AB}$.
c) Středová symetrie se středem $S = C + \overrightarrow{BA}$.
d) Otočení se středem C o úhel $2\gamma = 120°$ (ve směru hodinových ručiček).
e) Posunutá osová symetrie - posunutí o vektor $2\overrightarrow{CC_1}$ (C_1 je střed strany AB) složené s osovou symetrií podle osy o, $B \in o$ a $o \parallel b$. }

2.3. V $\mathcal{E}_2$ je dán čtverec $ABCD$. Rozhodněte, jaké zobrazení je dáno:
a) složením osových symetrií podle os AB a AC (v tomto pořadí);
b) obrazy $f(A) = B$, $f(B) = C$, $f(C) = D$;
c) složením osových symetrií podle os AB a CD;
d) obrazy $f(A) = A$, $f(B) = D$, $f(C) = C$;
e) složením středových symetrií podle středů A a C (v tomto pořadí);
f) obrazy $f(A) = C$, $f(B) = D$, $f(C) = A$.

a) Otočení kolem bodu A o 90 stupňů proti směru hodinových ručiček.
b) Otočení kolem středu čtverce o 90 stupňů proti směru hodinových ručiček.
c) Posunutí o vektor $2\overrightarrow{AD}$.
d) Osová symetrie podle úhlopříčky AC.
e) Posunutí o vektor $2\overrightarrow{AC}$,
f) Středová symetrie podle středu čtverce. }

2.4. V $\mathcal{E}_2$ je dán pravidelný 5-úhelník $ABCDE$. Rozhodněte, jaké zobrazení je dáno:
a) složením osových symetrií podle os AB a AC (v tomto pořadí);
b) obrazy $f(A) = B$, $f(B) = C$, $f(D) = E$;
c) složením osových symetrií podle os AB a CE;
d) obrazy $f(A) = B$, $f(C) = E$, $f(D) = D$;
e) složením středových symetrií podle středů A a C (v tomto pořadí).

a) Otočení kolem bodu A o 54 stupňů proti směru hodinových ručiček.
b) Otočení kolem středu kružnice opsané o 72 stupňů proti směru hodinových ručiček.
c) Posunutí o vektor kolmý na stranu AB.
d) Osová symetrie podle kolmice spuštěné z bodu D na stranu AB.
e) Posunutí o vektor $2\overrightarrow{AC}$ }

2.5. V $\mathcal{E}_2$ je dán pravidelný 6-úhelník $ABCDEF$. Rozhodněte, jaké zobrazení je dáno
a) složením osových symetrií podle os AB a AC (v tomto pořadí);
b) obrazy $f(A) = C$, $f(B) = D$, $f(D) = F$;
c) složením osových symetrií podle os AB a CF (v tomto pořadí);
d) obrazy $f(A) = A$, $f(B) = F$, $f(C) = E$;
e) složením středových symetrií podle středů A a B (v tomto pořadí).

a) Otočení kolem bodu A o 60 stupňů proti směru hodinových ručiček.
b) Otočení kolem středu 6-úhelníka o 120 stupňů proti směru hodinových ručiček.
c) Posunutí o vektor $\overrightarrow{AE}$.
d) Osová symetrie podle osy AD.
e) Posunutí o vektor $2\,\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EC}$. }

2.6. Dokažte, že zobrazení, které je dáno obrazy tří bodů v obecné poloze, je shodnost a rozložte ji na osové souměrnosti, jestliže $[1;1] \mapsto [-1;3]$, $[1;-3] \mapsto [-5;3]$, $[6;1] \mapsto [-1;-2]$.

{ $o_1 : x - y + 2 = 0; h_1 : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$,
$o_2 : y - 3 = 0\,,\ h_2 : \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$,
$f = h_2 \circ h_1$ má rovnice $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$; $S = [1;3]$, $\lambda_{1,2} = \pm i$; otočení se středem v bodě S o 90 stupňů. }

2.7. V rovině $\mathcal{E}_2$ je dána osová symetrie osou o. Určete její rovnice, je-li dáno:
a) $o \equiv x - 2y + 1 = 0$;
b) $o \equiv 2x + y + 1 = 0$.

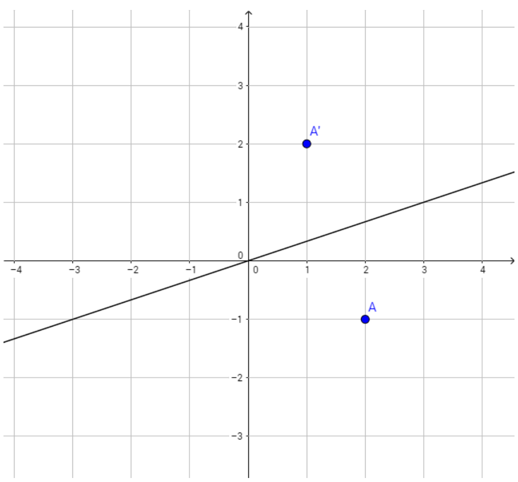
{ $o_1 \equiv \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2/5 \\ 2/5 \end{pmatrix}$;
$o_2 \equiv \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/5 & -4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4/5 \\ -2/5 \end{pmatrix}$. }

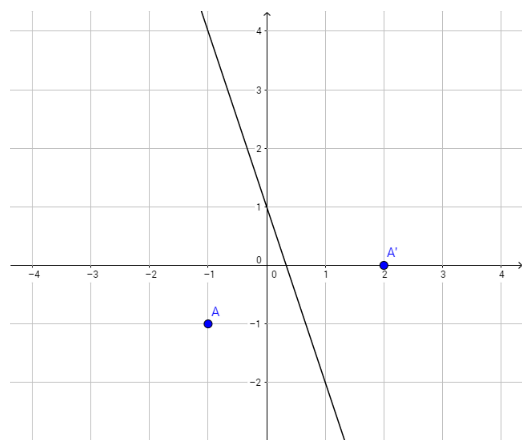
2.8. V rovině $\mathcal{E}_2$ je dána osová symetrie, která zobrazí bod A na bod A'. Určete její rovnice je-li dáno:
a) $A = [0;0]\,, \quad A' = [3;3]$;
b) $A = [0;-1]\,, \quad A' = [3;1]$.

$$\{\; o_1 \equiv \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix};$$
$$o_2 \equiv \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/13 & -12/13 \\ -12/13 & 5/13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 27/13 \\ 18/13 \end{pmatrix}. \;\}$$

2.9. V rovině $\mathcal{E}_2$ jsou dány dvě osové symetrie Obrázkem 2.1. Určete jejich rovnice.

$$\{\; o_1 \equiv \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 & 3/5 \\ 3/5 & -4/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix};$$
$$o_2 \equiv \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/5 & -3/5 \\ -3/5 & 4/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3/5 \\ 1/5 \end{pmatrix}; \;\}$$





Obrázek 2.1: K Úloze 2.9

2.10. V rovině $\mathcal{E}_2$ jsou dány osové symetrie o_1, která zobrazuje bod A na bod A', a o_2, která zobrazuje bod B na bod B'. Určete jejich rovnice, rovnice složených zobrazení $o_2 \circ o_1$ a $o_1 \circ o_2$. Určete, co jsou tato složená zobrazení.
a) $A = [1;-2]$, $A' = [3;2]$, $B = [2;-1]$, $B' = [1;2]$;
b) $A = [1;-2]$, $A' = [3;2]$, $B = [0;1]$, $B' = [2;0]$;
c) $A = [-1;-1]$, $A' = [1;1]$, $B = [1;3]$, $B' = [-1;1]$.

$$\{\; \text{a)}\; o_1 \equiv \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ -4/5 & -3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4/5 \\ 8/5 \end{pmatrix};$$
$$o_2 \equiv \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/5 & 3/5 \\ 3/5 & -4/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix};$$

$o_2 \circ o_1 \equiv \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8/5 \\ -4/5 \end{pmatrix};$
$o_1 \circ o_2 \equiv \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4/5 \\ 8/5 \end{pmatrix}.$
Zobrazení $o_2 \circ o_1$ je otočení kolem bodu $S = [6/5; 2/5]$ o úhel $\alpha = 90°$ po směru hodinových ručiček a zobrazení $o_1 \circ o_2$ je otočení kolem bodu $S = [6/5; 2/5]$ o úhel $\alpha = 90°$ proti směru hodinových ručiček.
b) $o_1 \equiv \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ -4/5 & -3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4/5 \\ 8/5 \end{pmatrix};$
$o_2 \equiv \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/5 & 4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6/5 \\ -3/5 \end{pmatrix};$
$o_2 \circ o_1 \equiv o_1 \circ o_2 \equiv \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$
Obě zobrazení $o_2 \circ o_1$ a $o_1 \circ o_2$ jsou totožná a je to středová symetrie se středem $S = [1; 1/2]$.
c) $o_1 \equiv \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix};$
$o_2 \equiv \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix};$
$o_2 \circ o_1 \equiv \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix};$
$o_1 \circ o_2 \equiv \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$
Zobrazení $o_2 \circ o_1$ je posunutí o vektor $\mathbf{u} = (2; 2)$ a zobrazení $o_1 \circ o_2$ je posunutí o vektor $\mathbf{u} = (-2; -2)$. }

2.11. Jako symetrii prostorového útvaru v euklidovském prostoru rozumíme shodnost, která zobrazí daný útvar na sebe. Grupa symetrií daného útvaru je potom množina všech symetrií tohoto útvaru spolu s operací skládání zobrazení.

Popište grupu symetrií (určete počet prvků grupy, počet středových, osových a rovinných symetrií v grupě) následujících prostorových útvarů:
a) Pravidelného 4-stěnu.
b) Krychle.
c) Pravoúhlého hranolu o délkách hran a, a, b, $a \neq b$.
d) Pravoúhlého kvádru o délkách hran a, b, c, $a \neq b \neq c \neq a$.
e) Pravidelného 8-stěnu.
f) Trojosého elipsoidu (délky všech tří poloos jsou navzájem různé).
g) Trojosého hyperboloidu (délky všech tří poloos jsou navzájem různé).
h) Eliptického nerotačního paraboloidu.
ch) Hyperbolického paraboloidu.
i) Kulové plochy.

{ a) Grupa symetrií pravidelného 4-stěnu má 24 prvků, z toho je 6 rovinných symetrií, 3 osové symetrie a žádná středová symetrie.
b) Grupa symetrií krychle má 48 prvků, z toho je 9 rovinných symetrií, 9 osových symetrií a jedna středová symetrie.
c) Grupa symetrií hranolu má 16 prvků, z toho je 5 rovinných symetrií, 5 osových symetrií a jedna středová symetrie.
d) Grupa symetrií kvádru má 8 prvků, z toho jsou 3 rovinné symetrie, 3 osové symetrie a jedna středová symetrie.
e) Grupa symetrií pravidelného 8-stěnu je totožná s grupou symetrií krychle (jsou to duální pravidelná tělesa).
f) Grupa symetrií trojosého elipsoidu má 8 prvků - identitu, tři rovinné symetrie podle rovin procházejících středem a obsahujících vždy dvě osy elipsoidu, 3 osové symetrie podle os elipsoidu a jednu středovou symetrii se středem ve středu elipsoidu.
g) Grupa symetrií trojosého hyperboloidu má 8 prvků - identitu, 3 rovinné symetrie podle rovin procházejících středem a obsahujících vždy dvě osy hyperboloidu, 3 osové symetrie podle os hyperboloidu a jednu středovou symetrii se středem ve středu hyperboloidu.
h) Grupa symetrií eliptického nerotačního paraboloidu má 4 prvky - identitu, dvě rovinné symetrie podle rovin obsahujících osu papaboloidu a 1 osovou symetrii podle osy papaboloidu.
ch) Grupa symetrií hyperbolického paraboloidu má 4 prvky - identitu, dvě rovinné symetrie symetrie podle rovin obsahujících osu paraboloidu a 1 osovou symetrii podle osy paraboloidu.
i) Grupa symetrií kulové plochy má nekonečně mnoho prvků - identitu, otočení kolem libovolné přímky procházející středu kulové plochy o libovolný úhel, rovinné symetrie podle všech rovin procházejících středem kulové plochy, symetrie podle středu kulové plochy. }

2.12. V euklidovském prostoru $\mathcal{E}_3$ je dána středová symetrie s se středem v bodě S a nenulový vektor $\mathbf{u}$. Jaké zobrazení vznikne složením středové symetrie s a posunutí $t_{\mathbf{u}}$ (v libovolném pořadí)?

Řešení: Středová symetrie se středem v bodě S se dá vyjádřit jako $s \equiv X' = -X + 2S$ a posunutí o vektor $\mathbf{u}$ má vyjádření $t_{\mathbf{u}} \equiv X' = X + \mathbf{u}$. Potom $s \circ t_{\mathbf{u}} \equiv X' = -X + (2S - \mathbf{u})$, což je středová symetrie se středem v bodě $S' = S - \frac{1}{2}\mathbf{u}$. Podobně $t_{\mathbf{u}} \circ s \equiv X' = -X + (2S + \mathbf{u})$, což je středová symetrie se středem v bodě $S' = S + \frac{1}{2}\mathbf{u}$.

2.13. V euklidovském prostoru $\mathcal{E}_3$ je dána středová symetrie s se středem v bodě S a symetrie r_ρ podle roviny ρ. Jaké zobrazení vznikne složením středové symetrie s a symetrie r_ρ (v libovolném pořadí)?

Řešení: Úlohu vyřešíme ve vhodně zvoleném kartézském repéru, který zvolíme tak, že rovina ρ je souřadná rovina xy a střed S leží na ose z a má souřadnice $S = [0; 0; c]$. Potom symetrie podle roviny ρ má vyjádření $[x; y; z] \mapsto [x; y; -z]$ a středová symetrie s má vyjádření $[x; y; z] \mapsto [-x; -y; -z + 2c]$. Potom složené zobrazení $r_\rho \circ s$ má vyjádření

$$[x; y; z] \mapsto [-x; -y; -z + 2c] \mapsto [-x; -y; z - 2c],$$

což je pro $c = 0$ symetrie podle přímky, kterou je osa z. Pro $c \neq 0$ je to posunutá osová symetrie s osou z a posunutím ve směru osy z o vektor $(0; 0; -2c)$.

Podobně, složené zobrazení $s \circ r_\rho$ má vyjádření

$$[x; y; z] \mapsto [x; y; -z] \mapsto [-x; -y; z + 2c],$$

což je pro $c = 0$ opět symetrie podle přímky, kterou je osa z. Pro $c \neq 0$ je to posunutá osová symetrie s osou z a posunutím ve směru osy z o vektor $(0; 0; 2c)$.

Odpověď tedy je: Složením středové symetrie se středem symetrie v bodě S a symetrie podle roviny ρ je, v případě, že $S \in \rho$, symetrie podle kolmice vedené bodem S na rovinu ρ. Pokud $S \notin \rho$, je složené zobrazení posunutá osová symetrie, která je složením osové symetrie,jejíž osa je kolmice spuštěná z bodu S na rovinu ρ, a posunutí ve směru kolmém na rovinu ρ o vektor, jehož délka je dvojnásobek $v(S, \rho)$. Orientace posunutí závisí na pořadí skládání daných zobrazení.

2.14. V euklidovském prostoru $\mathcal{E}_3$ je dána středová symetrie s se středem v bodě S a symetrie o podle přímky o. Jaké zobrazení vznikne složením středové symetrie s a osové symetrie o (v libovolném pořadí)?

Řešení: Úlohu vyřešíme ve vhodně zvoleném kartézském repéru, který zvolíme tak, že osa o je souřadná osa z a střed S leží na ose x a má souřadnice $S = [c; 0; 0]$. Potom symetrie podle osy o má vyjádření $[x; y; z] \mapsto [-x; -y; z]$ a středová symetrie s má vyjádření $[x; y; z] \mapsto [-x + 2c; -y; -z]$. Potom složené zobrazení $o \circ s$ má vyjádření

$$[x; y; z] \mapsto [-x + 2c; -y; -z] \mapsto [x - 2c; y; -z],$$

což je pro $c = 0$ (tj. $S \in o$) symetrie podle roviny xy. Pro $c \neq 0$ (tj. $S \notin o$) je to posunutá symetrie podle roviny, kde rovina symetrie je rovina xy, a posunutím ve směru osy x o vektor $(-2c; 0; 0)$.

Podobně, složené zobrazení $s \circ o$ má vyjádření

$$[x; y; z] \mapsto [-x; -y; z] \mapsto [x + 2c; y; -z],$$

což je pro $c = 0$ opět symetrie podle roviny xy. Pro $c \neq 0$ je to posunutá symetrie podle roviny xy složená ze symetrie podle roviny xy a posunutím ve směru osy x o vektor $(2c; 0; 0)$.

Odpověď tedy je: Složením středové symetrie se středem symetrie v bodě S a symetrie podle přímky o je, v případě, že $S \in o$, symetrie podle roviny vedené bodem S kolmo na přímku o. Pokud $S \notin o$ je složené zobrazení posunutá symetrie podle roviny, která je složením symetrie podle roviny, která je kolmá na přímku o a prochází bodem S, a posunutí o vektor $\pm 2\overrightarrow{PS}$, kde P je pata kolmice spuštěné z S na o. Orientace posunutí závisí na pořadí skládání daných zobrazení.

2.15. V prostoru $\mathcal{E}_3$ je dána symetrie podle roviny r_{rho} rovinou ρ. Určete její rovnice, je-li dáno:
a) $\rho_1 \equiv x + y + z + 2 = 0$;
b) $\rho_2 \equiv x - y + z - 1 = 0$.

$$\{\ r_{\rho_1} \equiv \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \tfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \tfrac{1}{3} \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix};$$
$$r_{\rho_2} \equiv \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \tfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \tfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.\ \}$$

2.16. V prostoru $\mathcal{E}_3$ je dána symetrie podle roviny r_{ρ_3}, která zobrazí bod $A = [1; 0; -2]$ na bod $A' = [3; 2; 0]$. Určete její rovnice.

$$\{\ rs_3 \equiv \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \tfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \tfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}.\ \}$$

2.17. Určete rovnice $r_{\rho_i} \circ r_{\rho_j}$, $i \neq j$; $i, j = 1, 2, 3$, pro všechny rovinné symetrie z Úloh 2.15 a 2.16. Klasifikujte složené zobrazení.

{Víme, že složením dvou rovinných symetrií je posunutí (v případě rovnoběžných rovin symetrie) nebo otočení kolem společné přímky o úhel, jehož velikost je dvojnásobná, než je odchylka různoběžných rovin symetrie. Kontrolu správnosti můžete udělat tak, že pro složené zobrazení spočtete množinu samodružných bodů a kořeny charakteristické rovnice. V případě různoběžných rovin symetrie je množina samodružných bodů právě průnik rovin symetrie a pro komplexně sdružené kořeny charakteristické rovnice platí $\lambda_{23} = \cos(\alpha) \pm \sin(\alpha)$, kde α je dvojnásobek velikosti odchylky rovin symetrie.

Dostaneme $r_{\rho_2} \circ r_{\rho_1} \equiv \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 4 & -8 \\ -4 & -7 & -4 \\ -8 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 \\ -26 \\ 2 \end{pmatrix}$; zobrazení je otočení kolem přímky $\rho_1 \cap \rho_2$ o úhel $\phi = 2\ \arccos(1/3)$. Opravdu, pro roviny ρ_1 , ρ_2 dostaneme odchylku splňující $\cos(\alpha) = \frac{1}{3}$, tj. $\alpha = \arccos(1/3)$ a velikost otočení je $\phi = 2 \arccos(1/3)$. Na druhé straně má charakteristická rovnice zobrazení $r_{\rho_2} \circ r_{\rho_1}$ kořeny 1, $-\frac{7}{9} \pm \frac{\sqrt{128}}{9} i$, tj. $\cos(\phi) = -\frac{7}{9}$, kde ϕ velikost úhlu otáčení. Tedy $\phi = \arccos(-7/9)$ a musí být $\phi = 2\alpha$, tj. $\arccos(-7/9) = 2\arccos(1/3)$. Opravdu, z vlastnosti funkce kosinus, dostaneme $\cos(2\alpha) = \cos(2\arccos(1/3)) = 2\cos^2(\arccos(1/3)) - 1 = 2.\frac{1}{9} - 1 = -\frac{7}{9} = \cos(\phi)$.

Podobně $r_{\rho_1} \circ r_{\rho_2} \equiv \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -4 & -8 \\ 4 & -7 & 4 \\ -8 & -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$; zobrazení je otočení kolem přímky $\rho_1 \cap \rho_2$ o úhel $\alpha = 2\ \arccos(1/3)$. Smysl otáčení je opačný než v případě $r_{\rho_2} \circ r_{\rho_1}$.

$r_{\rho_3} \circ r_{\rho_2} \equiv \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -4 & -8 \\ 4 & -7 & 4 \\ -8 & -4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 14 \\ 2 \\ 14 \end{pmatrix}$; zobrazení je otočení kolem přímky $\rho_3 \cap \rho_2$ o úhel $\alpha = 2\ \arccos(1/3)$. Rovina ρ_3 je rovina symetrie bodů A , A', tj. $\rho_3 \equiv 2x + 2y + 2z - 4 = 0$.

$r_{\rho_2} \circ r_{\rho_3} \equiv \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 4 & -8 \\ -4 & -7 & -4 \\ -8 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 10 \\ 14 \\ 10 \end{pmatrix}$; zobrazení je otočení kolem přímky $\rho_3 \cap \rho_2$ o úhel $\alpha = 2\ \arccos(1/3)$. Rovina ρ_3 je rovina symetrie bodů A , A', tj. $\rho_3 \equiv 2x + 2y + 2z - 4 = 0$. Smysl otáčení je opačný než v případě $r_{\rho_3} \circ r_{\rho_2}$.

$r_{\rho_3} \circ r_{\rho_1} \equiv \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix}$; zobrazení je posunutí o vektor $\mathbf{u} = \frac{1}{9}(20; 20; 20)$.

$r_{\rho_1} \circ r_{\rho_3} \equiv \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 20 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix}$; zobrazení je posunutí o vektor $\mathbf{u} = -\frac{1}{9}(20; 20; 20)$. }

2.18. V euklidovském prostoru $\mathcal{E}_3$ je dána přímka $o \equiv X = [1; 1; 1] + t\,(1; -1; 1)$. Určete rovnice symetrie o podle přímky o.

{Návod: Víme, že body přímky o jsou samodružné, směrový vektor přímky o je vlastní vektor pro vlastní číslo 1 a všechny vektory kolmé na přímku o jsou vlastní vektory pro vlastní číslo -1. Rovnice potom určíme stejně, jako v Úloze 1.9.
$o \equiv \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$. }

2.19. V euklidovském prostoru je dána osová symetrie o s osou symetrie o a nenulový vektor $\mathbf{u}$. Jaké zobrazení vznikne složením osové symetrie o a posunutí $t_{\mathbf{u}}$ (v libovolném pořadí)?

Řešení: Úlohu vyřešíme ve vhodně zvoleném kartézském repéru, který zvolíme tak, že osa symetrie je osa z a vektor $\mathbf{u} = (a; b; c) \neq (0; 0; 0)$. Potom vyjádření o je možno zapsat jako $[x; y; z] \mapsto [-x; -y; z]$ a posunutí $t_{\mathbf{u}}$ jako $[x; y; z] \mapsto [x + a; y + b; z + c]$. Potom složené zobrazení $o \circ t_{\mathbf{u}}$ má vyjádření

$$[x; y; z] \mapsto [x + a; y + b; z + c] \mapsto [-x - a; -y - b; z + c]\,.$$

Soustava pro výpočet samodružných bodů má tvar $-2x - a = 0\,,\ -2y - b = 0\,,\ c = 0$. Pro $c = 0$, tj. vektor $\mathbf{u}$ kolmý na osu o, dostaneme přímku samodružných bodů a složené zobrazení je osová symetrie s osou $x = -\frac{1}{2}a\,,\ y = -\frac{1}{2}b$. Pro $c \neq 0$ nemá složené zobrazení samodružné body a jedná se o posunutou osovou symetrii, tj. shodnost složenou z osové symetrie s osou $x = -\frac{1}{2}a\,,\ y = -\frac{1}{2}b$ složenou s posunutím ve směru osy o vektor $(0; 0; c)$.

Pro zobrazení $t_{\mathbf{u}} \circ o$ dostaneme

$$[x; y; z] \mapsto [-x; -y; z] \mapsto [-x + a; -y + b; z + c]\,.$$

Soustava pro výpočet samodružných bodů má tvar $-2x + a = 0\,,\ -2y + b = 0\,,\ c = 0$. Pro $c = 0$, tj. vektor $\mathbf{u}$ kolmý na osu o, dostaneme přímku samodružných bodů a složené zobrazení je osová symetrie s osou $x = \frac{1}{2}a\,,\ y = \frac{1}{2}b$. Pro $c \neq 0$ nemá složené zobrazení samodružné body a jedná se o posunutou osovou symetrii, tj. shodnost složenou z osové symetrie s osou $x = \frac{1}{2}a\,,\ y = \frac{1}{2}b$ složenou s posunutím ve směru osy o vektor $(0; 0; c)$.

Předchozí úvahy tedy můžeme shrnout do následujícího tvrzení:

Složením osové symetrie s osou o a posunutí o nenulový vektor $\mathbf{u}$ je pro $\mathbf{u} \perp o$ osová symetrie s osou o', která vznikne posunutím osy o o vektor $\pm\frac{1}{2}\mathbf{u}$ (orientace posunutí je dána pořadím skládání zobrazení). Pro $\mathbf{u} \not\perp o$ je složené zobrazení posunutá osová symetrie složená z osové symetrie s osou o' a posunutím ve směru osy o' (jedná se o vektor, který je ortogonální projekcí vektoru $\mathbf{u}$ na zaměření osy o).

2.20. V euklidovském prostoru je dána krychle $ABCDEFGH$ o délce hrany a. Jaké zobrazení vznikne složením dvou osových symetrií, je-li:
a) první osa je přímka $o_1 = AE$ a druhá osa je přímka $o_2 = BF$;
b) první osa je přímka $o_1 = AB$ a druhá osa je přímka $o_2 = AD$;
c) první osa je přímka $o_1 = AB$ a druhá osa je přímka $o_2 = EH$.

Řešení: Označme jako o_i osovou symetrii s osou o_i. Zkuste si situaci zakreslit ve volném rovnoběžném promítání.

a) Obě osy symetrie jsou rovnoběžné. Jestliže zúžíme osové symetrie na roviny kolmé na osy, dostaneme v těchto rovinách dvě středové symetrie, jejichž složením je posunutí o vektor, který je dvojnásobkem vektoru určeného středy symetrie. V prostoru tak dostaneme posunutí o vektor $\pm 2\,\overrightarrow{AB}$. Znaménko záleží na pořadí, v jakém osové symetrie skládáme, $o_2 \circ o_1 \equiv t_{2\,\overrightarrow{AB}}$ a $o_1 \circ o_2 \equiv t_{-2\,\overrightarrow{AB}}$. Ověříme si naši "geometrickou"představu analyticky. Zvolme kartézský repér tak, že bod A je jeho počátek, osa x je přímka AB, osa y je přímka AD a osa z je přímka AE. Potom osová symetrie o_1 je symetrie podle osy z, která má vyjádření $[x; y; z] \mapsto [-x; -y; z]$. Osová symetrie o_2 je symetrie podle přímky, která je posunutá osa z o vektor $\overrightarrow{AB} = (a; 0; 0)$. Tato symetrie má vyjádření $[x; y; z] \mapsto [-x + 2a; -y; z]$. Potom $o_2 \circ o_1$ je dáno jako

$$[x; y; z] \mapsto [-x; -y; z] \mapsto [x + 2a; y; z]\,,$$

tj. $X' = X + 2\,\overrightarrow{AB}$. Podobně $o_1 \circ o_2$ je dáno jako

$$[x; y; z] \mapsto [-x + 2a; -y; z] \mapsto [x - 2a; y; z],$$

tj. $X' = X - 2\,\overrightarrow{AB}$.

b) Provedeme ve zvoleném kartézském repéru z případu a). První osová symetrie je symetrie podle osy x, tj. $[x; y; z] \mapsto [x; -y; -z]$, a druhá je symetrie podle osy y, tj. $[x; y; z] \mapsto [-x; y; -z]$. Potom $o_2 \circ o_1$ je dáno jako

$$[x; y; z] \mapsto [x; -y; -z] \mapsto [-x; -y; z],$$

tj. jde o symetrii podle osy z. Podobně $o_1 \circ o_2$ je dáno jako

$$[x; y; z] \mapsto [-x; y; -z] \mapsto [-x; -y; z],$$

tj. jedná se opět o symetrii podle osy z.

c) První osová symetrie je symetrie podle osy x, tj. $[x; y; z] \mapsto [x; -y; -z]$, a druhá je symetrie podle přímky, která je posunutá osa y o vektor $\overrightarrow{AE} = (0; 0; a)$, tato symetrie má vyjádření $[x; y; z] \mapsto [-x; y; -z+2a]$. Potom $o_2 \circ o_1$ je dáno jako

$$[x; y; z] \mapsto [x; -y; -z] \mapsto [-x; -y; z + 2a],$$

tj. jde o symetrii podle osy z složenou s posunutím o vektor $2\overrightarrow{AE}$. Podobně $o_1 \circ o_2$ je dáno jako

$$[x; y; z] \mapsto [-x; y; -z + 2a] \mapsto [-x; -y; z - 2a],$$

tj. jedná se o symetrii podle osy z složenou s posunutím o vektor $-2\overrightarrow{AE}$.

2.21. Situaci z předchozí Úlohy 2.20 zobecníme takto. Jaké zobrazení v euklidovském prostoru dimenze 3 vznikne složením dvou osových symetrií, jsou-li osy o_1, o_2

a) rovnoběžné různé,
b) různoběžné kolmé (svírající úhel α),
c) mimoběžné kolmé (svírající úhel α).

{*Návod*: řešte konstrukčně ve volném rovnoběžném promítání.
a) Posunutí o vektor, který leží na kolmé příčce rovnoběžek a jeho velikost je dvojnásobek vzdálenosti rovnoběžek. Orientace závisí na pořadí skládání symetrií.
b) Osová symetrie podle osy o_3 kolmé na obě osy o_1, o_2 a procházející jejich průsečíkem (svírají-li osy o_1, o_2 úhel α, je složením osových symetrií otočení kolem osy o_3 o úhel $2\,\alpha$ - orientace otáčení závisí na pořadí skládání symetrií).
c) Osová symetrie podle osy mimoběžek složená s posunutím ve směru osy mimoběžek o vektor, jehož velikost je dvojnásobek vzdáleností mimoběžek a orientace závisí na pořadí skládání symetrií (svírají-li mimoběžné osy o_1, o_2 úhel α, je složením osových symetrií otočení o úhel $2\,\alpha$ - orientace otáčení závisí na pořadí skládání symetrií - složená s posunutím o vektor určující směr osy mimoběžek, jehož velikost je dvojnásobek vzdáleností mimoběžek a orientace posunutí závisí na pořadí skládání symetrií).
}

2.22. Dokažte, že zobrazení, které je dáno obrazy čtyř bodů v obecné poloze je shodnost a rozložte ji na souměrnosti podle rovin

a) $[3; 3; 3] \mapsto [-1; 3; 3]$, $[6; 0; 0] \mapsto [-2; 4; -2]$, $[3; 0; 3] \mapsto [1; 4; 1]$, $[2; 1; 0] \mapsto [0; 1; 0]$,

b) $[0; 0; 3] \mapsto [1; 5; 1]$, $[3; 0; 0] \mapsto [1; 2; -2]$, $[1; 1; 0] \mapsto [0; 2; 0]$, $[0; 1; 1] \mapsto [0; 3; 1]$.

{ Možný rozklad: a) $h_1: \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$h_2: \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

$f = h_2 \circ h_1$;

b) Možný rozklad: $h_1: \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 14 & -5 & 2 \\ -5 & -10 & 10 \\ 2 & 10 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 9 \\ 45 \\ -18 \end{pmatrix}$

$h_2: \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & 0 & -4 \\ 0 & 5 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$

$h_3: \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$f = h_3 \circ h_2 \circ h_1$. }

2.23. Určete parametry p, q, r tak, aby zobrazení $\mathcal{E}_3 \to \mathcal{E}_3$ byla shodnost.

a) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 2 & 11 & p \\ 5 & -10 & q \\ 14 & 2 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 14 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 2 & 10 & p \\ 5 & 10 & q \\ 14 & -5 & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

{ a) $(p, q, r) = (\mp 10, \mp 10, \pm 5)$; b) $(p, q, r) = (\pm 11, \mp 10, \pm 2)$. }

2.24. Určete parametry p, q, r tak, aby zobrazení $\mathcal{E}_3 \to \mathcal{E}_3$ byla shodnost.

a) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 2 & 11 & p \\ p & -2p & 2p \\ 14 & 2 & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r \\ 1 \\ q \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 2 & 11 & 2p \\ p & -2p & 2p \\ 14 & 2 & -p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r \\ 1 \\ q \end{pmatrix}$

{ a) Nelze; b) $p = 5$, r, q libovolné. }

2.25. Určete parametry p, q, r tak, aby zobrazení $\mathcal{E}_3 \to \mathcal{E}_3$ byla podobnost.
$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ p & 2 & 1 \\ q & r & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$. Určete koeficient podobnosti, samodružné body a vlastní směry.

{ $k = 3$, $p = 2$, $r = 1$, $q = -2$, samodružný bod $S = [0; 2; 0]$, charakteristická rovnice $\lambda^3 - 5\lambda^2 + 15\lambda - 27 = 0$, jeden reálný kořen $\lambda = 3$ a jemu odpovídající vlastní vektor $\mathbf{u} = (0; 1; 1)$. }

3 Kruhové křivky a kruhová inverze

3.1. Jsou dány body $A = [0; 0]$, $B = [8; 4]$, $C = [3; 9]$, $P = [1; 1]$, $Q = [-1; -1]$, $R = [3; -1]$. Určete rovnici kružnice určené body A, B, C a určete mocnost bodů P, Q, R vzhledem k této kružnici.

{ $k : x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$, mocnost $K(P) = -12$, tj. P je vnitřní bod, $K(Q) = 16$, tj. Q je vnější bod, $K(R) = 0$, tj. $R \in k$. }

3.2. Je dána přímka $p \equiv x - 2y - 8 = 0$ a kružnice $k(S, 5cm)$, $S = [4; 3]$. Určete průsečíky p a k, pokud je p sečnou k, určete jejich odchylku.

{ $k \equiv x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$; $p \cap k = \{[4; -2], [8; 0]\}$, $\cos(\varphi) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$. }

3.3. Je dána kružnice $k(S, r)$. Určete množinu bodů P, pro které je jejich mocnost ke kružnici k rovna r^2. Co platí pro tečny sestrojené z bodů P ke kružnici k?

Řešení: Protože $r^2 > 0$, jsou hledané body P vnější body kružnice k, jejichž mocnost je dána jako druhá mocnina vzdálenosti bodu P od bodu dotyku T tečny sestrojené z P ke kružnici k. Je tedy $|PT| = r$. Protože tečna je kolmá na poloměr ST, dostaneme pravoúhlý trojúhelník STP (viz Obrázek), jehož délky odvěsen jsou r a odtud $|SP| = \sqrt{2}\,r$. Hledaná množina bodů je tedy kružnice soustředná s kružnicí k o poloměru $\sqrt{2}\,r$.

Z obrázku je jasné, že $\sphericalangle(SPT) = \frac{\pi}{4}$, a tedy tečny PT a PT' jsou na sebe kolmé. Množina bodů, jejichž hodnost ke kružnici $k(S, r)$ je r^2 je totožná s množinou bodů, ve kterých jsou kolmé tečny sestrojené ke kružnici.

3.4. Jsou dány dvě různé nesoustředné kružnice k_1, k_2. Sestrojte jejich chordálu. Úlohu řešte pro všechny polohy kružnic k_1, k_2.

3.5. Jsou dány dvě kružnice $k_1 \equiv x^2 + y^2 + 16x + 10y + 64 = 0$ a $k_2(S; 5cm)$, $S = [-4; 3]$. Určete chordálu kružnic, pokud se kružnice protínají, určete jejich společné body a odchylku.

{ $k_2 \equiv x^2 + y^2 + 8x - 6y = 0$, chordála je $ch \equiv x + 2y + 8 = 0$; $k_1 \cap k_2 = \{[-8; 0], [-4; -2]\}$, $\cos(\varphi) = \frac{3}{5}$. }

3.6. Jsou dány tři různé kružnice $k_1(S_1, r_1)$, $k_2(S_2, r_2)$ a $k_3(S_3, r_3)$, takové, že S_1, S_2 a S_3 neleží na přímce. Sestrojte jejich chordický střed. Úlohu řešte pro všechny polohy kružnic k_1, k_2, k_3.

3.7. Jsou dány 3 kružnice $k_1(S_1, 5cm)$, $S_1 = [-8; -5]$, $k_2 \equiv x^2 + y^2 + 8x - 6y = 0$ a $k_3(S_3, 5cm)$, $S_3 = [4; 3]$. Pokud existuje, určete jejich chordický střed.

{ Chordály jsou $ch_{12} \equiv x + 2y + 8 = 0$, $ch_{13} \equiv 3x + 2y + 8 = 0$, $ch_{23} \equiv x = 0$; chordický střed $ch_{12} \cap ch_{13} \cap ch_{23} = [0; -4]$. }

3.8. Jsou dány dva různé body A, B a reálné číslo $k > 0$. Dokažte, že množina bodů X takových, že $\frac{|AX|}{|BX|} = k$ je nenulová kruhová křivka.

Důkaz: Provedeme analyticky. Zvolíme kartézský repér tak, že $A = [-a, 0]$, $B = [a, 0]$ a $X = [x, y]$, $a > 0$. Potom podmínka $|AX| = k \cdot |BX|$ má souřadnicové vyjádření

$$\sqrt{(x+a)^2 + y^2} = k\sqrt{(x-a)^2 + y^2}\,,$$

kterou umocněním upravíme na

$$(x+a)^2 + y^2 = k^2\big((x-a)^2 + y^2\big)\,,$$

tj.

$$(1-k^2)\,x^2 + (1-k^2)\,y^2 + 2\,a\,(1+k^2)\,x + (1-k^2)\,a^2 = 0\,.$$

Pro $k = 1$ dostaneme rovnici $x = 0$, tj. hledaná množina bodů je osa úsečky AB (nestředová kruhová křivka).

Pro $k \neq 1$ rovnici upravíme na

$$x^2 + y^2 + 2\,\frac{a\,(1+k^2)}{(1-k^2)}\,x + a^2 = 0\,,$$

tj.

$$\left(x + \frac{a\,(1+k^2)}{(1-k^2)}\right)^2 + y^2 + a^2 - \frac{a^2\,(1+k^2)^2}{(1-k^2)^2} = 0\,,$$

kterou dále upravíme na

$$\left(x + \frac{a\,(1+k^2)}{(1-k^2)}\right)^2 + y^2 = \frac{4\,a^2\,k^2}{(1-k^2)^2}\,,$$

což je rovnice kružnice se středem v bodě $S = [-\frac{a\,(1+k^2)}{(1-k^2)}, 0]$ a poloměrem $r = |\frac{2\,a\,k}{(1-k^2)}|$. Tato kružnice se nazývá Apolloniova kružnice.

Narýsujte Apolloniovu kružnici pro $k = 2$ a $k = \frac{1}{2}$ a $|AB| = 6$.

3.9. Je dána kružnice $k(S, r)$ a její vnější bod A. Sestrojte kružnici, která má střed v bodě A a kolmo protíná kružnici k.

Návod řešení: Dvě kružnice se kolmo protínají, jestliže tečny ve společných bodech ke každé kružnici prochází středem druhé kružnice. Společné body tedy leží na Thaletově[3] kružnici sestrojené nad středy těchto kružnic.

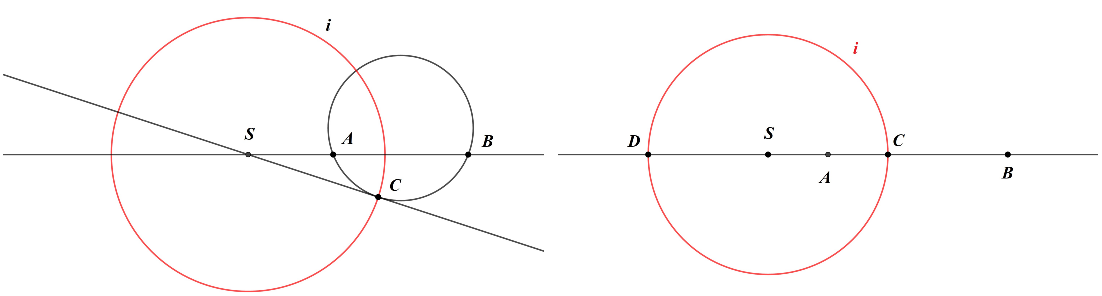
3.10. Jsou dány dvě nesoustředné neprotínající se kružnice $k_1(S_1, r_1)$ a $k_2(S_2, r_2)$. Sestrojte nulové body svazku kružnic určeného těmito kružnicemi.

Návod řešení: Sestrojíme libovolné dvě kruhové křivky v duálním svazku. Jedna z nich je centrála $c = S_1S_2$. Druhá je libovolná kružnice se středem na chordále daných kružnic, která kolmo protíná např. k_1.

3.11. Kruhová inverze s kladnou mocností je dána kružnicí inverze $k(S, r)$. Sestrojte obraz:
a) bodu A, který je vnějším bodem k;
b) bodu B, který je vnitřním bodem k;
c) přímky p, která kružnici k protíná ve dvou bodech;
d) přímky p, která kružnici k neprotíná;
e) kružnice l, která kružnici k protíná ve dvou bodech;
e) kružnice l, která kružnici k neprotíná a leží ve vnější oblasti k.

3.12. Úlohu 3.11 řešte pro kruhovou inverzi se zápornou mocností.

3.13. Inverze v Möbiově rovině jsou osová symetrie a kruhová inverze s kladnou mocností. Jsou dány 3 různé body A, B, C. Určete inverzi, ve které se body A a B zobrazí na sebe a C je samodružný bod. Úlohu řešte pro:
a) Nekolineární body A, B, C.
b) Kolineární body A, B, C takové, že C je vnitřní bod úsečky AB.



Obrázek 3.2: K Úloze 3.13

Rozbor řešení: a) Kružnice opsaná trojúhelníku ABC je samodružná. Je-li tečna k této kružnici v bodě C rovnoběžná s přímkou AB, tj. bod C leží na

[3]Thalés z Milétu (okolo 624 př. n. l. Milétos – okolo 548 př. n. l.) byl předsókratovský řecký filosof, geometr a astronom.

ose úsečky AB, jedná se o osovou symetrii. Pokud C neleží na ose úsečky AB (viz Obrázek 3.2 vlevo) je hledaná inverze kruhová inverze, jejíž střed S leží na přímce AB a tečně kružnice opsané trojúhelníku ABC v bodě C, poloměr kružnice inverze je $|SC|$.

b) Je-li C středem úsečky AB, je hledaná inverze osová symetrie podle osy úsečky AB. Předpokládejme nyní, že C není středem úsečky AB. Potom jeho dělící poměr vzhledem k bodům A, B je $\lambda = (CAB)$, kde $\lambda < 0,\ \lambda \neq -1$. Odtud dostaneme $|AC| = |\lambda| \cdot |BC|$, tj. C leží na Apolloniově kružnici i pro $k = |\lambda|$ (viz Úloha 3.8). Apolloniovu kružnici sestrojíme tak, že na přímce AB nalezneme bod D takový, že $(DAB) = |\lambda|$. Nad průměrem CD potom sestrojíme Apolloniovu kružnici, která je kružnicí hledané kruhové inverze. Na Obrázku 3.2 vpravo je situace nakreslena pro $\lambda = -1/2$. V tomto případě je A střed úsečky BD i úsečky SC, navíc $|SB| = 2|SC|$ a dostaneme $|SA| \cdot |SB| = \frac{1}{2}|SC| \cdot 2|SC| = |SC|^2$, tj. Apolloniova kružnice i je kružnice inverze, která zobrazuje body A, B na sebe a bod C je samodružný.

3.14. Je dána kružnice $k(S, r)$ a přímka p. Určete kružnice inverzí, které zobrazují p na k. Úlohu řešte pro všechny možné polohy p a k.

Rozbor řešení: Střed kružnice inverze leží na kolmici l spuštěné z bodu S na přímku p a musí ležet na kružnici k. Průsečík $R = p \cap l$ se zobrazí na jeden z průsečíků $\{P, Q\} = k \cap l$ a druhý je tedy střed inverze. Pro zjištění poloměru kružnice inverze situaci rozdělíme na následující možnosti:

a) p je sečna k a body A, B jsou průsečíky, které jsou v hledané inverzi samodružné. Hledané kružnice inverze tedy jsou $i_1(P, |PA|)$ nebo $i_2(Q, |QA|)$.

b) p je tečna, např. v bodě P. Potom hledaná kružnice inverze je $i(Q, |QP|)$.

c) p kružnici k neprotíná. Označme body P, Q tak, že P leží mezi body R, Q. Kruhová inverze, která má střed v bodě Q, má kladnou mocnost (R, P leží na stejné polopřímce). Poloměr kružnice inverze se středem v bodě Q potom zjistíme z euklidovy[4] věty o odvěsně $r^2 = |QR| \cdot |QP|$. Kruhová inverze, která má střed v bodě P, má zápornou mocnost (R, Q leží na opačných polopřímkách). Poloměr kružnice inverze se středem v bodě P potom zjistíme z euklidovy věty o výšce $r^2 = |PR| \cdot |PQ|$.

3.15. Jsou dány kružnice $k_1(S_1, r_1)$ a $k_2(S_2, r_2)$. Určete kružnice inverzí, které zobrazují k_1 na k_2. Úlohu řešte pro všechny možné polohy k_1 a k_2.

Návod řešení: Střed inverze musí být ve středu stejnolehlosti daných kružnic. Pro soustředné kružnice je to tedy jejich společný střed a poloměr kružnice inverze musí splňovat $r^2 = r_1 \cdot r_2$. Z euklidovy věty o odvěsně dostaneme poloměr kružnice

[4] Eukleidés též Euklides nebo Euklid (žil asi 325 př. n. l. – asi 260 př. n. l) byl řecký matematik a geometr.

inverze s kladnou mocností a z euklidovy věty o výšce poloměr kružnice inverze se zápornou mocností.

Pro nesoustředné kružnice jsou středy inverzí na přímce S_1S_2 a poloměry kružnic inverzí získáme euklidovými větami z faktu, že průsečíky S_1S_2 a k_1, k_2 se zobrazují na sebe. Kolik takových inverzí je v závislosti na poloměrech r_1, r_2?

3.16. Určete středy všech kruhových inverzí takových, že $|\kappa| = 1$ a:
a) Převádí body $A = [1; 0]$ a $A' = [3; 0]$ na sebe.
b) Převádí body $A = [0; 0]$ a $A' = [0; 3]$ na sebe.

{*Návod řešení*: Střed kruhové inverze leží na přímce AA' a platí pro něj $|SA| \cdot |SA'| = 1$. Pro uvedená zadání:
a) $S_1 = [2 + \sqrt{2}; 0]$ a $S_2 = [2 - \sqrt{2}; 0]$ pro $\kappa = 1$, $S_3 = [2; 0]$ pro $\kappa = -1$;
b) $S_1 = [0; \frac{3+\sqrt{13}}{2}]$ a $S_2 = [0; \frac{3-\sqrt{13}}{2}]$ pro $\kappa = 1$, $S_3 = [0; \frac{3+\sqrt{5}}{2}]$ a $S_4 = [0; \frac{3-\sqrt{5}}{2}]$ pro $\kappa = -1$. }

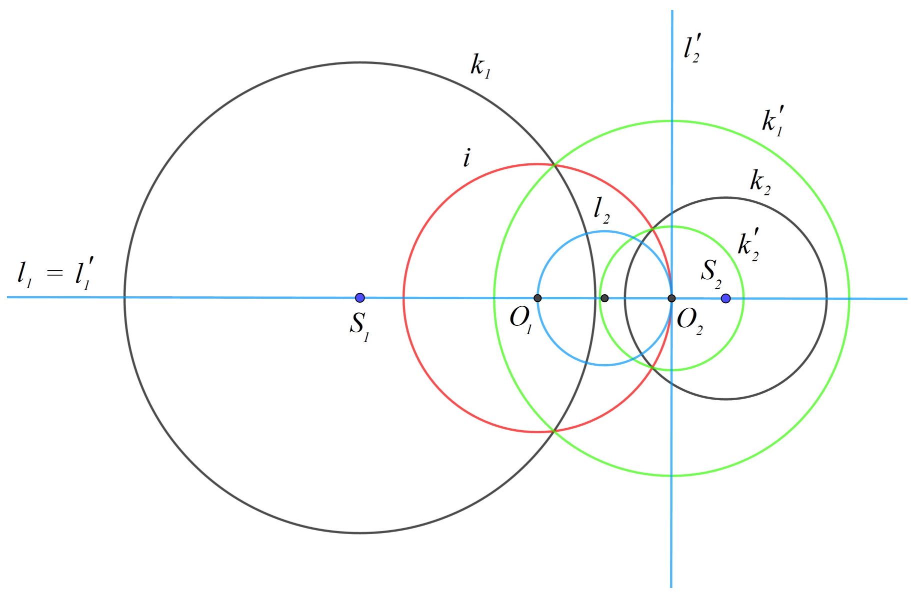
3.17. Určete mocnost a střed kruhové inverze takové, že bod A se zobrazí na bod B a bod C je samodružný:
a) $A = [1; 0]$, $B = [4; 0]$, $C = [2; 0]$.
b) $A = [1; 0]$, $B = [4; 0]$, $C = [0; 2]$.
c) $A = [1; 0]$, $B = [4; 0]$, $C = [0; 3]$.
d) $A = [1; 0]$, $B = [4; 0]$, $C = [-2; -3]$.
e) $A = [0; 0]$, $B = [2; 1]$, $C = [1; 0]$.
f) $A = [0; 0]$, $B = [1; 2]$, $C = [0; 1]$.
g) $A = [2; 1]$, $B = [4; 2]$, $C = [3; -1]$.
h) $A = [2; 3]$, $B = [3; 6]$, $C = [5; 2]$.

{*Návod řešení*: Hledaná kruhová inverze má kladnou mocnost. Pokud jsou body A, B, C kolineární, leží střed kružnice inverze na přímce AB a platí $|SA| \cdot |SB| = |SC|^2 = \kappa$. Pokud nejsou body A, B, C kolineární, je kružnice k určená body A, B, C samodružná. Střed inverze určíme buďto jako průsečík přímky AB a tečny kružnice k v bodě C nebo na přímce AB z rovnosti $|SA| \cdot |SB| = |SC|^2 = \kappa$. Pro uvedená zadání:
a) $\kappa = 4$, $S = [0; 0]$; b) $\kappa = 4$, $S = [0; 0]$; c) $\kappa = 10$, $S = [-1; 0]$;
d) $\kappa = 10$, $S = [-1; 0]$; e) $\kappa = 10$, $S = [-2; -1]$; f) $\kappa = 10$, $S = [-1; -2]$;
g) $\kappa = 10$, $S = [0; 0]$; h) $\kappa = 20$, $S = [1; 0]$. }

3.18. V kruhové inverzi s kladnou mocností 1 a středem inverze v počátku určete rovnice obrazů:
a) bodů $A = [-1; 0]$, $B = [1; -2]$ a $C = [\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$;
b) přímky $p \equiv y = 2x$;
c) přímky $q \equiv y - 1 = 0$;
d) kružnice $k_1 \equiv x^2 + y^2 + 8x - 6y = 0$;
e) kružnice $k_2 \equiv x^2 + y^2 - 2x - 2y - 7 = 0$.

{ Rovnice kruhové inverze je $x' = \frac{x}{x^2+y^2}$, $y' = \frac{y}{x^2+y^2}$;
a) $A' = [-1; 0]$, $B' = [\frac{1}{5}; \frac{-2}{5}]$, $C' = [1; 1]$;
b) $p' \equiv p$, tj. p je samodružná;
c) $q' \equiv x^2 + y^2 - y = 0$, tj. kružnice procházející počátkem;
d) $k_1' \equiv 8x - 6y + 1 = 0$, tj. přímka neprocházející počátkem;
e) $k_2 \equiv x^2 + y^2 + \frac{2}{7}x + \frac{2}{7}y - \frac{1}{7} = 0$, tj. kružnice se středem $[-\frac{1}{7}; -\frac{1}{7}]$ a poloměrem $\frac{3}{7}$. }

3.19. ♠ Jsou dány dvě nesoustředné neprotínající se kružnice $k_1(S_1, r_1)$ a $k_2(S_2, r_2)$. Nalezněte kruhovou inverzi, která zobrazí dané kružnice na soustředné kružnice.



Obrázek 3.3: K Úloze 3.19

Návod řešení: Kruhová inverze zobrazuje duální svazky kruhových křivek na duální svazky. Svazek protínajících se kruhových křivek se volbou středu inverze do jednoho společného bodu všech křivek svazku zobrazí do svazku různoběžných přímek. Duální svazek neprotínajících se kruhových křivek se tedy zobrazí do svazku soustředných kružnic. Střed inverze tedy volíme do nulové kruhové křivky daného svazku. Nulové body nalezneme jako společné body dvou nenulových křivek duálního svazku. Jedna z kruhových křivek duálního svazku je přímka S_1S_2, druhá je jakákoliv kružnice, která má střed na chordále kružnic $k_1(S_1, r_1)$ a $k_2(S_2, r_2)$ a kolmo je protíná.

Řešení je zobrazeno na Obrázku 3.3, kde jsou nulové body svazku neprotínajících se kružnic, který je určen kružnicemi $k_1(S_1, r_1)$ a $k_2(S_2, r_2)$, označeny jako O_1 a O_2. Tyto body jsou sestrojeny jako průsečíky dvou kruhových křivek $l_1 = S_1S_2$ a l_2 v duálním svazku (na obrázku nakresleny modře - l_2 má střed v průsečíku centrály a chordály prvního svazku). Střed kružnice inverze i je nulový bod O_1 a poloměr kružnice inverze (na obrázku nakreslena červeně) je volen tak, aby procházela druhým nulovým bodem O_2. V této kruhové inverzi se zobrazí k_1 a k_2 do soustředných kružnic k_1' a k_2' (na obrázku nakresleny zeleně) se společným středem O_2.

4 Úlohy řešené konstrukčně s využitím geometrických zobrazení

4.1. V rovině je dána přímka p, trojúhelník ABC a bod $A' \notin p$. Sestrojte trojúhelník $A'B'C'$, který je obrazem trojúhelníka ABC v osové afinitě s osou p, která převádí A na A'. Sestrojte obrazy bodů A, B, C také v případě, že $A' \in p$.

4.2. V rovině je dán čtverec $ABCD$. Sestrojte obraz čtverce:

a) V osové afinitě s osou $o \equiv AB$, která zobrazuje bod D na střed čtverce. Určete charakteristiku této afinity.

b) V osové afinitě s osou $o \equiv BC$, která zobrazuje bod A na bod D. Určete charakteristiku této afinity.

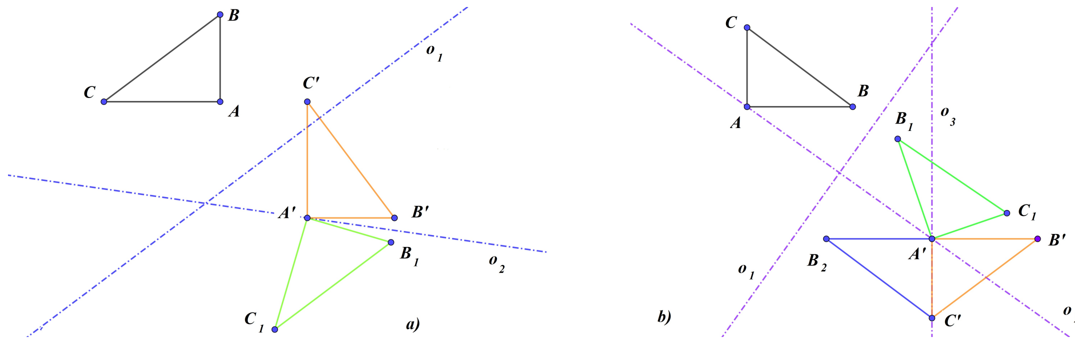
c) V zobrazení, ve kterém jsou body A, B samodružné a bod D se zobrazí na bod B. O jaké zobrazení se jedná?

4.3. V rovině jsou dány dva trojúhelníky ABC a $A'B'C'$. Rozložte afinitu, která převádí trojúhelník ABC na trojúhelník $A'B'C'$, na osové afinity.

4.4. V rovině jsou dány dva shodné trojúhelníky ABC a $A'B'C'$. Rozložte shodnost, která převádí trojúhelník ABC na trojúhelník $A'B'C'$, na osové symetrie.

Rozbor řešení: Uvědomme se, že v případě přímo shodných trojúhelníků jsou v rozkladu právě dvě osové symetrie. Pro rovnoběžné osy symetrie je daná shodnost posunutí a pro různoběžné osy symetrie je daná shodnost otočení kolem průsečíků os. Rozklad přitom není jednoznačný, záleží ale jen na pořadí, v jakém převádíme dané body na sebe. V prvním případě (posunutí) jsou osy vždy rovnoběžné a mají stejnou vzdálenost. Ve druhém případě se vždy osy protínají ve středu otočení a odchylka os je stejná. Na Obrázku 4.4 a) je nejdříve zobrazen bod A na A'. V této symetrii se zobrazí $\triangle ABC$ na $\triangle A'B_1C_1$ (nakreslen zeleně). Osová symetrie převádějící B_1 na B' už převede i C_1 na C'. $\triangle A'B'C'$ je zobrazen červeně.

V případě nepřímo shodných trojúhelníků je v rozkladu buďto jedna osová symetrie nebo 3 osové symetrie. V Obrázku 4.4 b) je nejdříve zobrazen bod A na A'. V této symetrii se zobrazí $\triangle ABC$ na $\triangle A'B_1C_1$ (nakreslen zeleně). Osová symetrie převádějící C_1 na C' zobrazí B_1 na B_2 ($\triangle A'B_2C'$ je zobrazen modře). Konečně osová symetrie převádějící B_2 na B' zobrazí $\triangle A'B_2C'$ na $\triangle A'B'C'$, který je zobrazen červeně.



Obrázek 4.4: K Úloze 4.4

4.5. Jsou dány dvě různé přímky $p,\ q$ a bod S. Sestrojte čtverec $ABCD$ se středem S takový, že $A \in p$ a $B \in q$. Proveďte diskusi na počet řešení vzhledem k poloze přímek $p,\ q$.

Návod řešení úloh 4.5 – 4.7: Otočení o úhel $\pi/2$ kolem bodu S převede vrchol A na vrchol B.

4.6. Je dána přímka p, kružnice k a bod S. Sestrojte čtverec $ABCD$ se středem S takový, že $A \in p$ a $B \in k$. Proveďte diskusi na počet řešení vzhledem k poloze $p,\ k$.

4.7. Jsou dány dvě různé kružnice $k_1,\ k_2$ a bod S. Sestrojte čtverec $ABCD$ se středem S takový, že $A \in k_1$ a $B \in k_2$. Proveďte diskusi na počet řešení vzhledem k poloze kružnic $k_1,\ k_2$.

4.8. Úlohy 4.4 – 4.6 řešte pro bod C místo bodu B.

Návod řešení: Středová symetrie se středem S převede vrchol A na vrchol C.

4.9. Jsou dány dvě různé přímky $p,\ q$ a bod A. Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC takový, že $B \in p$ a $C \in q$. Proveďte diskusi na počet řešení vzhledem k poloze přímek $p,\ q$. Úlohu řešte také pro zadanou přímku a kružnici nebo dvě kružnice.

Návod řešení: Otočení o úhel $\pi/3$ kolem bodu A převede vrchol B na vrchol C.

4.10. Jsou dány dvě různé přímky $p,\ q$ a bod T. Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC s těžištěm v bodě T takový, že $A \in p$ a $B \in q$. Proveďte diskusi na počet řešení vzhledem k poloze přímek $p,\ q$. Úlohu řešte také pro zadanou přímku a kružnici nebo dvě kružnice.

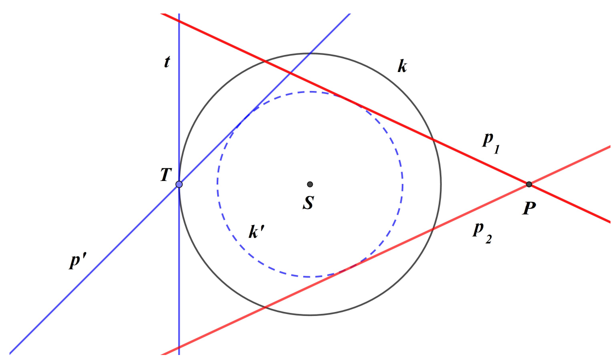
Návod řešení: Otočení o úhel $\frac{2\pi}{3}$ kolem bodu T převede vrchol A na vrchol B.

4.11. Jsou dány dvě různé přímky $p,\ q$ a bod A. Sestrojte čtverec $ABCD$ takový, že $B \in p$ a $C \in q$. Proveďte diskusi na počet řešení vzhledem k poloze přímek $p,\ q$. Úlohu řešte také pro zadanou přímku a kružnici nebo dvě kružnice.

Návod řešení: Otočení o úhel $\pi/4$ kolem bodu A a stejnolehlost se středem A a koeficientem $\sqrt{2}$ převede vrchol B na vrchol C.

4.12. Je dána kružnice k a její vnější bod P. Sestrojte tečny vedené z bodu P ke kružnici k.

4.13. Je dána kružnice $k(S, r)$ a její vnější bod P. Bodem P sestrojte přímky, které protínají kružnici k s odchylkou $\alpha = \pi/4$. Tato úloha je řešitelná i pro některé vnitřní body k, určete pro které.

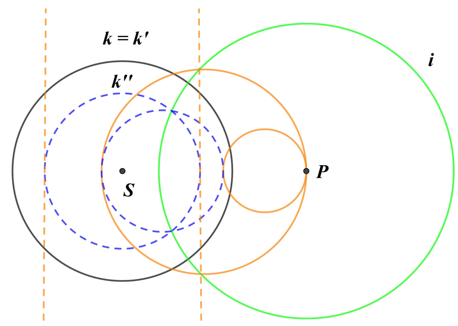


Obrázek 4.5: K Úloze 4.13

Rozbor řešení: V libovolném bodě T kružnice $k(S, r)$ sestrojíme přímku, která s tečnou v tomto bodě svírá odchylku $\pi/4$. Tuto přímku otočíme kolem středu S tak, aby otočená přímka procházela bodem P, viz Obrázek 4.5.

Nalezené přímky se dotýkají kružnice k' soustředné s k a poloměrem $r' = r\ \cos(\alpha)$. Úloha je řešitelná pro všechny body ležící na k' (jedno řešení) a její vnější body (dvě řešení).

4.14. Je dána kružnice $k(S, r)$ a bod $P \not\equiv S$. Sestrojte kružnice procházející bodem P, které protínají kružnici k s odchylkou $\alpha = \pi/4$ a jejichž středy leží na přímce PS.



Obrázek 4.6: K Úloze 4.14

Návod řešení: Kruhová inverze se středem v bodě P (na Obrázku 4.6 je nakreslena kružnice inverze zeleně a její poloměr je volen tak, aby byla kružnice k samodružná) zobrazí hledané kružnice na přímky, které jsou kolmé na přímku PS a protínají k' s odchylkou $\pi/4$, tj. dotýkají se kružnice k'' soustředné s k' sestrojené jako v Úloze 4.13. Obrazy těchto přímek jsou řešením dané úlohy (zakresleny červeně).

4.15. Je dána kružnice $k(S, r)$ a bod $P \not\equiv S$. Sestrojte kružnice se středem v bodě P, které protínají kružnici k s odchylkou $\alpha = \pi/4$.

Návod řešení: Tečny ve společném bodě T dané a hledané kružnice mají odchylku α. Potom úhel $\measuredangle STP$ má velikost α nebo $\pi - \alpha$ (rozmyslete si, ve kterých případech tyto možnosti nastávají). Bod T tedy leží na kružnici pro obvodový úhel (ekvigonále) pro úhel α nebo $\pi - \alpha$ sestrojené nad úsečkou PS.

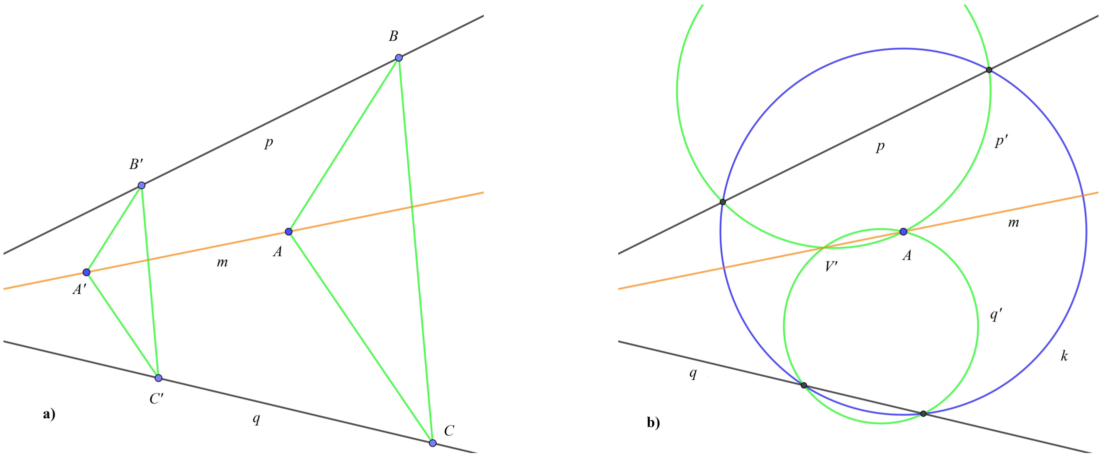
4.16. Jsou dány dvě nesoustředné kružnice k_1 a k_2. Sestrojte jejich společné tečny. Proveďte diskusi na počet řešení vzhledem k poloze kružnic k_1 a k_2.

4.17. Jsou dány dvě různoběžné přímky p, q, jejichž průsečík V je nedostupný (mimo papír). Dále je dán bod A, který neleží na daných přímkách. Sestrojte přímku $m = AV$.

a) Úlohu řešte pomocí tužky, pravítka a pravoúhlého trojúhelníka.

b) Úlohu řešte pomocí tužky, pravítka a kružítka.

Rozbor řešení: a) Ve stejnolehlosti se středem v bodě V a libovolným koeficientem se bod A zobrazí do bodu A'. Přímka $m = AA'$. Bod A' nalezneme tak, že sestrojíme libovolný trojúhelník ABC, $B \in p$, $C \in q$. Potom sestrojíme trojúhelník $A'B'C'$ takový, že $B' \in p$, $C' \in q$ a $B'C' \parallel BC$, $AB \parallel A'B'$, $AC \parallel A'C'$ (viz Obrázek 4.7 a)).



Obrázek 4.7: K Úloze 4.17

b) V případě, že máme k dispozici tužku, pravítko a kružítko, je výhodnější využít kruhové inverze se středem v bodě A. V této inverzi se přímky $p,\ q$ zobrazí na kružnice $p',\ q'$, které se protínají v bodech A a V', který je obrazem bodu V. Přímka AV' je v kruhové inverzi samodružná a prochází bodem V. V Obrázku 4.7 b) je poloměr kružnice inverze volen tak, aby protínala přímky $p,\ q$, obrazy p' (q') jsou potom kružnice určené bodem A a průsečíky kružnice inverze s přímkou p (q), která se snadno sestrojí pomocí kružítka a pravítka.

4.18. Je dána kružnice $k(S, 3cm)$ a bod P takový, že $|SP| = 6cm$. Sestrojte kružnici $l(O, 5cm)$ takovou, že $P \in l$ a $k \cap l$ jsou diametrálně položené body $A,\ B$.

Návod řešení: I. metoda: Trojúhelník ABO je rovnoramenný, tj. trojúhelník ASO je pravoúhlý a můžeme určit $\mid SO \mid = 4cm$.

II. metoda: Zvolíme libovolné diametrálně položené body $A',\ B' \in k$ a nad tětivou $A',\ B'$ sestrojíme kružnici o poloměru 5cm. Tuto kružnici otočíme kolem středu S tak, aby procházela bodem P.

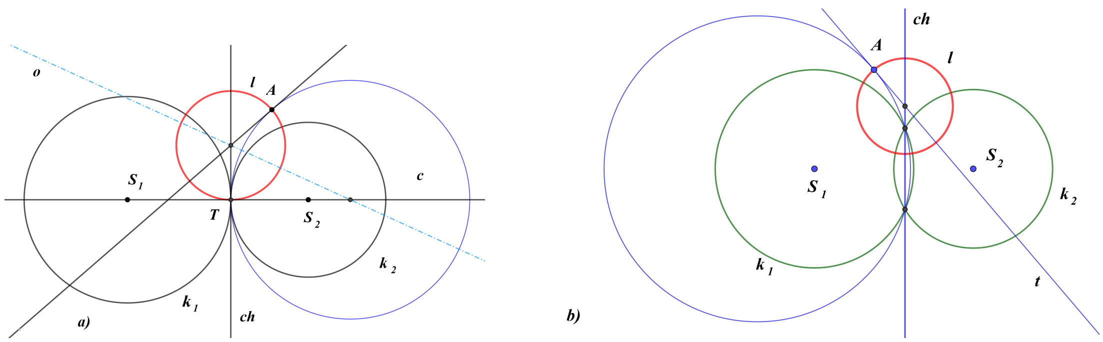
III. metoda: V kruhové inverzi se zápornou mocností s kružnici inverze k je hledaná kružnice samodružná. V této inverzi sestrojíme obraz P' bodu P a nad tětivou PP' kružnici o poloměru 5cm.

4.19. Jsou dány dvě různé kružnice $k_1(S_1, r_1),\ k_2(S_2, r_2)$ a bod A, $A \notin k_i$. Sestrojte nenulovou kruhovou křivku, která prochází bodem A a kolmo protíná obě kružnice $k_1,\ k_2$, tj. patří do duálního svazku kruhových křivek určených kružnicemi $k_1,\ k_2$. Úlohu řešte pro všechny polohy kružnic.

Rozbor řešení: Úlohu rozdělíme podle vzájemné polohy kružnic $k_1,\ k_2$:

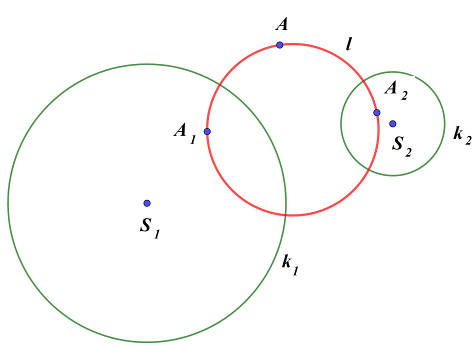
1. $k_1,\ k_2$ jsou soustředné. Hledaná kruhová křivka je přímka AS, kde S je společný střed $k_1,\ k_2$.

2. Viz Obrázek 4.8 a). Kružnice $k_1,\ k_2$ se dotýkají v bodě T, potom společná tečna t v bodě T je chordála svazku kruhových křivek určený kružnicemi $k_1,\ k_2$. Na ní leží střed hledané kružnice l. Tento střed také leží na tečně v bodě A kružnice v daném svazku (nakreslena modře), která prochází bodem A. Tato kružnice má střed na centrále S_1S_2 prvního svazku a ose o úsečky AT. Poznamenejme, že pokud $A \in S_1S_2$ je hledaná kruhová křivka centrála $c = S_1S_2$. Pokud $A \in ch$, je hledaná kružnice sestrojena nad průměrem AT.



Obrázek 4.8: K Úloze 4.19

3. Viz Obrázek 4.8 b). Kružnice $k_1,\ k_2$ se protínají ve dvou bodech $O_1,\ O_2$. Přímka O_1O_2 je chordála ch daného svazku kruhových křivek a střed hledané kružnice l na ní leží. Dále leží na tečně t v bodě A kružnice v daném svazku, která prochází bodem A. Tato kružnice je určena body A, O_1 a O_2. Poznamenejme, že pokud $A \in S_1S_2$ je hledaná kruhová křivka centrála $c = S_1S_2$. Pokud $A \in ch \equiv O_1O_2$ musíme na přímce O_1O_2 najít druhý průsečík B hledané kružnice s přímkou O_1O_2. Označíme-li O průsečík centrály a chordály daného svazku, platí $\mid OO_1 \mid^2 = \mid OA \mid \cdot \mid OB \mid$ a z euklidovy věty o odvěsně sestrojíme bod B.

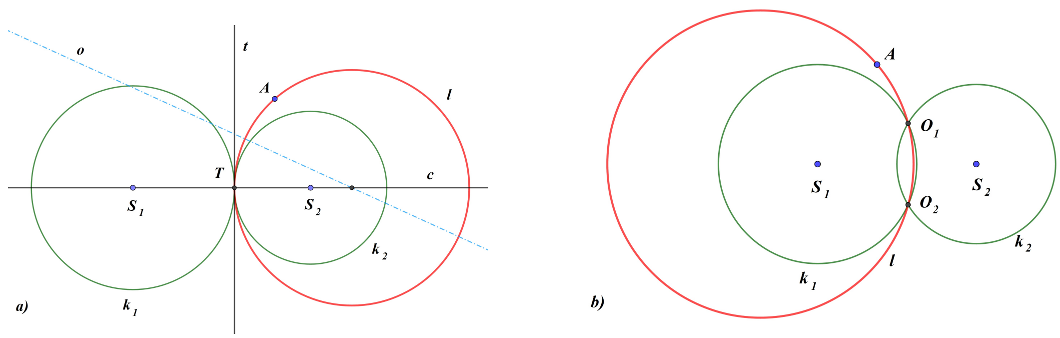


Obrázek 4.9: K Úloze 4.19

4. Viz Obrázek 4.9. Kružnice $k_1,\ k_2$ se reálně neprotínají a nejsou soustředné.

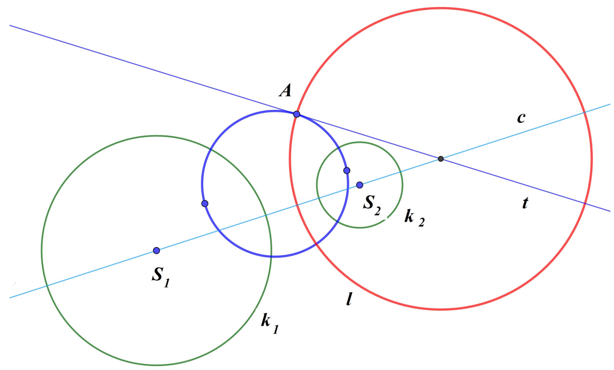
Opět, pokud $A \in S_1S_2$, je hledaná kruhová křivka centrála S_1S_2. V ostatních případech využijeme kruhové inverze. Hledaná kružnice l je samodružná v kruhové inverzi s kladnou mocností a kružnici inverze k_i, $i = 1, 2$. Sestrojíme body A_1, A_2, které jsou obrazy bodu A v těchto inverzích, a hledaná kružnice je dána body A, A_1 a A_2. Poznamenejme, že metoda použitá v tomto případě je použitelná i ve všech předchozích případech.

4.20. Jsou dány dvě různé kružnice $k_1(S_1, r_1)$, $k_2(S_2, r_2)$ a bod A, $A \notin k_i$. Sestrojte nenulovou kruhovou křivku, která prochází bodem A a patří do svazku kruhových křivek určených kružnicemi k_1, k_2. Úlohu řešte pro všechny polohy kružnic.



Obrázek 4.10: K Úloze 4.20

Rozbor řešení: V případě, že kružnice k_1 a k_2 jsou soustředné, protínají se ve dvou bodech nebo se dotýkají, je úloha jednoduchá. Na Obrázku 4.10 je situace pro dotýkající se a protínající se kružnice. Rozebereme si ji podrobněji pro případ nesoustředných kružnic bez společných bodů, viz Obrázek 4.11. Bodem A sestrojíme kružnici duálního svazku (nakreslena modře), která kolmo protíná kružnice k_1 a k_2, viz Úloha 4.19. Střed hledané kružnice l (nakreslena červeně) je potom průsečík centrály $c = S_1S_2$ a tečny t pomocné kružnice v bodě A. Pokud je tato tečna s přímkou S_1S_2 rovnoběžná, je hledaná kruhová křivka chordála k_1 a k_2.



Obrázek 4.11: K Úloze 4.20

5 Apolloniovy úlohy

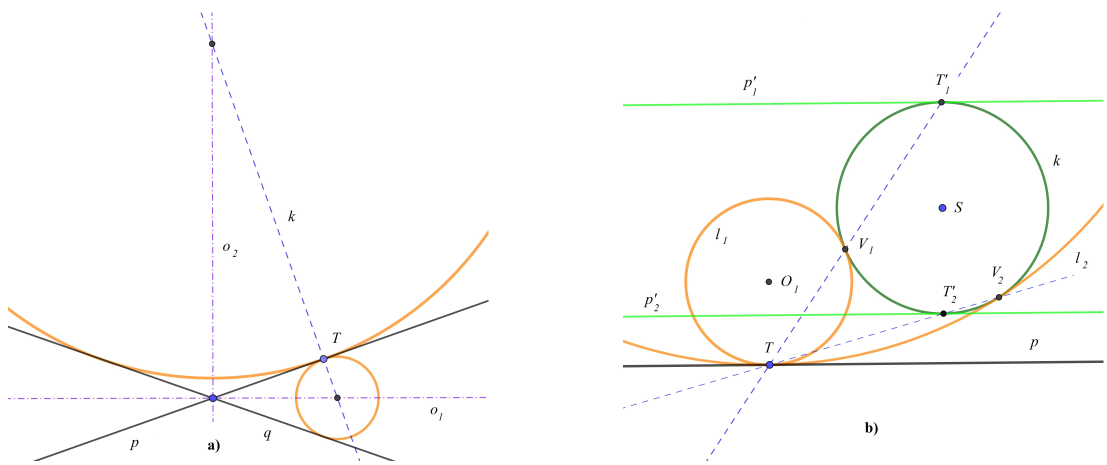
Připomeňme, že Apolloniovy úlohy se dají formulovat jedinou formulací: "Jsou dány tři různé kruhové křivky. Nalezněte nenulovou kruhovou křivku, která se všech tří daných křivek dotýká. Jako dotyk nulové a nenulové křivky přitom rozumíme to, že nulová křivka na nenulové leží". Speciální situace Apolloniových úloh jsou takzvané Pappovy úlohy, kdy je dána právě jedna nulová křivka, která leží na jedné ze zbývajících dvou nenulových křivkách a je bodem dotyku s hledanými nenulovými křivkami.

Apolloniovy úlohy je možno řešit celou řadou metod. U některých úloh, nebo ve speciálních polohách, si vystačíme pouze se znalostí středoškolské geometrie. V některých případech se dá použít mocnost bodu ke kružnici. Velice efektivní metoda je u většiny Apolloniových úloh využití kruhové inverze. V textu uvádíme především metody založené na užití geometrických zobrazení - otáčení, posunutí, stejnolehlost a kruhová inverze. Pro srovnání uvádíme u některých úloh více metod řešení, např. i použití mocnosti bodu ke kružnici.

V Apolloniových úlohách se předpokládá dotyk daných a hledaných nenulových kruhových křivek. Jako zobecněné Apolloniovy úlohy nazýváme úlohy, kdy hledané nenulové kruhové křivky protínají dané nenulové kruhové křivky pod danou odchylkou. Takto zobecnit se nedá Apolloniova úloha BBB, máme tedy celkem 9 zobecněných Apolloniových úloh.

5.1. (Pappovy úlohy) Jsou dány dvě nenulové kruhové křivky (přímky nebo kružnice) a na první z nich bod T. Sestrojte nenulovou kruhovou křivku, která se dotýká daných křivek a přitom první z nich v bodě T.

Rozbor řešení: a) Obě dané kruhové křivky jsou přímky $p,\ q$. Potom hledané kruhové křivky jsou kružnice, jejichž středy leží na ose p, q a na kolmici k k přímce p v bodě T. Na Obrázku 5.12 a) je situace zakreslena pro různoběžné přímky. Jaká situace nastane pro přímky rovnoběžné?



Obrázek 5.12: K Úloze 5.1

b) První kruhová křivka je přímka p s bodem dotyku T a druhá je kružnice $k(S, r)$. Bod dotyku hledané kružnice a kružnice k je středem stejnolehlosti těchto kružnic. V této stejnolehlosti se přímka p zobrazí na tečnu p' s bodem dotyku T'. Hledaný střed stejnolehlosti je potom průsečík přímky TT' a kružnice k. Na Obrázku 5.12 b) je situace zakreslena pro obecnou polohu. Proveďte diskusi vzhledem ke všem polohám přímky p a kružnice k.

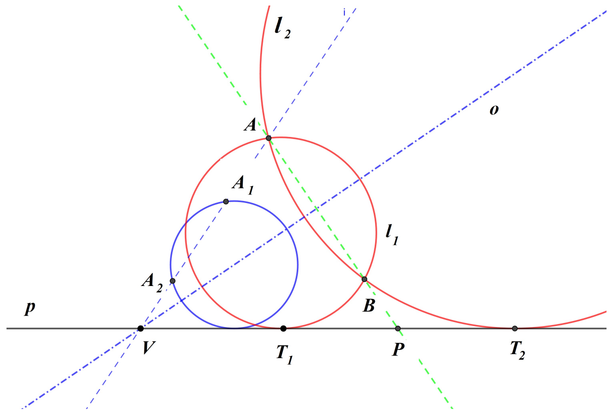
c) První kruhová křivka je kružnice k s bodem dotyku T a druhá je přímka p. Kružnici k nahradíme tečnou ke kružnici k s bodem dotyku T a úlohu tak převedeme na případ a).

d) Obě dané kruhové křivky jsou kružnice. První nahradíme tečnou v bodě dotyku T a úlohu tak převedeme na případ b).

5.2. (Apolloniova úloha $BBB \equiv ABC$) Jsou dány tři různé body A, B a C. Sestrojte nenulové kruhové křivky, které procházejí všemi třemi body.

5.3. (Apolloniova úloha $BBP \equiv ABp$) Je dána přímka p a body A, $B \notin p$. Sestrojte nenulové kruhové křivky, které se dotýkají p a prochází body A, B. Proveďte diskusi na počet řešení vzhledem k poloze zadaných útvarů.

Rozbor řešení: Viz Obrázek 5.13 pro A, B ležící ve stejné polorovině určené přímkou p.



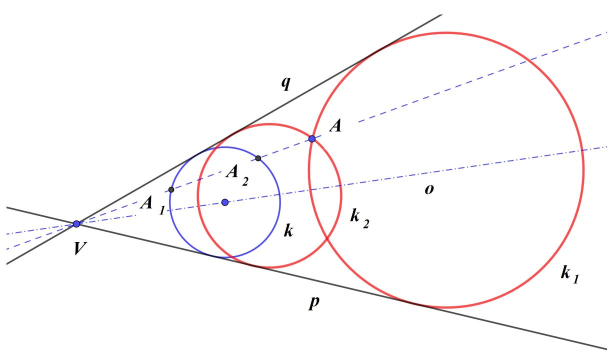
Obrázek 5.13: K Úloze 5.3

I. metoda - užití mocnosti bodů ke kružnici: Označme jako P průsečík přímek p a AB. Potom mocnost bodu P vzhledem k hledaným kružnicím je $|PA| \cdot |PB|$. To znamená, že vzdálenost bodu dotyku T přímky p a hledané kružnice od bodu P splňuje $|PT|^2 = |PA| \cdot |PB|$ a určíme ji pomocí euklidovy věty o odvěsně.

II. metoda - užití stejnolehlosti: Středy všech kružnic, které obsahují body A a B, leží na ose o úsečky AB. Sestrojíme libovolnou pomocnou kružnici (nakreslena modře), jejíž střed leží na o a dotýká se p. Stejnolehlostí se středem v bodě $V \equiv o \cap p$ tuto kružnici zobrazíme tak, aby obraz procházel body A a B.

Jak úlohu vyřešíte, pokud přímka AB je rovnoběžná (kolmá) s přímkou p?

5.4. (Apolloniova úloha $BPP \equiv Apq$) Jsou dány dvě přímky $p,\ q$ a bod $A \notin p, q$. Sestrojte kružnice, které se dotýkají $p,\ q$ a prochází bodem A. Proveďte diskusi na počet řešení vzhledem k poloze zadaných útvarů.



Obrázek 5.14: K Úloze 5.4

Rozbor řešení: V případě různoběžných přímek a $A \notin p, q$ sestrojíme libovolnou kružnici, která se dotýká přímek $p,\ q$ (její střed leží na ose úhlu, obsahujícího bod A, na Obrázku 5.14 nakreslena modře). Stejnolehlostí se středem v bodě

$V = p \cap q$ zobrazíme tuto kružnici na kružnice procházející bodem A (nakresleny červeně).

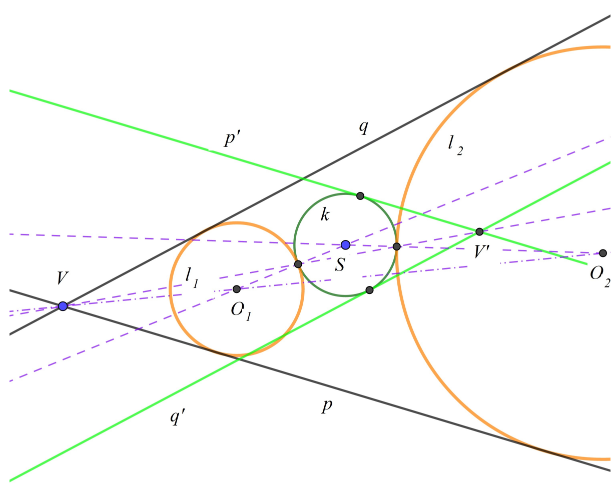
Vyřešte úlohu i pro rovnoběžné přímky.

5.5. (Apolloniova úloha $PPP \equiv pqr$) Jsou dány tři různé přímky p, q a r. Sestrojte kružnice, které se dotýkají všech tří přímek. Proveďte diskusi na počet řešení vzhledem k poloze zadaných útvarů.

Návod řešení: Středy kružnic, které se dotýkají dvou přímek, leží na ose úhlu pro různoběžné přímky a ose rovnoběžných přímek.

Poznamenejme, že pro tři rovnoběžné přímky neexistuje kružnice, která splňuje zadání, ale existuje nekonečně mnoho nenulových kruhových křivek splňujících zadání. Jsou to všechny rovnoběžky s danými přímkami.

5.6. (Apolloniova úloha $PPK \equiv pqk$) Jsou dány dvě přímky p, q a kružnice $k(S, r)$. Sestrojte kružnice, které se dotýkají p, q i k. Proveďte diskusi na počet řešení vzhledem k poloze zadaných útvarů.

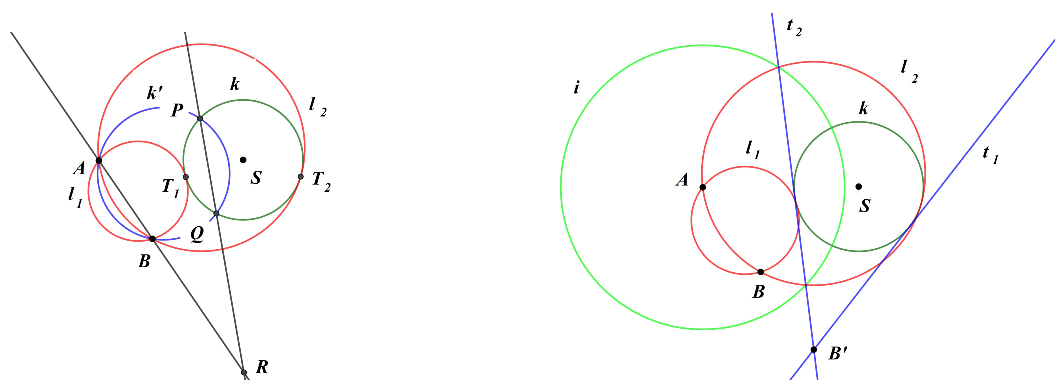


Obrázek 5.15: K Úloze 5.6

Rozbor řešení: Bod dotyku hledané kružnice a kružnice k je středem stejnolehlosti těchto kružnic. Přímky p, q se v této stejnolehlosti zobrazí na tečny p', q' ke kružnici k rovnoběžné s přímkami p, q. Rozbor provedeme pro různoběžné přímky p, q. Označme V průsečík přímek p, q, potom průsečík přímek p', q' označíme V'. Průsečík přímky VV' a kružnice k je potom bod dotyku s hledanou kružnicí. Střed této kružnice je potom průsečík osy úhlu přímek p, q a spojnice středu S s bodem dotyku. Na Obrázku 5.15 je nakreslena jen jedna z možných poloh přímek p', q'. Proveďte diskusi na počet řešení pro všechny možné polohy p, q a k.

Vyřešte úlohu pro případ rovnoběžných přímek.

5.7. (Apolloniova úloha $BBK \equiv ABk$) Je dána kružnice $k(S, r)$ a dva body A, $B \notin k$. Sestrojte nenulovou kruhovou křivku, která prochází body A, B a dotýká se k.



Obrázek 5.16: K Úloze 5.7

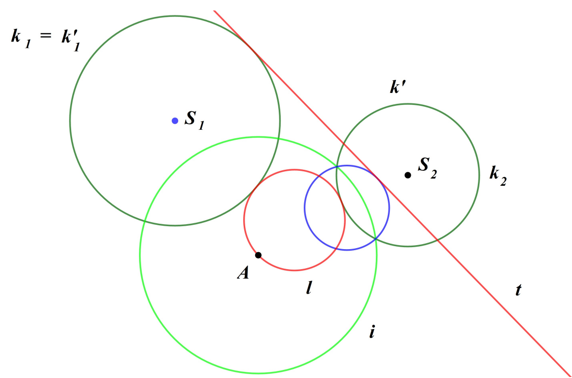
Návod řešení: Pro body A, B ležící ve vnější oblasti k.

I. metoda - užití mocnosti bodu vzhledem ke kružnici: Viz Obrázek 5.16 vlevo. Sestrojme libovolnou kružnici k' procházející body AB a protínající kružnici k v bodech P, Q. Průsečík R přímek AB a PQ je chordický střed hledané kružnice a kružnic k, k'. Pro bod dotyku T hledané kružnice a kružnice k platí $|RT|^2 = |RP| \cdot |RQ|$. Z euklidovy věty o odvěsně určíme $|RT|$ a body T_i. Hledané kružnice jsou určeny body A, B a T_i.

II. metoda - užití kruhové inverze: Viz Obrázek 5.16 vpravo. Volba kruhové inverze se středem například v bodě A převede úlohu ABk na nalezení tečen kružnice k' procházející bodem B'. Kružnice inverze je zakreslena zeleně a poloměr inverze je volen tak, aby byla kružnice k samodružná. Obrazy tečen t_i vedených z bodu B' v této inverzi jsou kružnice l_i (nakresleny červeně), které jsou řešení dané úlohy.

5.8. (Apolloniova úloha $BPK \equiv Apk$ a $BKK \equiv Ak_1k_2$) Je dána kružnice $k(S, r)$, přímka p a bod $A \notin k, p$. Sestrojte nenulovou kruhovou křivku, která prochází bodem A a dotýká se k_1 a p. Úlohu řešte i pro dvě kružnice k_1, k_2 a bod A.

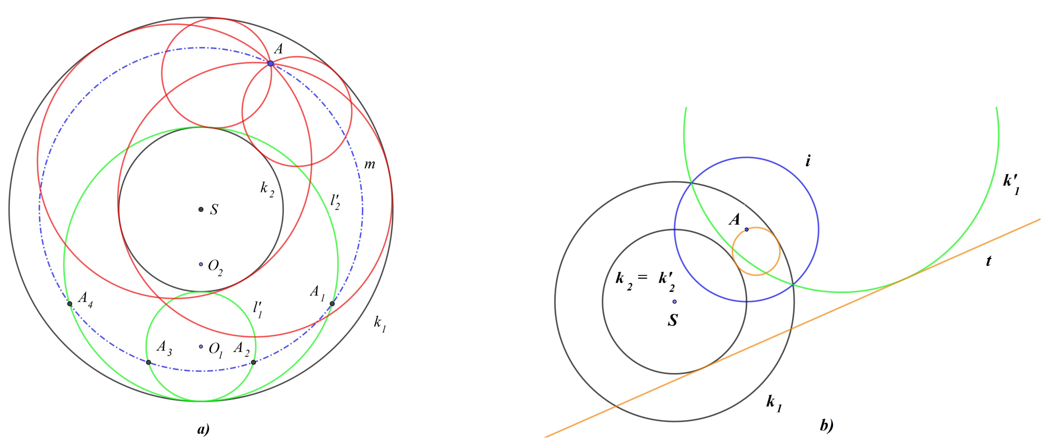
Návod řešení: Pokud mají přímka p a kružnice k (případně dvě kružnice k_1, k_2) společný bod, převede kruhová inverze se středem v tomto společném bodě na Apolloniovu úlohu $BPP \equiv A'p'k'$ (případně $BPP \equiv A'k_1'k_2'$), viz Úloha 5.4.



Obrázek 5.17: K Úloze 5.8

Pokud přímka p a kružnice k (případně dvě kružnice $k_1,\ k_2$) nemají společné body, volíme kruhovou inverzi se středem v bodě A, která převede úlohu Akp (případně Ak_1k_2) na nalezení společných tečen dvou kružnic $k',\ p'$ (případně $k'_1,\ k'_2$). Na Obrázku 5.18 b) je zakresleno jedno řešení pro soustředné kružnice k_1 a k_2. Pro nesoustředné kružnice se úloha řeší stejně, viz Obrázek 5.17, kde je poloměr kružnice inverze (nakreslena zeleně) volen tak, aby byla kružnice k_1 samodružná. Červeně je zakresleno jen jedno řešení úlohy.

5.9. (Apolloniova úloha $BKK \equiv Ak_1k_2$ pro soustředné kružnice) Jsou dány dvě soustředné kružnice $k_1(S, r_1)$, $k_2(S, r_2)$, $r_1 > r_2$, a bod A, který leží v mezikruží. Sestrojte kružnice, které prochází bodem A a dotýkají se kružnic k_1 a k_2.



Obrázek 5.18: K Úloze 5.9

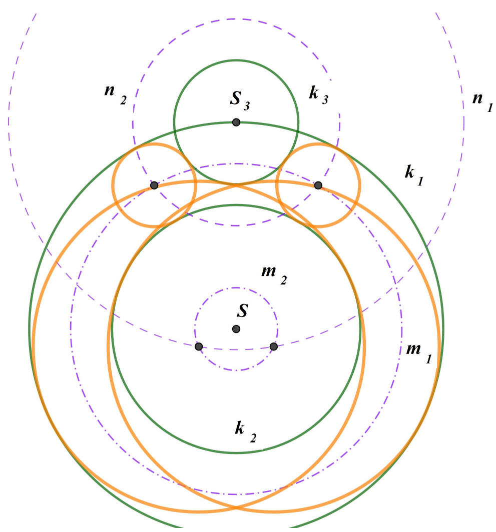
Rozbor řešení: I. metoda (viz Obrázek 5.18 a)): Sestrojíme libovolné dvě kružnice $l'_1(O_1, \frac{r_1 - r_2}{2})$ a $l'_2(O_2, \frac{r_1 + r_2}{2})$, které se dotýkají kružnic k_1 a k_2 (na Obrázku

5.18 nakresleny zeleně). Připomeňme, že body O_1 a O_2 leží na kružnicích se středem S a poloměry $\frac{r_1+r_2}{2}$ a $\frac{r_1-r_2}{2}$. Kružnice l_1' a l_2' potom otočíme kolem středu S tak, aby otočené kružnice (na Obrázku 5.18 a) nakresleny červeně) procházely bodem A. Na Obrázku 5.18 a) otáčíme o úhly A_iSA, kde body A_i dostaneme jako průsečíky kružnic l_1' a l_2' s kružnicí $m(S, |SA|)$ (na Obrázku 5.18 a) nakreslena modře).

Poznamenejme, že středy hledaných kružnic jsme mohli nalézt také tak, že leží na kružnicích se středem v bodě A a poloměrech $\frac{r_1 \pm r_2}{2}$.

II. metoda (viz Obrázek 5.18 b)): Úlohu je možno také vyřešit pomocí kruhové inverze se středem v bodě A, viz návod v Úloze 5.8. V této inverzi se hledané kružnice zobrazí na společné tečny kružnic k_1' a k_2'. Na Obrázku 5.18 b) je poloměr kružnice inverze i volen tak, aby byla kružnice k_2 samodružná a je zakresleno (červeně) jen jedno z možných řešení.

5.10. (Apolloniova úloha $KKK \equiv k_1k_2k_3$ pro dvě soustředné kružnice) Jsou dány dvě soustředné kružnice $k_1(S, r_1)$, $k_2(S, r_2)$, $r_1 > r_1$, a kružnice $k_3(S_3, r_3)$ nesoustředná s k_i. Sestrojte kružnice, které se dotýkají všech tří kružnic. Proveďte diskusi na počet řešení vzhledem k poloze kružnice k_3 vůči kružnicím k_1, k_2.



Obrázek 5.19: K Úloze 5.10

Rozbor řešení: Středy všech kružnic, které se dotýkají kružnic k_1 a k_2 leží na kružnicích $m_1(S, \frac{r_1+r_2}{2})$ (vnější dotyk s k_2) a $m_2(S, \frac{r_1-r_2}{2})$ (vnitřní dotyk s k_2) a mají poloměry $\frac{r_1-r_2}{2}$ a $\frac{r_1+r_2}{2}$ - v tomto pořadí (na Obrázku 5.19 jsou nakresleny modře čerchovaně). Kružnice o těchto poloměrech se dotýkají kružnice k_3, jestliže mají středy na kružnicích soustředných s kružnicí k_3 o poloměrech $|r_3 \pm \frac{r_1 \pm r_2}{2}|$. Na

Obrázku 5.19 jsou nakresleny jen kružnice n_1 a n_2 (na Obrázku 5.19 jsou nakresleny modře čárkovaně), které dávají řešení. Středy hledaných kružnic (nakresleny červeně) jsou průsečíky kružnic m_i a n_i, $i = 1, 2$.

5.11. (Apolloniova úloha $PKK \equiv pk_1k_2$ pro soustředné kružnice) Jsou dány dvě soustředné kružnice $k_1(S, r_1)$, $k_2(S, r_2)$, $r_1 > r_2$, a přímka p. Sestrojte kružnice, které se dotýkají kružnic $k_1(S, r_1)$, $k_2(S, r_2)$ a přímky p. Proveďte diskusi na počet řešení vzhledem k poloze přímky p vůči kružnicím k_1, k_2.

Návod řešení: I. metoda: Středy hledaných kružnic leží na kružnicích m_1 a m_2 popsaných v rozboru řešení Úlohy 5.10 a na rovnoběžkách s přímkou p vzdálených od přímky p o $\frac{r_1 \pm r_2}{2}$.

II. metoda: Pokud přímka p neprotíná kružnici k_1, nemá úloha řešení. Stačí tedy diskutovat případ, kdy p a k_1 mají společný bod. Volbou středu inverze do společného bodu přímky p a kružnice k_1 převedeme úlohu na ekvivalentní úlohu nalezení kružnice, která se dotýká dvou přímek (rovnoběžných, je-li p tečna k_1, a různoběžných, je-li p sečna k_1) a kružnice, viz Úloha 5.6.

5.12. (Apolloniova úloha $KKK \equiv k_1k_2k_3$ pro protínající se kružnice) Jsou dány tři kružnice $k_1(S_1, r_1)$, $k_2(S_2, r_2)$ a $k_3(S_3, r_3)$ takové, že k_1 a k_2 mají neprázdný průnik. Sestrojte nenulové kruhové křivky, které se dotýkají všech tří kružnic.

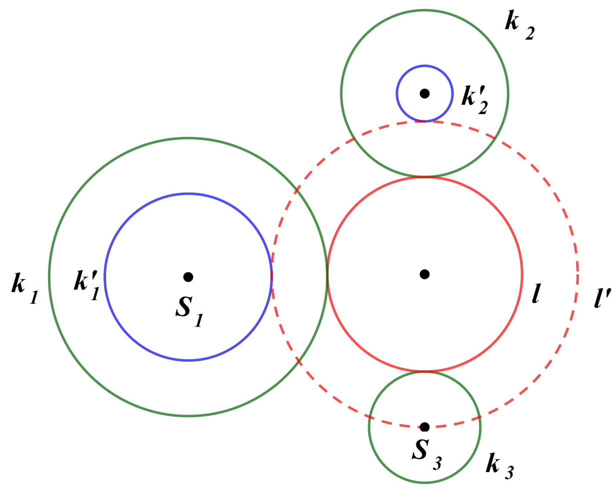
Návod řešení: Volbou středu inverze do společného bodu kružnic k_1 a k_2 převedeme úlohu na Apolloniovu úlohu $PPK \equiv k_1'k_2'k_3'$, kterou vyřešíme metodou z Úlohy 5.6 a řešení zobrazíme na řešení dané úlohy.

5.13. ♠ (Apolloniova úloha $KKK \equiv k_1k_2k_3$ pro neprotínající se kružnice) Jsou dány tři kružnice $k_1(S_1, r_1)$, $k_2(S_2, r_2)$ a $k_3(S_3, r_3)$, $r_1 > r_2 > r_3$, takové, že každé dvě leží ve vnější oblasti třetí. Sestrojte nenulové kruhové křivky, které se dotýkají všech tří kružnic.

Návod řešení: I. metoda: Inverzí popsanou v Úloze 3.19 převedeme úlohu na ekvivalentní Úlohu 5.10 pro soustředné kružnice, kterou vyřešíme a řešení převedeme kruhovou inverzí na řešení původní úlohy.

II. metoda - metoda dilatace (viz Obrázek 5.20): Představme si, že kružnice l je řešením dané úlohy. Jestliže poloměr kružnice l zvětšíme (pro vnější dotyk s k_3) nebo zmenšíme (pro vnitřní dotyk s k_3), dostaneme kružnici, která prochází bodem S_3 a dotýká se kružnic k_1' a k_2' soustředných s k_1 a k_2 a poloměrech $r_1 \pm r_3$ a $r_2 \pm r_3$. Podle návodu Úlohy 5.8 vyřešíme úlohu $S_3k_1'k_2'$ a poloměr řešení zvětšíme nebo zmenšíme o r_3. Na Obrázku 5.20 jsou modře zobrazeny $k_1'(S_1, r_1 - r_3)$ a $k_2'(S_2, r_2 - r_3)$ a jedno řešení l' úlohy $S_3k_1'k_2'$, které dává řešení l úlohy $k_1k_2k_3$.

Poznamenejme, že v některých situacích může být řešením i přímka. To je tehdy, pokud existuje společná tečna všech tří kružnic.



Obrázek 5.20: K Úloze 5.13

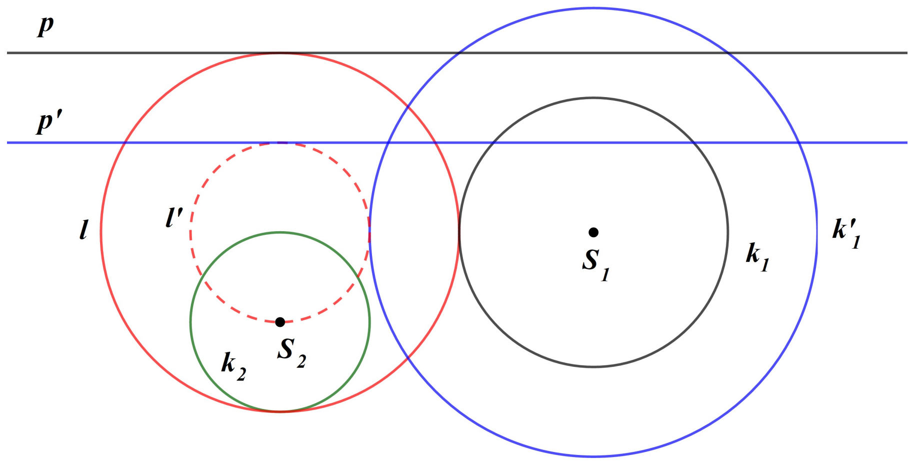
5.14. ♠ (Apolloniova úloha $PKK \equiv pk_1k_2$ pro neprotínající se kružnice) Jsou dány dvě nesoustředné neprotínající se kružnice $k_1(S_1, r_1)$, $k_2(S_2, r_2)$, $r_1 > r_2$, a přímka p. Sestrojte nenulové kruhové křivky, které se dotýkají obou kružnic a přímky p.

Návod řešení: Pokud má přímka p společný bod s některou z kružnic k_i, např. k_1, zvolíme společný bod jako střed inverze a úlohu pk_1k_2 převedeme na ekvivalentní úlohu $PPK \equiv pk'_1k'_2$ nalezení kružnice, která se dotýká dvou přímek a kružnice, řešení viz Úloha 5.6. V ostatních případech můžeme použít jednu z následujících metod.

I. metoda: Inverzí popsanou v Úloze 3.19 převedeme úlohu pk_1k_2 na ekvivalentní úlohu $KKK \equiv k'_1k'_2p'$, viz Úloha 5.10, pro soustředné kružnice $k'_1k'_2$, kterou vyřešíme a řešení převedeme kruhovou inverzí na řešení původní úlohy.

II. metoda - metoda dilatace (viz Obrázek 5.21): Představme si, že kružnice l je řešením dané úlohy. Jestliže poloměr kružnice l zvětšíme (pro vnější dotyk s k_2) nebo zmenšíme (pro vnitřní dotyk s k_2), dostaneme kružnici, která prochází bodem S_2 a dotýká se kružnic k'_1 soustředné s k_1 a poloměru $r_1 \pm r_2$ a dotýká se přímek p' rovnoběžných s p posunutých o r_2 (na obě strany od p). Vyřešíme úlohu $BPK \equiv S_2p'k'_1$ a poloměr řešení zvětšíme nebo zmenšíme o r_2. Úloha $S_2p'k'_1$ se řeší metodou popsanou v Úloze 5.8. Na Obrázku 5.21 je modře zobrazena jedna z voleb pro úlohu $BPK \equiv S_2p'k'_1$ a jedno její řešení l' nalezené metodou z Úlohy 5.8.

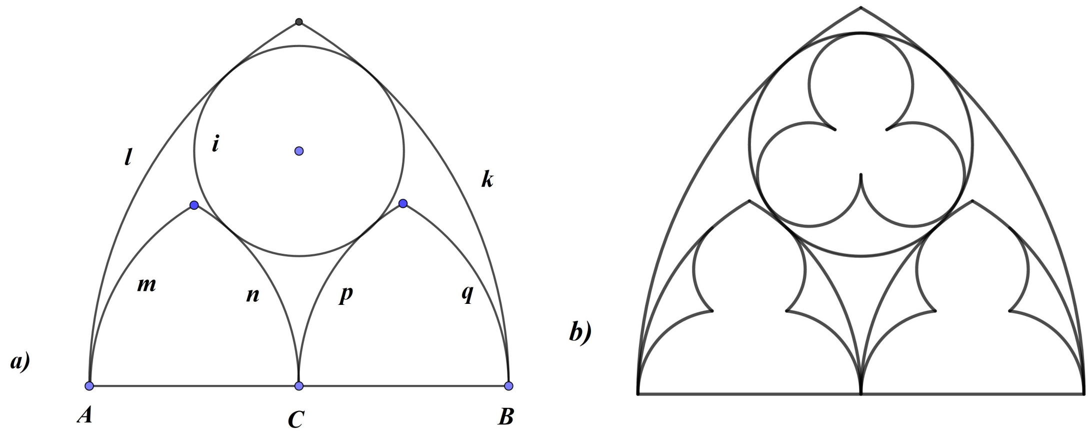
Poznamenejme, že v některých situacích může být řešením i přímka. To je tehdy, pokud existuje společná tečna kružnic $k_1(S_1, r_1)$ a $k_2(S_2, r_2)$ rovnoběžná s p, protože v Möbiově rovině se rovnoběžky dotýkají v nevlastním bodě.



Obrázek 5.21: K Úloze 5.14

5.15. S aplikací Apolloniových úloh v praxi se můžete setkat na kružbách gotických oken (na Obrázku 5.22 jsou dvě okna katedrály v Miláně). Jeden ze základních typů takové kružby je "kapička", viz Obrázek 5.23 a). Lomený oblouk je dán kruhovými oblouky k a l se středy v bodech A a B. Kruhové oblouky m, n, p a q mají středy v bodech A, B a C. Rozmyslete si, jak sestrojit kružnici i. Na Obrázku 5.23 b) je do menších lomených oblouků nakreslena kružba typu "mniška" a do kružnice sestrojen "trojlístek".

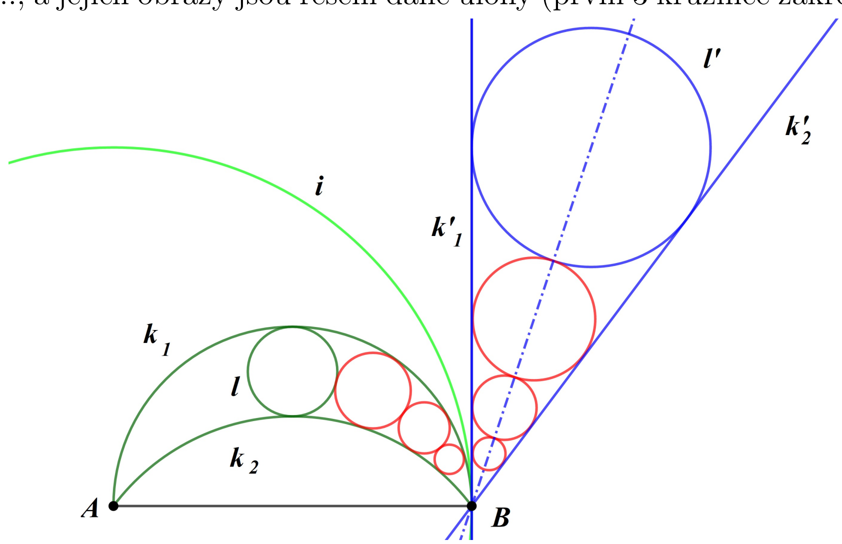
Obrázek 5.22: K Úloze 5.15



Obrázek 5.23: K Úloze 5.15

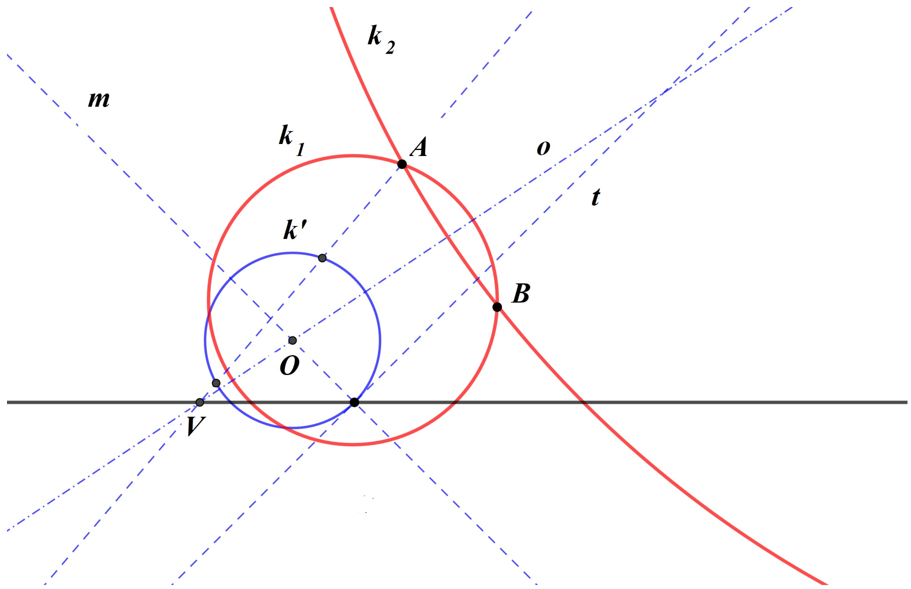
5.16. Nad úsečkou AB jsou dány dva kruhové oblouky k_1, k_2 a kružnice l maximálního poloměru, která se k_1 a k_2 dotýká. Sestrojte kružnici l_1, která se dotýká k_1, k_2 a l, l_2 různou od l, která se dotýká k_1, k_2 a l_1, a tak dále.

Návod řešení: Viz Obrázek 5.24. Kruhová inverze se středem v bodě A a poloměrem $|AB|$ (kružnice inverze i nakreslena zeleně) zobrazí k_1 a k_2 na různoběžné přímky k_1' a k_2', které se protínají v bodě B, a kružnici l na l', která se dotýká k_1' a k_2' (zakresleny modře). Stejnolehlostí se středem v bodě B sestrojíme kružnice l_1', l_2', ..., a jejich obrazy jsou řešení dané úlohy (první 3 kružnice zakresleny červeně).



Obrázek 5.24: K Úloze 5.16

5.17. (Zobecněná Apolloniova úloha $BBP_\alpha \equiv ABp$) Je dána přímka p a dva různé body A, $B \notin p$. Sestrojte nenulové kruhové křivky, které prochází body A, B a protínají přímku p s odchylkou $\alpha = \pi/4$.



Obrázek 5.25: K Úloze 5.17

Návod řešení: Všechny kružnice, které prochází body A, B, mají střed na ose o úsečky A, B. Sestrojíme libovolnou kružnici k' se středem na o, která protíná p s odchylkou α a stejnolehlostí se středem v bodě $V = o \cap p$ ji zobrazíme na hledanou kružnici. Na Obrázku 5.25 je kružnice k' sestrojena tak, že na přímce p zvolíme libovolný bod, tím proložíme tečnu t kružnice k', jejíž střed je na průsečíku osy o a kolmice k t ve zvoleném bodě.

Poznamenejme, že pokud je odchylka přímek AB a p rovna α, je jedno řešení přímka AB.

5.18. (Zobecněná Apolloniova úloha $BBK_\alpha \equiv ABk$) Je dána kružnice $k(S, r)$ a dva různé body A, $B \notin k$. Sestrojte nenulové kruhové křivky, které prochází body A, B a protínají kružnici k s odchylkou $\alpha = \pi/4$.

Návod řešení: Inverze se středem v bodě A převede danou úlohu na nalezení přímek, které protínají obraz k' kružnice k s danou odchylkou a prochází bodem B'. Tyto přímky nelezneme podle Úlohy 4.13 a jejich obrazy jsou řešení dané úlohy.

Poznamenejme, že stejnou metodou můžeme řešit i zobecněnou Apolloniovu úlohu BBP_α, které se ovšem dá řešit i pomocí stejnolehlosti, viz Úloha 5.17.

5.19. (Zobecněná Apolloniova úloha $BK_{\alpha_1}K_{\alpha_2} \equiv Ak_1k_2$) Jsou dány dvě kružnice $k_1(S_1, r_1)$, $k_2(S_2, r_2)$ a bod $A \notin k_1$, k_2. Sestrojte nenulové kruhové křivky, které prochází bodem A a protínají kružnice k_1 a k_2 s odchylkou $\alpha_1 = \pi/4$ a $\alpha_2 = \pi/3$.

Návod řešení: Inverze se středem v bodě A převede danou úlohu na nalezení přímek, které protínají obrazy k_1' a k_2' kružnic k_1 a k_2 s danými odchylkami. Podle návodu Úlohy 4.13 se tyto přímky dotýkají kružnic k_1'' a k_2'' soustředných s k_1' a k_2', jejichž poloměr sestrojíme podle Obrázku 4.5. Obrazy těchto přímek jsou řešení dané úlohy.

Poznamenejme, že stejnou metodou můžeme řešit i zobecněné Apolloniovy úlohy $BP_{\alpha_1}P_{\alpha_2}$ a $BP_{\alpha_1}K_{\alpha_2}$.