MASARYKOVA UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
ÚSTAV MATEMATIKY A STATISTIKY

Bakalářská práce

BRNO 2016 MARIE MÚČKOVÁ

MASARYKOVA UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
ÚSTAV MATEMATIKY A STATISTIKY

Sbírka planimetrických úloh řešených pomocí shodností

Bakalářská práce

Marie Múčková

Vedoucí práce: Prof. RNDr. Josef Janyška, DSc. **Brno 2016**

Bibliografický záznam

Autor:	Marie Múčková Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita Ústav matematiky a statistiky
Název práce:	Sbírka planimetrických úloh řešených pomocí shodností
Studijní program:	Fyzika
Studijní obor:	Fyzika se zaměřením na vzdělávání, Matematika se zaměřením na vzdělávání
Vedoucí práce:	Prof. RNDr. Josef Janyška, DSc.
Akademický rok:	2015/2016
Počet stran:	ix + 50
Klíčová slova:	shodná zobrazení; osová souměrnost; středová souměrnost; posunutí; otočení; planimetrie

Bibliographic Entry

Author:	Marie Múčková Faculty of Science, Masaryk University Department of Mathematics and Statistics
Title of Thesis:	Exercise book of plane geometry - isometric mappings
Degree Programme:	Physics
Field of Study:	Physics with a view to Education, Mathematics with a view to Education
Supervisor:	Prof. RNDr. Josef Janyška, DSc.
Academic Year:	2015/2016
Number of Pages:	ix + 50
Keywords:	symmetrical mapping; reflection; point symmetry; translation; rotation; planimetry

Abstrakt

V této bakalářské práci se věnujeme planimetrickým úlohám řešených pomocí shodností. Práce je psána formou sbírky příkladů, teoretická část je tedy uvedena pouze v minimální míře. Celková struktura je rozdělena na kapitoly podle jednotlivých typů shodného zobrazení. Hlavním cílem je možnost využití této práce na středních školách.

Abstract

This bachelor thesis is devoted to study of planimetry exercises solved by symmetrical mapping. The bachelor thesis is done in form of a collection of exercises; hence the theoretical part is brought out in a minimal extent. The whole structure is divided into chapters according to particular types of symmetrical mapping. The main goal is the ability of using this exercise book on high schools.

MASARYKOVA UNIVERZITA
Přírodovědecká fakulta

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Akademický rok: 2015/2016

Ústav: Ústav matematiky a statistiky

Studentka: Marie Múčková

Program: Fyzika

Obor: Fyzika se zaměřením na vzdělávání
Matematika se zaměřením na vzdělávání

Ředitel *Ústavu matematiky a statistiky* PřF MU Vám ve smyslu Studijního a zkušebního řádu MU určuje bakalářskou práci s tématem:

Téma práce: Sbírka planimetrických úloh řešených pomocí shodností

Téma práce anglicky: Exercise book of plane geometry - isometric mappings

Oficiální zadání:
Sbírka bude zahrnovat planimetrické úlohy (konstrukční, důkazové, ...) při jejichž řešení se použije shodnost.

Literatura:

VYŠÍN, Jan. *Elementární geometire. I, Planimetrie [Vyšín, 1952]*. 1. vyd. Praha: Přírodovědecké vydavatelství, 1952. 266 s.

HEJNÝ, Milan a Naďa STEHLÍKOVÁ. *Elementární matematika : rovnice, teorie čísel, kombinatorika, planimetrie*. 1. vyd. Praha: Karolinum, 1995. 93 s. ISBN 80-7184-103-X.

KISELEV, A. P. *Geometrie., Planimetrie a stereometrie*. Vyd. 1. Praha: Přírodovědecké nakladatelství, 1952. 351 s.

POMYKALOVÁ, Eva. *Matematika pro gymnázia :planimetrie*. 4., upr. vyd. Praha: Prometheus, 1993. 206 s. ISBN 80-7196-174-4.

MOLNÁR, Josef. *Planimetrie*. 1. vyd. Olomouc: Univerzita Palackého, 2001. 128 s. ISBN 80-244-0370-6.

Jazyk závěrečné práce:

Vedoucí práce: prof. RNDr. Josef Janyška, DSc.

Datum zadání práce: 10. 6. 2015

V Brně dne: 20. 10. 2015

Souhlasím se zadáním (podpis, datum):

Mučková

Marie Múčková
studentka

prof. RNDr. Josef Janyška, DSc.
vedoucí práce

v.z. Paul Hoá

prof. RNDr. Jan Slovák, DrSc.
ředitel Ústavu matematiky a statistiky

Poděkování

Na tomto místě bych chtěla poděkovat vedoucímu své bakalářské práce panu profesorovi Janyškovi za jeho odborné vedení, užitečné připomínky, cenné rady a čas, který mi při psaní této práce věnoval. Děkuji také své rodině a přátelům za velkou podporu.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svoji bakalářskou práci vypracovala samostatně s využitím informačních zdrojů, které jsou v práci citovány.

Brno 22. května 2016 ....

Marie Múčková

Obsah

Úvod

Cílem této bakalářské práce bylo zhotovit sbírku úloh, která by obsahovala jak řešené, tak i neřešené příklady k samostatnému procvičení látky. Vše je uzpůsobeno pro možnost využití na středních školách ve výuce planimetrie, konkrétně tedy tématu shodných zobrazení.

Bakalářská práce je sestavena z šesti kapitol. První kapitola vysvětluje obecně zobrazení jako takové, definuje zobrazení shodné a pojednává o jeho vlastnostech. Každá další kapitola se věnuje jednotlivým čtyřem druhům tohoto zobrazení a zahrnuje i jejich skládání. Všechny dílčí kapitoly jsou složeny z části teoretické, kde je vždy definováno dané zobrazení a ukázány jeho principy na jednoduchých příkladech, a z části věnované typovým příkladům řešených pomocí shodností.

Pořadí kapitol a jejich teoretická část je inspirována knihou *Matematika pro gymnázia: planimetrie* [11], aby odpovídala běžně probíranému středoškolskému učivu. V práci jsou zahrnuty jak úlohy konstrukční, tak i důkazové.

Stavba každého řešeného příkladu je pro přehlednost vždy stejná. Kromě zadání je v úloze slovně popsán její podrobný rozbor včetně jeho odůvodnění a postup pro rýsování. Mimo to je přiložen i obrázek výsledného možného řešení s popisem konstrukce. Závěr shrnuje počet všech možných řešení.

V celé práci předpokládáme znalost studentů učiva z předešlých školních let, například konstrukci středu úsečky, tečny z bodu ke kružnici nebo také sestrojení a význam Thaletovy kružnice či ekvigonály (resp. množiny bodů s vlastností vidět danou úsečku pod určitým úhlem), vět o shodnosti trojúhelníků apod.

Ke tvorbě obrázků všech vzorových příkladů byl použit matematický program GeoGebra, který je volně dostupný.
Práce je vysázena v systému LaTeX.

Přehled použitého značení

Pro snazší orientaci v textu zde čtenáři předkládáme přehled základního značení, které se v celé práci vyskytuje.

A	bod A
p	přímka p
AB	úsečka AB
$\sphericalangle AXB$	úhel AXB
α	úhel α
o	osa o
$\boldsymbol{AB}$	orientovaná úsečka AB
v_a	výška ke straně a
t_a	těžnice trojúhelníku vedená vrcholem A
S_{AB}	střed úsečky AB
$\triangle ABC$	trojúhelník ABC
$k(S;r)$	kružnice k se středem v bodě S a poloměrem r
$X \in p$	bod X leží na přímce p
$p \cap q$	průnik přímky p s přímkou q
ε	ekvigonála, resp. množina bodů s vlastností vidět danou úsečku pod určitým úhlem
τ_{AB}	Thaletova kružnice nad úsečkou AB
$\mathsf{O}(o)$	osová souměrnost polde osy o
$\mathsf{S}(S)$	středová souměrnost podle bodu S
$\mathsf{T}(\boldsymbol{AB})$	posunutí o orientovanou úsečku AB
$\mathsf{R}(S;\alpha)$	otočení kolem bodu S o úhel α
$\mathsf{Z}: X \to X'$	bod X' je obrazem bodu X v zobrazení Z
$p \perp q$	přímka p je kolmá k přímce q
$p \parallel q$	přímka p je rovnoběžná s přímkou q
$\lvert\sphericalangle AXB\rvert$	velikost úhlu AXB
$\lvert AB\rvert$	velikost úsečky AB
$\lvert Xp\rvert$	vzdálenost bodu X od přímky p

Kapitola 1

Shodná zobrazení

Text teorie příslušný k této kapitole je brán z knihy *Matematika pro gymnázia: planimetrie*.[11]

Zobrazení f v rovině je předpis, který každému bodu X roviny přiřazuje právě jeden bod X' roviny. Bod X se nazývá **vzor**, bod X' jeho **obraz**. Zapisujeme $f : X \to X'$.

Body X, pro jejichž obrazy platí $X' = X$, se nazývají **samodružné body zobrazení**. Zobrazení, ve kterém je každý bod samodružný, se nazývá **identita**.

Zobrazení v rovině je **shodné zobrazení** nebo také **shodnost**, právě když obrazem každé úsečky AB je úsečka $A'B'$ shodná s úsečkou AB.

Představu o shodném zobrazení si můžeme utvořit při použití tzv. průsvitky. Pokud máme nějaký útvar **U**, můžeme ho překreslit na průsvitku. Tu přemístíme buď tak, že ji necháme vzhledem k rovině lícem nahoru, nebo obrátíme lícem dolů. Útvar v přemístěné poloze překreslíme zpět do dané roviny. Dostaneme tak nový útvar, který je shodný s útvarem původním a je jeho obrazem.

Jestliže je třeba při přemisťování obracet, jde o **nepřímou shodnost**. Neobrátíme-li průsvitku, jde o **shodnost přímou**.

V každém shodném zobrazení platí:

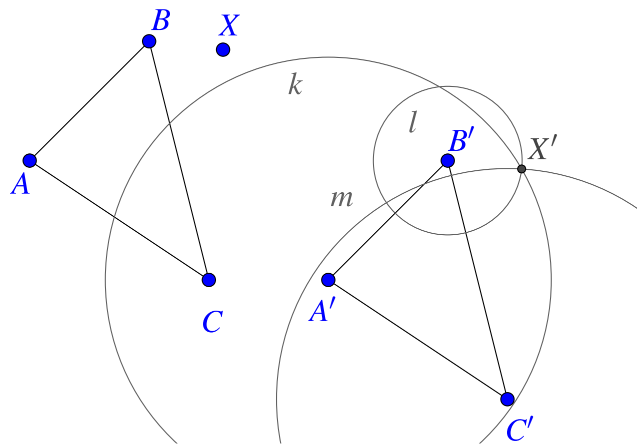
- obrazem přímky AB je přímka $A'B'$; obrazem rovnoběžných přímek jsou rovnoběžné přímky,
- obrazem polopřímky AB je polopřímka $A'B'$; obrazem opačných polopřímek jsou opačné polopřímky,
- obrazem poloroviny pA je polorovina $p'A'$; obrazem opačných polorovin jsou opačné poloroviny,
- obrazem úhlu AVB je úhel $A'V'B'$ shodný s úhlem AVB,
- obrazem útvaru **U** je útvar **U**$'$ shodný s útvarem **U**.

Určenost shodného zobrazení

Mějme dva shodné trojúhelníky ABC a $A'B'C'$. Dokažte, že zobrazení, které zobrazuje A na A', B na B' a C na C' určuje shodné zobrazení v rovině.

Řešení

Máme dané dva trojúhelníky. Zvolme libovolný bod X, který bude mít určitou vzdálenost od vrcholů trojúhelníku ABC. Trojúhelník ABC označme jako vzor a trojúhelník $A'B'C'$ tedy jako obraz shodného zobrazení.
Sestrojme kružnici $k(A'; |AX|)$, kružnici $l(B'; |BX|)$ a kružnici $m(C'; |CX|)$. Průnik těchto tří kružnic jednoznačně určí bod X', který bude ve stejné vzdálenosti od vrcholů trojúhelníka $A'B'C'$ jako bod X od vrcholů trojúhelníka ABC.



Obr. 1.1: Shodnost trojúhelníků

Popis konstrukce:

1. $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$
2. X, libovolný bod
3. k; $k(A'; |AX|)$
4. l; $l(B'; |BX|)$
5. m; $m(C'; |CX|)$
6. X'; $X' \in k \cap l \cap m$

Kapitola 2

Osová souměrnost

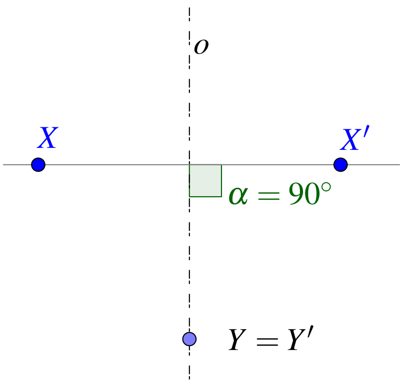
Text teorie příslušný k této kapitole je brán z knihy *Matematika pro gymnázia: planimetrie*.[11]

Je dána přímka o. **Osová souměrnost s osou** o je shodné zobrazení $\mathsf{O}(o)$, které přiřazuje:

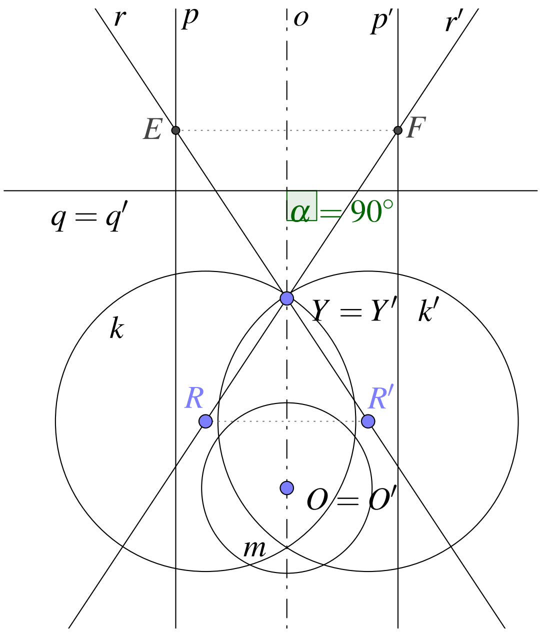
1. každému bodu $X \notin o$ bod X' tak, že přímka XX' je kolmá k přímce o a střed úsečky XX' leží na přímce o,
2. každému bodu $Y \in o$ bod $Y' = Y$.

Přímka o se nazývá **osa souměrnosti**, o bodech X, X' říkáme, že jsou souměrně sdružené podle osy souměrnosti. Osová souměrnost je **nepřímá shodnost**.

Jednoduché příklady principu osové souměrnosti



Obr. 2.1: Zobrazení bodu

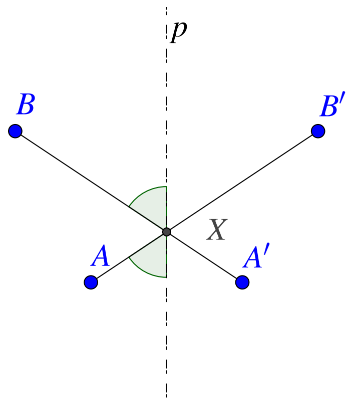


Obr. 2.2: Zobrazení přímek a kružnic

Zobrazení úhlů

Je dána přímka p a dva body $A \neq B$ uvnitř jedné z polorovin s hraniční přímkou p. Sestrojte bod $X \in p$ tak, aby úsečky AX, BX svíraly s přímkou p shodné úhly. [2, strana 14, př. 1]

Řešení



Obr. 2.3: Zobrazení úhlů

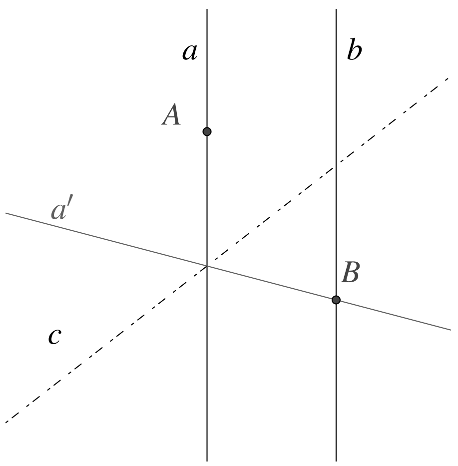
Po libovolném zvolení bodů, které splňují zadání, označme přímku p jako osu souměrnosti.
Zobrazme body A, B podle osy p a získáme body A', B'. Při spojení bodů B s A' a A s B' úsečkami, dostaneme bod X, který zároveň leží na ose p.
Z vlastností osové souměrnosti víme, že toto shodné zobrazení zachovává úhly. To tedy znamená, že úsečka AX bude svírat stejný úhel s přímkou p jako úsečka $A'X$, stejně tak úsečky BX a $B'X$.

Závěr
Při jakémkoli zvolení bodů A, B, které vyhovují zadání, sestrojíme lehce bod X díky osové souměrnosti.

Zobrazení přímek

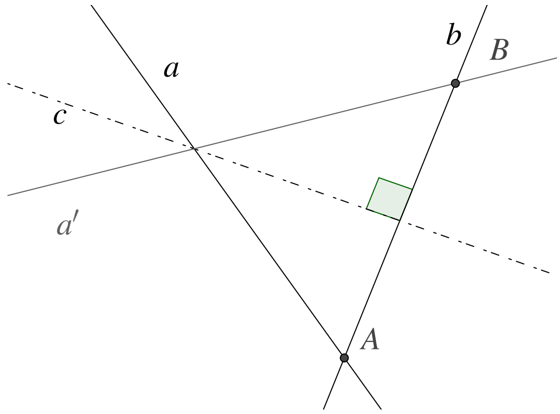
Jsou dány různé přímky a, b, c. Určete bod $A \in a$ tak, aby bod B k němu souměrný podle přímky c náležel přímce b. [2, strana 14, př. 4]

Řešení



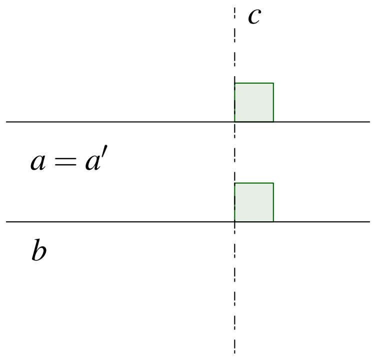
Obr. 2.4: Zobrazení přímek, kde $a \parallel b$

Jestliže si zvolíme přímky a, b, c v podobné poloze jako na obrázku (Obr. 1.4), řešení příkladu je následovné.
Jako osu souměrnosti zvolíme přímku c a zobrazíme přímku a. Průnik nové přímky a' s přímkou b označíme bodem B. Zobrazením bodu B podle osy c dostaneme hledaný bod A.



V případě jiné volby přímek a, b, c, kde přímku c zvolíme kolmou na přímku b, je řešení dle obrázku (Obr. 1.5.).
Konstrukce je analogická jako v předchozím případě.

Obr. 2.5: Zobrazení přímek, kde $c \perp b$



Pokud přímky a, b, c budou v umístění, kde přímka $c \perp a \wedge a \parallel b$, úloha nebude mít žádné řešení.
Opět analogicky sestrojíme jako v předchozím případě a zjistíme, že přímka a se nám zobrazí sama na sebe a neprotne přímku b.

Obr. 2.6: Zobrazení přímek, kde $c \perp a \wedge a \parallel b$

Závěr
U této úlohy záleží na volbě polohy daných přímek a, b, c.
Počet řešení závisí na poloze přímek $b,\ a'$.

Tyto přímky se mohou protínat v jednom bodě, dostaneme tedy jedno řešení.
Pokud $b \parallel a'$ budou různé, nedostaneme žádné řešení. Což nastalo například v našem třetím případě.
Nekonečně mnoho řešení dostaneme eventuálně, když přímka a' bude shodná s přímkou b.

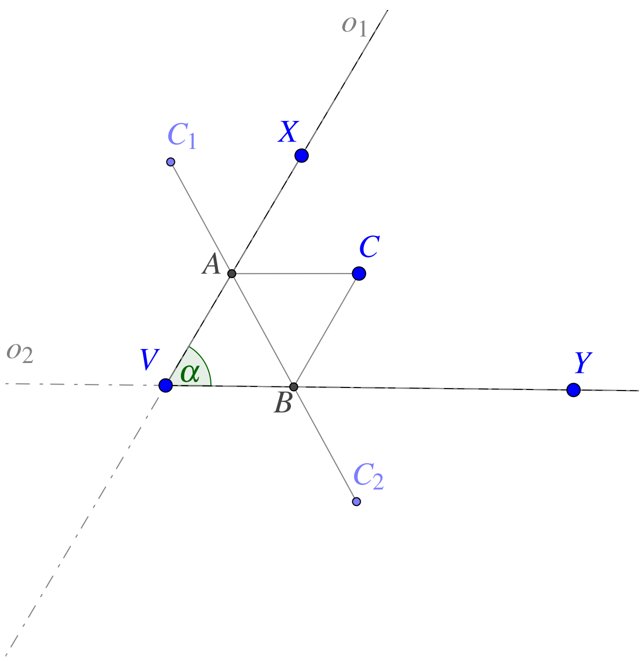
Nyní si ukážeme několik řešených příkladů na osovou souměrnost.

Příklad 1

Je dán ostrý úhel XVY a jeho vnitřní bod C. Sestrojte trojúhelník ABC tak, aby jeho vrcholy A, B ležely po řadě na polopřímkách VX, VY a obvod trojúhelníku byl minimální. [11, strana 131, př. 3.9]

Řešení

Nejprve strany trojúhelníka nahradíme jednou úsečkou, která bude spojnicí bodů, jejichž vzdálenost od polopřímek VX a VY je stejná jako vzdálenost od bodu C.
Použijeme osovou souměrnost dle osy VX označenou jako o_1, zobrazíme bod C a získáme jeho obraz C_1. Analogicky provedeme zobrazení bodu C podle osy VY (tedy o_2) za vzniku bodu C_2.
Spojením těchto bodů, dostaneme úsečku C_1C_2. Vzniklé průsečíky úsečky C_1C_2 s rameny úhlu VX a VY jsou zbývajícími body A, B hledaného trojúhelníka ABC o minimálním obvodu.



Obr. 2.7: Příklad 1

Popis konstrukce:

1. o_1, o_2; $o_1 = VX$, $o_2 = VY$, osy souměrnosti
2. C_1; $\mathsf{O}(o_1) : C \to C_1$
3. C_2; $\mathsf{O}(o_2) : C \to C_2$ lib.
4. C_1C_2
5. A; $A \in VX \cap C_1C_2$
6. B; $B \in VY \cap C_1C_2$
7. trojúhelník ABC

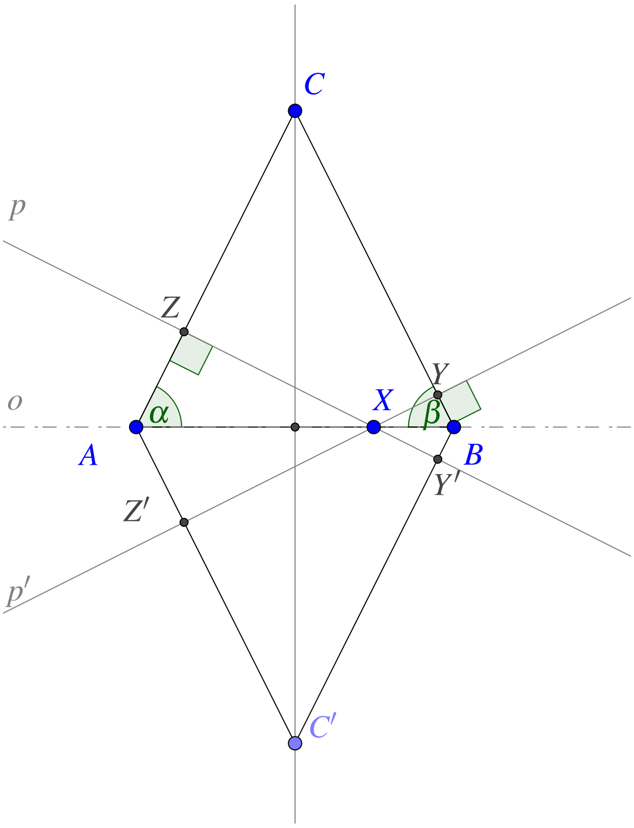
Závěr
Tato úloha má jedno řešení.
Pro libovolný bod $A \in o_1$ a $B \in o_2$ je obvod trojúhelníku ABC roven součtu délek $|C_1A| + |AB| + |BC_2|$.
Tento součet je minimální, pokud body C_1, A, B, C_2 leží na přímce.

Příklad 2

Je dán rovnoramenný trojúhelník ABC (AB je základna). Dokažte, že součet vzdáleností každého bodu X základny AB od přímek AC a BC je konstantní. [11, strana 131, př. 3.8]

Řešení

Pro zkonstruování důkazu využijeme znalosti vlastností osové souměrnosti. V našem případně budeme konkrétně zobrazovat podle strany AB.
Víme, že osová souměrnost zachovává vzdálenosti (tedy $|XZ| = |XZ'|$) a velikosti úhlů (tedy $|\sphericalangle CAB| = |\sphericalangle BAC'|$, kde bod C' je obrazem bodu C podle osy o).
Ze zadání víme, že trojúhelník ABC je rovnoramenný. Dále je zřejmé, že $AC \parallel BC'$, neboť úhly CAB a ABC' jsou střídavé a mají tedy stejnou velikost.
Pak $|XY| + |XZ| = |XY| + |XZ'| = konst.$, vzdálenosti rovnoběžek jsou konstantní bez ohledu na umístění bodu X.



Popis konstrukce:

1. o; $o = AB$, osa souměrnosti
2. C'; $\mathsf{O}(o) : C \rightarrow C'$
3. X; $X \in AB$ lib.
4. p; $p \perp AC \wedge X \in p$
5. Z; $Z \in p \cap AC$
6. Z'; $\mathsf{O}(o) : Z \rightarrow Z'$
7. Y; $Y \in p' \cap CB$
8. Y'; $Y' \in p \cap C'B$

Obr. 2.8: Příklad 2

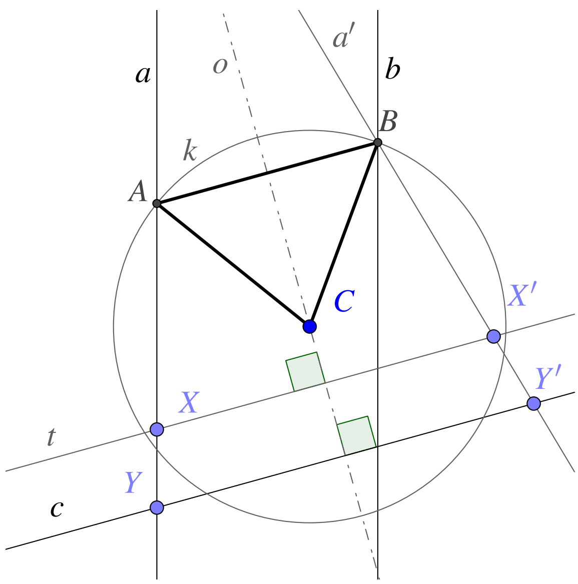
Závěr
Pohybujeme-li bodem X po základně, naměřený součet vzdáleností od ramen se skutečně nemění.

Příklad 3

Jsou dány dvě různé rovnoběžné přímky a, b, bod C, který je vnitřním bodem pásu určeného rovnoběžkami a, b, a přímka c. Sestrojte rovnoramenný trojúhelník ABC s hlavním vrcholem C tak, aby $AB \parallel c$ a $A \in a$ a $B \in b$. [2, strana 14, př. 7]

Řešení

Poté, co sestrojíme zadání, narýsujeme osu souměrnosti o. Osa bude procházet bodem C a bude kolmá k přímce c. Tím zajistíme, že výsledná strana AB bude rovnoběžná s přímkou c, jak je požadováno v zadání.
Pomocí této osy a pomocných bodů X, Y zobrazíme přímku a na přímku a'. Průnik zobrazené přímky s přímkou b označíme jako bod B. Tento bod je vrcholem hledaného trojúhleníka.
V osové symetrii dle osy o můžeme zobrazit bod B na bod A, nebo tuto konstrukci provedeme použitím kružnice k, protože víme, že trojúhelník ABC má být rovnoramenný.
Tím jsme s řešením hotovi.



Obr. 2.9: Příklad 3

Popis konstrukce:

1. o; $o \perp c \wedge C \in o$, osa souměrnosti
2. X, Y; $X, Y \in a$ lib.
3. X'; $\mathsf{O}(o) : X \rightarrow X'$
4. Y'; $\mathsf{O}(o) : Y \rightarrow Y'$
5. a'; $\mathsf{O}(o) : a \rightarrow a'$
6. B; $B \in a' \cap b$
7. k; $k(C; |CA|)$
8. A; $A \in k \cap a$
9. trojúhelník ABC

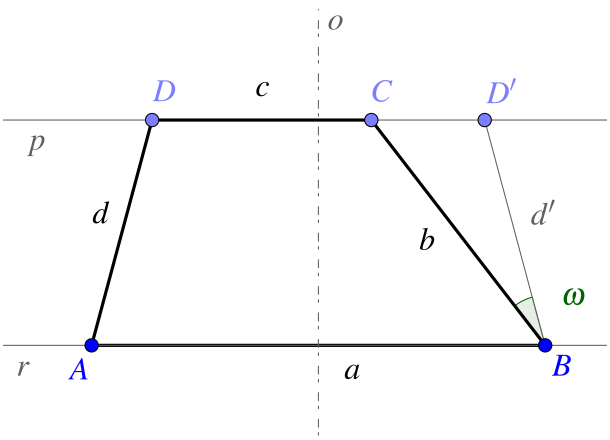
Závěr
Počet řešení závisí na poloze přímek b a a'.
Pokud se b, a' protnou v jednom bodě, úloha má jen jedno řešení.
Bude-li $b \parallel a'$, tedy pokud přímka c bude kolmá k přímkám a, b nedostaneme žádné řešení.
A jestliže b, a' budou totožné, což by nastalo v případě, pokud by bod C ležel na ose pásu určeného rovnoběžkami a, b, měla by úloha nekonečně mnoho řešení.

Příklad 4

Jsou dány úsečky b, c, d a úhel ω. Sestrojte lichoběžník $ABCD$ tak, aby $BC = b, CD = c, DA = d$ a $|\sphericalangle DAB| - |\sphericalangle ABC| = \omega$. [2, strana 14, př. 9]

Řešení

V úloze využijeme osovou symetrii dle osy o úsečky AB pro zobrazení bodu A na bod B a bodu D na bod D'.
Pak jsme schopni začít a to s konstrukcí trojúhelníka $BD'C$, neboť je zřejmé, že $|\sphericalangle CD'B| = \omega$.
Úsečkou CD' proložíme přímku p a prostřednictvím osové symetrie podle osy o sestrojíme bod D.
Abychom dostali i zbývající bod A, potřebujeme přímku r rovnoběžnou s přímkou p a procházející bodem B. Pak bod A bude obrazem bodu B v osové souměrnosti podle osy o.
Poté již máme vše potřebné k sestrojení požadovaného lichoběžníka.



Obr. 2.10: Příklad 4

Popis konstrukce:

1. trojúhelník $BD'C$; kde:

   $$|BD'| = d,$$
   $$|BC| = b,$$
   $$|\sphericalangle CBD'| = \omega$$

2. p; $C, D' \in p$
3. r; $r \parallel p \wedge B \in r$
4. D; $\mathsf{O}(o) : D' \to D$
5. A; $\mathsf{O}(o) : B \to A$
6. lichoběžník $ABCD$

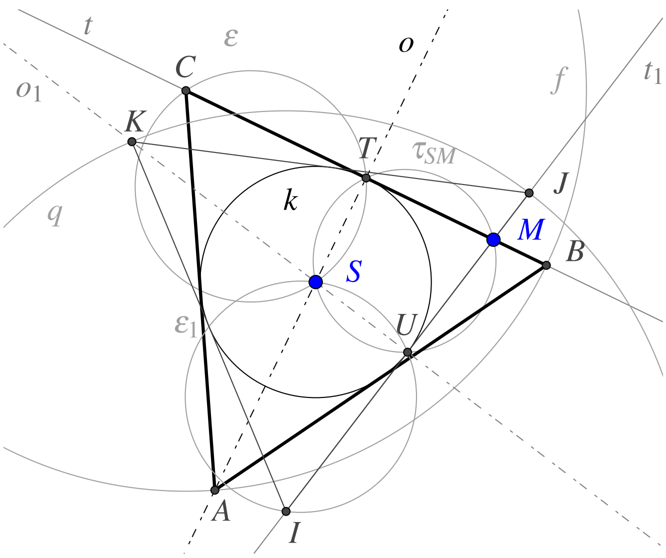
Závěr
V tomto úkolu získáme jedno řešení.

Příklad 5

Je dána kružnice $k(S; r)$ a bod M vně kružnice k. Sestrojte všechny rovnostranné trojúhelníky, pro něž je k kružnice vepsaná a bod M leží na přímce obsahující jednu stranu trojúhelníku.
[11, strana 131, př. 3.5]

Řešení

Po narýsování zadání si nejprve zkonstruujeme tečny t, t_1 z bodu M ke kružnici k pomocí Thaletovy kružnice nad průměrem SM, kterou označíme τ_{SM}. Body průniku zadané kružnice k s kružnicí τ_{SM} nazveme T, U. Tyto body jsou tedy body dotyku tečen t, t_1 a kružnice k.
Z předpokladu, že tyto trojúhelníky mají vrcholové vnitřní úhly o velikosti 60° a že osy stran splývají s osami těchto úhlů, je jistě zřejmé, že střed kružnice vepsané leží na průniku všech os jednotlivých stran rovnostranného trojúhelníka. Pak můžeme narýsovat množinu bodů, z nichž je úsečka ST vidět pod úhlem o velikosti 30°, tedy ekvigonálu ε.
Získáme bod C, který je průnikem ekvigonály ε a tečny t. V osové souměrnosti podle osy o, která je zároveň osou strany CB a prochází body ST, pak zobrazíme tento bod na bod B, který je druhým hledaným vrcholem trojúhelníka.
Na závěr sestrojíme bod A pomocí kružnice f se středem v bodě C o poloměru CB. Bod A zároveň leží na ose o. Teď již sestrojíme požadovaný trojúhelník.



Obr. 2.11: Příklad 5

Popis konstrukce:

1. τ_{SM}
2. T, U; $T, U \in \tau \cap k$
3. t; $t = MT$
4. o; $o = ST$, osa souměrnosti
5. ε; $\varepsilon = \{X; |\sphericalangle TXS| = 30°\}$
6. C; $C \in \varepsilon \cap t$
7. B; $\mathrm{O}(o) : C \to B$
8. f; $f(C; |CB|)$
8. A; $A \in o \cap f$
9. trojúhelník ABC

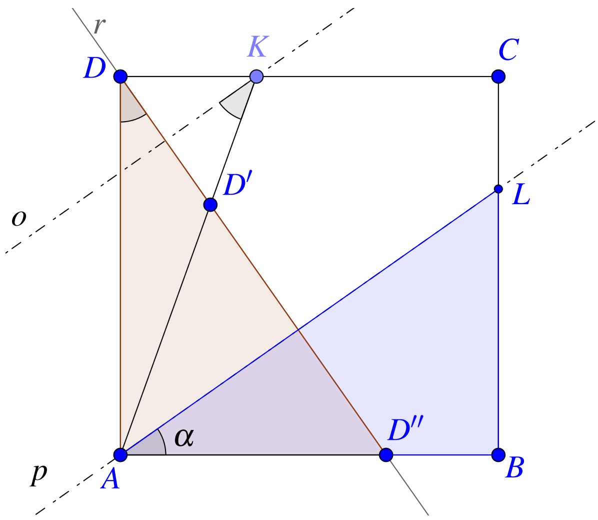
Závěr
Tato úloha bude mít dvě řešení. V našem případě máme druhý trojúhelník označen IJK. Postup konstrukce je analogický.

Příklad 6

Ve čtverci $ABCD$ je K libovolný bod strany DC, osa p úhlu BAK protíná stranu BC v bodě L. Dokažte, že platí $|BL| + |KD| = |AK|$. [6, strana 153, př. 61]

Řešení

Jestliže má platit daná rovnost, budeme považovat osu p úhlu BAK za osu souměrnosti. Sestrojíme k ní ještě osu o, která je s ní rovnoběžná a prochází již zvoleným bodem K.
Konstrukci provedeme zobrazením bodu D do bodu $D' \in AK$ v souměrnosti podle osy o a zobrazením bodu D' na bod $D'' \in AB$ dle osy p.
Má-li platit rovnost, je zřejmé, že $|KD| = |KD'|$.
Neboť platí $\triangle DD''A \cong \triangle ALB$ podle věty *usu*, je $|AD''| = |BL|$ a zároveň $|AD'| = |BL|$. Zadané tvrzení je tedy dokázáno.



Obr. 2.12: Příklad 6

Popis konstrukce:

1. p; $p = \{X; |X, AK| = |X, AB|\}$, osa souměrnosti
2. L; $L \in BC \cap p$
3. r; $r \perp p \wedge D \in r$
4. o; $o \parallel p \wedge K \in o$, osa souměrnosti
5. D'; $\mathrm{O}(o) : D \to D'$
6. $|KD| = |KD'|$
7. D''; $\mathrm{O}(p) : D' \to D''$
8. $\triangle DD''A \cong \triangle ALB$ podle věty *usu*
9. $|AD''| = |AD'| = |BL|$
10. $|BL| + |KD| = |AK|$

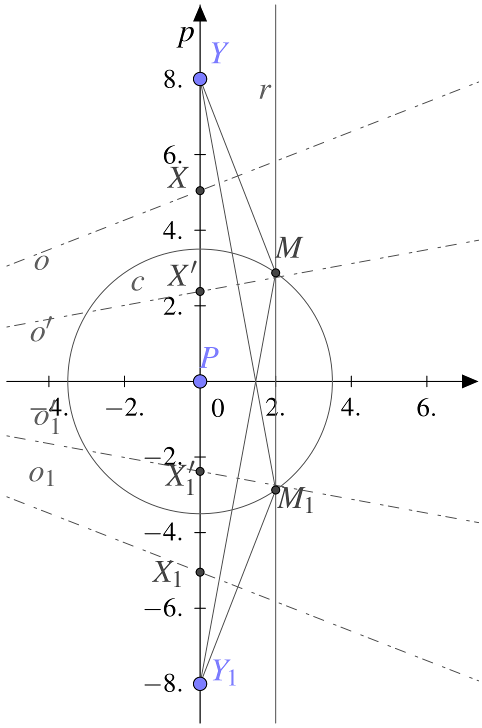
Závěr
Díky osové symetrii a shodnosti trojúhelníků jsme dokázali zadanou rovnost.
Jiné řešení úlohy můžeme ukázat pomocí otočení.

Příklad 7

Je dán bod M a přímka p s bodem $P(|pM| = 2\,cm, |PM| = 3{,}5\,cm)$. Sestrojte na přímce p všechny body X tak, aby $|PX| + |XM| = 8\,cm$. [11, strana 131, př. 3.10]

Řešení

Tuto úlohu vyřešíme jak geometricky, tak i analyticky. Proto si nejprve zvolíme vhodně soustavu souřadnic a narýsujeme si zadání.
Abychom dostali požadovanou rovnici, zvolíme bod Y jako obraz bodu M v osové symetrii a zároveň $|PY| = 8\,cm$. Potom bude platit, že $|XM| = |XY|$, kde bod X je bodem, který leží na přímce p a na ose o úsečky YM.



Obr. 2.13: Příklad 7

Popis konstrukce:

1. $Y, Y_1;\ |PY| = |PY_1| = 8\,cm$
2. $o, o_1;\ o = A; |PA| = |AY|$, osa souměrnosti
3. $Y;\ \mathrm{O}(o) : M \to Y$
4. $X, X_1;\ X \in PY \cap o$
5. $|YX| = |MX|$
6. $|PX| + |XM| = 8\,cm$

Ukázka analytického řešení

Zvolíme soustavu souřadnic. Ukážeme si výpočet jen pro jedno řešení.

Získané body ze zadání:

$M\,[2; 2.87]$

$P\,[0; 0]$

$Y\,[0; 8]$

rovnice přímek:

$o:\ x = 1 - 5,13t;$
$y = 5,44 - 2t;\ t \in \mathbb{R}$

$p:\ x = 0;$
$y = 4 - 4s;\ s \in \mathbb{R}$

Spočteme průnik přímky p a přímky o.

$5,13t = 1\ \ => t = \dfrac{1}{5,13}$

$5,44 - 2t = 4 - 4s$

$5,44 - \dfrac{2}{5,13} = 4 - 4s$

$s = -0,2625$

Dostaneme bod $X \in p \cap o$: $X[0;\, 5,05]$

Pak je zřejmé, že platí:

$|YX| = |MX|;\ |PX| + |XM| = 8\,cm$

Závěr

Úloha bude mít vždy 4 řešení, protože kružnice c určující vzdálenost bodu M od přímky p bude protínat přímku r, která označuje vzdálenost bodu M od přímky p, ve dvou bodech. Tedy další dvě řešení dostaneme pro bod M_1.

Příklady na procvičení

1. Jsou dány přímky a, o a kružnice k. Určete bod $K \in k$ tak, aby bod A k němu souměrný podle přímky o náležel přímce a. [2, strana 14, př. 5]

2. Na kulečníkovém stole je třeba vyslat kouli A tak, aby po odrazu o okraj stolu o zasáhla kouli B. Nakreslete dráhu koule A. [4, strana 69, př. 1]

3. Je dána přímka o a pravoúhlý trojúhelník ABC s opsanou kružnicí k. Sestrojte obraz $A'B'C'$ tohoto trojúhelníku v osové souměrnosti s osou o. Co bude obrazem kružnice k?
[4, strana 74, př. 13.8]

4. Sestrojte:

   a) čtverec $ABCD$, je-li dáno $a+e = 10\,cm$,

   b) obdélník $ABCD$, je-li dáno $e = 7\,cm, a-b = 1\,cm$,

   c) lichoběžník $ABCD(AB \parallel CD)$, je-li dáno $b = 3\,cm, c = 2,5\,cm, d = 2,6\,cm, \alpha - \beta = 20°$.

   [11, strana 132, př. 3.16]

5. Jsou dány dvě různé přímky p, o a kružnice $k(O;\ r)$. Sestrojte úsečku XY tak, aby byla kolmá k přímce o, její krajní body X, Y ležely po řadě na přímce p a kružnici k a její střed S ležel na přímce o. [11, strana 129, př. 4]

6. Je dána přímka p a dvě kružnice k_1, k_2 v různých polorovinách určených přímkou p. Sestrojte body $X \in k_1, Y \in k_2$ tak, aby $XY \perp p$ a úsečka XY byla přímkou p půlena. [2, strana 14, př. 6]

7. Sestrojte všechny trojúhelníky ABC, je-li dán jejich obvod $o = 12\,cm$ a úhly $\alpha = 60°$, $\beta = 45°$. [11, strana 130, př. 5]

8. Dokažte: Čtyřúhleník $ABCD$ je tečnový právě tehdy, když platí $a+c = b+d$. [6, strana 165, př. 70]

9. Sestrojte na stranách AC, CB daného trojúhelníku ABC po řadě body X, Y tak, aby úsečky AX, XY a YB byly shodné.[6, strana 189, př. 91]

10. A, B, C, D jsou takové čtyři body přímky p, že platí $AB = CD$ a že polopřímky AB, CD jsou souhlasné. V bodech A, B, C, D vztyčme po řadě kolmice o_1, o_2, o_3, o_4 k přímce p. Pro příslušné osové souměrnosti pak platí $\mathsf{O}_1\mathsf{O}_2 = \mathsf{O}_3\mathsf{O}_4$. Dokažte. [12, strana 89, př. 6,3]

11. Je dána úsečka AB s vnitřním bodem C. Vyšetřete množinu průsečíků D všech dvojic shodných kružnic, z nichž první prochází body A, C, druhá body C, B. [6, strana 171, př. 76]

Kapitola 3

Středová souměrnost

Text teorie příslušný k této kapitole je brán z knihy *Matematika pro gymnázia: planimetrie*.[11]

Je dán bod S. **Středová souměrnost se středem** S je shodné zobrazení $\mathsf{S}(S)$, které přiřazuje:

1. každému bodu $X \neq S$ bod X' tak, že bod S je středem úsečky XX',
2. bodu S bod $S' = S$.

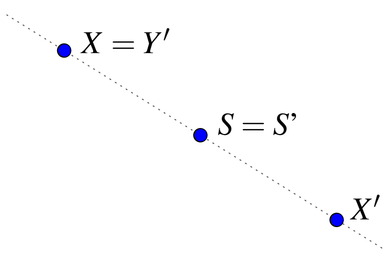
Bod S se nazývá **střed souměrnosti**, o bodech X, X' říkáme, že jsou souměrně sdružené podle středu souměrnosti. Středová souměrnost je **přímá shodnost**.

Jediným **samodružný bodem** středové souměrnosti je její střed. Obrazem přímky p, která neprochází středem souměrnosti, je přímka p' rovnoběžná s p. Všechny přímky, které procházejí středem souměrnosti, jsou **samodružné přímky** středové souměrnosti.

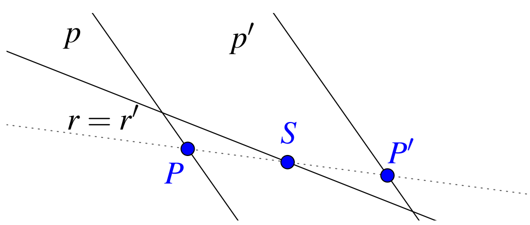
Středová souměrnost je jednoznačně určena středem souměrnosti. Je však jednoznačně určena také dvojicí různých bodů X, X', jestliže každý z nich je obrazem druhého v této středové souměrnosti. Středem souměrnosti je v tom případě střed úsečky X, X'.

Geometrické útvary $\mathbf{U}, \mathbf{U}'$, z nichž jeden je obrazem druhého ve středové souměrnosti se středem S, nazýváme **útvary souměrně sdružené podle středu** S. Je-li $\mathbf{U} = \mathbf{U}'$, pak říkáme, že **útvar U je středově souměrný** podle středu S.

Jednoduché příklady principu středové souměrnosti

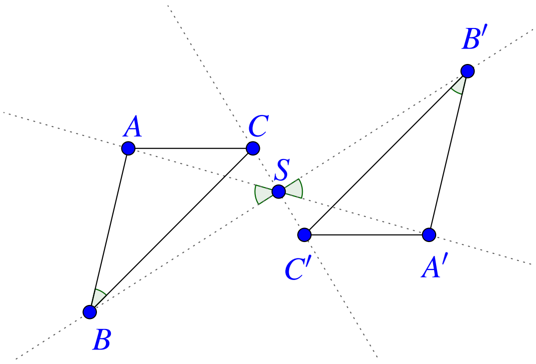


Obr. 3.1: Zobrazení bodu



Obr. 3.2: Zobrazení přímek

Zobrazení úhlů



Zobrazíme-li například trojúhelník ve středové souměrnosti, dostaneme shodný trojúhelník. Jak lze vidět z obrázku, úhly v útvaru se nemění. Středová souměrnost zachovává úhly.

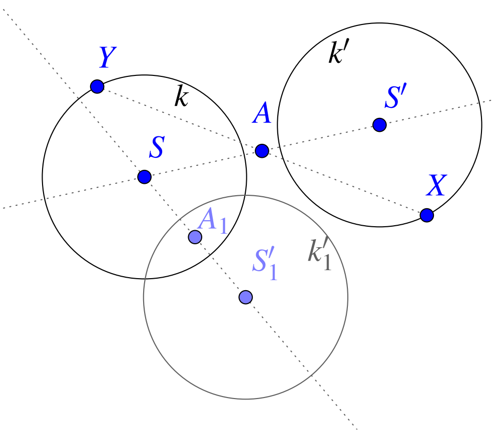
Obr. 3.3: Zobrazení trojúhelníka a jeho úhlů

Zobrazení kružnic

Je dána kružnice $k(S;r)$ a bod $A(A \notin k)$. Určete množinu všech bodů X takových, že bod A je středem úsečky XY a $Y \in k$. [11, strana 137, př. 3.21]

Řešení

Předpokládejme, že úloha má řešení. Bod A je středem úsečky XY. Bod Y je tedy obrazem bodu X ve středové souměrnosti se středem A. Leží-li bod Y na kružnici k, pak bod X musí podobně jako jeho obraz ležet na obrazu k' kružnice k. Hledanou množinou všech bodů X je tedy kružnice k'.



Popis konstrukce:

1. A, střed souměrnosti
2. k'; $\mathsf{S}(S) : k \rightarrow k'$
3. $k' = \{X;\ |XA| = |YA|, Y \in k\}$

Obr. 3.4: Zobrazení kružnic

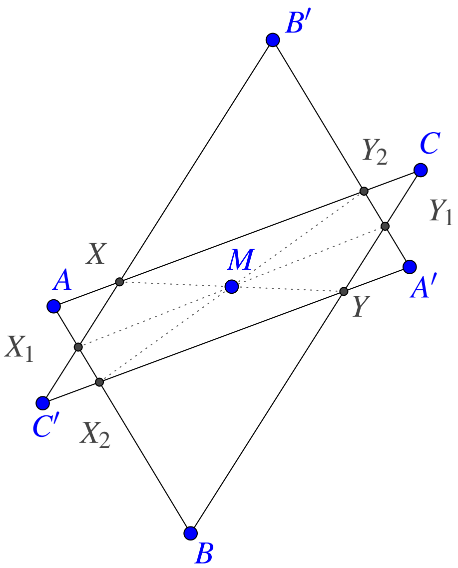
Závěr
Úloha má jediné řešení k'. Při volbě $|SA|$ menší než poloměr kružnice k bude řešením k'_1.
Pokud $A = S$, je naší hledanou množinou kružnice k.

Zobrazení trojúhelníka

Je dán trojúhelník ABC a jeho vnitřní bod M. Sestrojte všechny úsečky XY se středem M a s krajními body X,Y na hranici trojúhelníku.[11, strana 137, př. 3.23]

Řešení

Jelikož bod M má být středem každé z úseček XY, můžeme použít středovou souměrnost se středem právě v bodě M. Tento bod bude tedy značit střed souměrnosti.
Zobrazíme celý trojúhelník ABC, protože body X,Y podle zadání leží na hranici daného trojúhelníka.
Průsečíky jednotlivých stran trojúhelníka ABC a $A'B'C'$ jsou hledanými body X,Y.
Platí, že každý vzniklý průsečík označen X se zobrazí na jiný protější průsečík Y a naopak. Záleží na tom, které body průniku stran trojúhelníků ABC a $A'B'C'$ si zvolíme za vzory a které za obrazy.



Popis konstrukce:

1. M; střed souměrnosti
2. trojúhelník $A'B'C'$; kde:

$$A';\ \mathsf{S}(M): A \to A'$$
$$B';\ \mathsf{S}(M): B \to B'$$
$$C';\ \mathsf{S}(M): C \to C'$$

3. X; $X \in ABC \cap A'B'C'$
   Y; $Y \in ABC \cap A'B'C'$
4. $\mathsf{S}(M): X \to Y$
   $\mathsf{S}(M): Y \to X$
5. $|XM| = |MY|$

Obr. 3.5: Zobrazení trojúhelníka

Závěr
V této úloze dostaneme jedno, dvě nebo tři řešení.
Počet řešení se vyplývá z polohy bodu M a ze zobrazení vrcholů trojúhelníka ABC.
Budou-li obrazy A',B',C' vně trojúhelníka ABC, dostaneme tři řešení.
Dvě budou právě tehdy, když se jeden z vrcholů zobrazí na trojúhelník ABC.
Jediné řešení nastane, jestliže se některý vrchol zobrazí dovnitř daného trojúhelníka ABC.

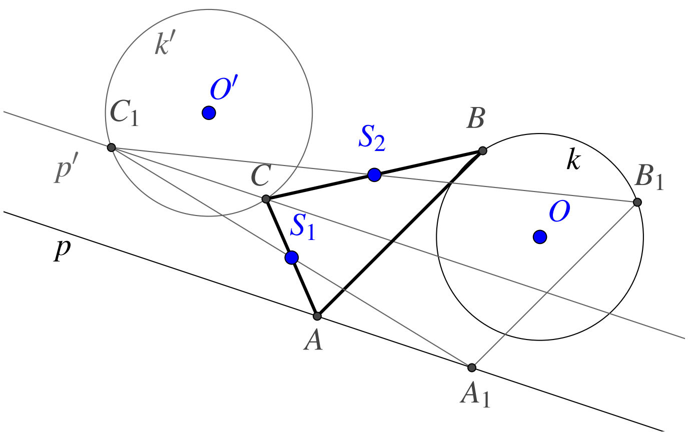
Nyní si ukážeme několik řešených příkladů na středovou souměrnost.

Příklad 1

Je dána přímka p, kružnice k a body S_1, S_2 navzájem různé. Sestrojte trojúhelník ABC tak, aby vrchol $A \in p$, vrchol $B \in k$ a body S_1, S_2 byly po řadě středy stran AC, BC. [2, strana 15, př. 21]

Řešení

Jestliže body S_1, S_2 mají být po řadě středy stran AC, BC, využijeme znalosti vlastností středové souměrnosti a zvolíme body S_1, S_2 jako středy souměrnosti.
Zobrazíme kružnici k ve středové symetrii se středem v bodě S_2 a přímku p ve středové symetrii se středem v bodě S_1. Dostaneme jejich obrazy k', p', jejichž průnikem je bod C. Hledané body A, B jsou obrazy bodu C ve středových souměrnostech se středy S_1, S_2. Je zřejmé, že platí $A \in p \wedge B \in k$.



Obr. 3.6: Příklad 1

Popis konstrukce:

1. S_1, S_2; středy souměrnosti
2. k'; $\mathsf{S}(S_2) : k \to k'$
3. p'; $\mathsf{S}(S_1) : p \to p'$
4. C; $C \in k' \cap p'$
5. B; $\mathsf{S}(S_2) : C \to B$
6. A; $\mathsf{S}(S_1) : C \to A$
7. trojúhelník ABC

Závěr
Počet řešení tedy závisí na počtu bodů v průniku $C \in k' \cap p'$.
Jedno řešení dostaneme, pokud se bude přímka p' dotýkat kružnice v jednom bodě.
V úloze podobně zvolené jako v našem případě přímka p' protíná kružnici k' ve dvou bodech, budeme mít dvě řešení.
Úloha nebude mít řešení, když bude průnik $p' \cap k'$ prázdný.

Příklad 2

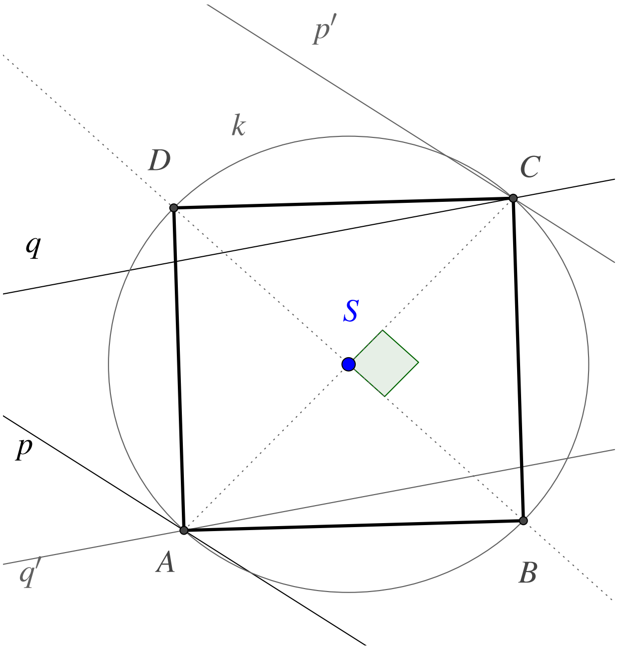
Jsou dány přímky p, q a bod S. Sestrojte čtverec $ABCD$ o středu S tak, aby byla splněna jedna z následujících podmínek:

b) Pro dva protilehlé vrcholy A, C platí $A \in p$, $C \in q$.

[4, strana 64, př. 11.11]

Řešení

Pokud bod S je středem čtverce, ze symetrie víme, že se jednotlivé úhlopříčky půlí v S. Protější vrcholy se na sebe tedy zobrazí ve středové souměrnosti.
Platí-li $A \in p$, $C \in q$, zobrazením přímek p,q podle středu S získáme body průniku p',q' s původními přímkami. Tyto body jsou protilehlými vrcholy A,C čtverce $ABCD$. Například pomocí kružnice k jednoduše sestrojíme zbývající vrcholy a doplníme na čtverec.



Obr. 3.7: Příklad 2

Popis konstrukce:

1. S; střed souměrnosti
2. p'; $\mathsf{S}(S) : p \rightarrow p'$
3. q'; $\mathsf{S}(S) : q \rightarrow q'$
4. $A; A \in p \cap q'$
5. $C; \mathsf{S}(S) : A \rightarrow C$
6. $k; k(S;\ |AS|)$
7. čtverec $ABCD$

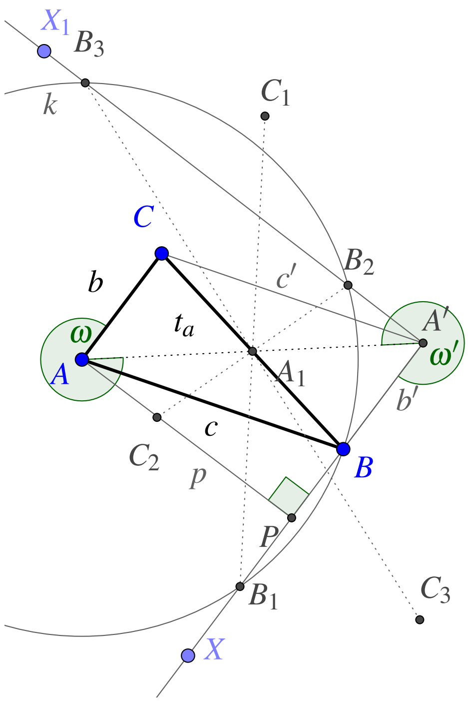
Závěr
Řešitelnost příkladu záleží na poloze přímek p,q a bodu S.
Jestliže budou přímky p,q různoběžné, průnikem $p' \cap q$ a $q' \cap p$ bude vždy jediný bod a úloha bude mít jediné řešení.
Nekonečně mnoho řešení nastane v případě, budou-li přímky p,q rovnoběžné různé a bod S bude ležet na ose pásu ohraničeného těmito přímkami. Průnik q' s p bude přímka p.
Pokud S nebude ležet na ose pásu, přímky p,q' nebudou mít společné body a úloha nebude mít řešení. Řešení nedostaneme ani v případě, že přímky p,q budou totožné.

Příklad 3

Sestrojte trojúhelníky ABC, je-li dána strana c, těžnice t_a a dutý úhel ω sevřený těžnicí t_a a stranou b. [2, strana 15, př. 23]

Řešení

Nejprve si uvědomme, že bude nejsnazší řešit úlohu doplněním hledaného trojúhelníka na rovnoběžník. Vznikne nám tedy bod A', pro který platí $|AA'| = 2t_a$. Úhel $\omega' = \sphericalangle AA'X$ je shodný díky vlastnostem rovnoběžníku, tedy rovnoběžek proťatých příčkou, s dutým úhlem ω sevřeného těžnicí t_a a stranou b. Pro velikost dutého úhlu platí $180° < \omega < 360°$.
Pak sestrojíme trojúhelník ABA', kde $|AA'| = 2t_a$, $|\sphericalangle AA'X| = \omega$ a bod B je průsečíkem kružnice $k(A,c)$ a polopřímky $A'X$. Střed A_1 úsečky AA' označíme jako střed souměrnosti a zobrazíme bod B do bodu C.
Nyní můžeme sestrojit požadovaný trojúhelník ABC.



Obr. 3.8: Příklad 3

Popis konstrukce:

1. trojúhelník ABA'; kde:

   $|AA'| = 2t_a$

   $|\sphericalangle AA'X| = \omega$

   B; $B \in k(A;c) \cap A'X$

2. A_1; $|AA_1| = |A_1A'|$, střed souměrnosti

3. C; $\mathsf{S}(A_1) : B \to C$

4. trojúhelník ABC

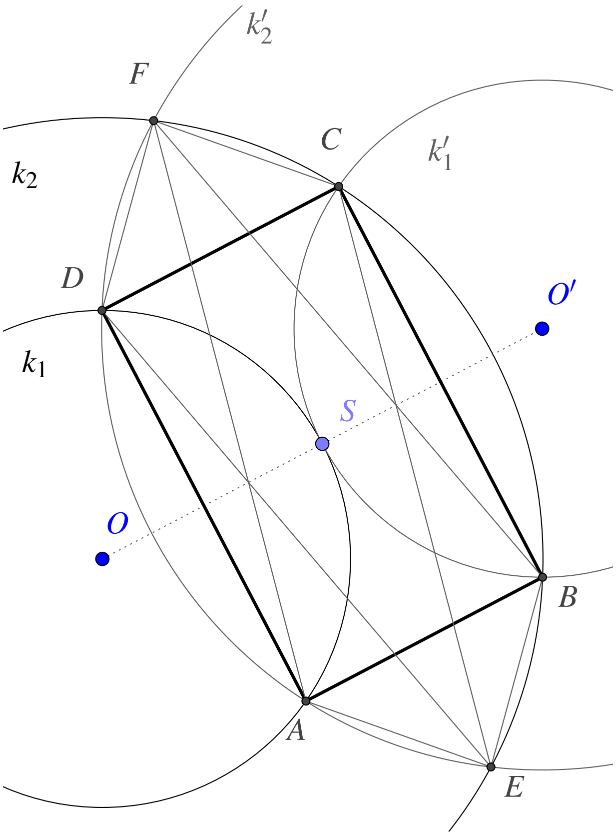
Závěr
Řešitelnost úlohy závisí na dobrém zvolení jednotlivých parametrů, zvláště pak na průniku kružnice k s polopřímkou $A'X$.
Označme vzdálenost bodu A od polopřímky $A'X$.
Jestliže $d < c < 2t_a$, budeme mít 2 řešení.
Pokud bude platit $c \geq 2t_a$ nebo $c = d$, pak dostaneme jedno řešení.
V případě $c < d$ nebudeme mít žádné řešení.
Obdobný počet řešení dostaneme, pokud otočíme úhel ω na opačnou stranu.

Příklad 4

Jsou dány dvě soustředné kružnice k_1, k_2 a bod $S \in k_1$. Sestrojte rovnoběžník se středem S, jehož vrcholy leží na daných kružnicích. [2, strana 16, př. 26]

Řešení

Bod S je středem rovnoběžníku, jehož úhlopříčky se navzájem půlí. Můžeme tedy říci, že čtyřúhelník je středově souměrný podle středu S. Jak popisuje zadání, jednotlivé vrcholy mají ležet na daných kružnicích.
Proto využijeme souměrnosti čtyřúhelníka a zobrazíme kružnice k_1, k_2 podle středu S. Hledané body budou průsečíky kružnic k_1', k_2' s jejich danými vzory. Po spojení těchto bodů dostaneme rovnoběžníky splňující předpoklady ze zadání.



Obr. 3.9: Příklad 4

Popis konstrukce:

1. S; střed souměrnosti
2. k_1'; $\mathsf{S}(S) : k_1 \to k_1'$
3. k_2'; $\mathsf{S}(S) : k_2 \to k_2'$
4. A, D; $A, D \in k_1 \cap k_2'$
5. B, C; $B, C \in k_2 \cap k_1'$
6. rovnoběžník $ABCD$

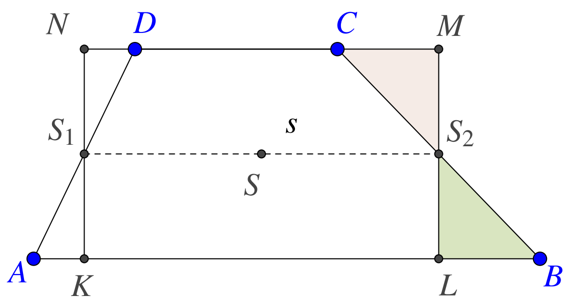
Závěr
Počet řešení závisí na velikosti poloměrů r_1 a r_2 daných kružnic.
Naše úloha má tři řešení (navíc rovnoběžníky $AECF$ a $BFDE$), z čehož rovnoběžník $ABCD$ je obdélníkem.
Jediné řešení bude jen pokud $r_2 = 3\,r_1$.
Zvolíme-li poloměry kružnic $r_2 > 3\,r_1$, $r_1 = r_2$ nebo $r_2 < r_1$, neobdržíme žádné řešení.

Příklad 5

Dokažte s využitím obrázku (Obr.3.11), že obsah lichoběžníku $ABCD$ je roven obsahu obdélníku $KLMN$. Úsečka s je střední příčka lichoběžníku a má velikost $s = \frac{1}{2}(|AB| + |CD|)$.
[4, strana 64, př. 11.14]

Řešení

Střední příčka s prochází středy S_1, S_2 úseček AD, BC a také KN, LM. Oba vyznačené trojúhelníky jsou proto středově souměrné, tedy shodné. Analogickou úvahou potvrdíme shodnost trojúhelníků AKS_1 a S_1DN.
Změnou lichoběžníka na obdélník odebíráme a zároveň dodáváme stejnou část plochy. Obsahy ploch lichoběžníka a obdélníka se proto rovnají.



Obr. 3.10: Příklad 5

Popis konstrukce:

1. lichoběžník $ABCD$
2. obdélník $KLMN$
3. S, S_1, S_2; středy souměrnosti
4. s; $s = \frac{1}{2}(|AB| + |CD|)$
5. $\mathsf{S}(S_2) : \triangle LBS_2 \to \triangle CMS_2$
6. $\mathsf{S}(S_1) : \triangle AKS_1 \to \triangle NDS_1$
7. $S_{ABCD} = S_{KLMN}$

Závěr
Ze shodností jednotlivých ploch vyznačených trojúhelníků (analogicky i AKS_1 a S_1DN) plyne shodnost obsahů ploch obou zadaných útvarů.

Příklad 6

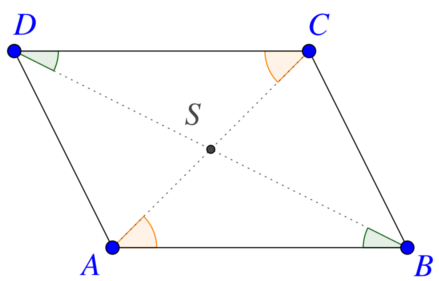
Jestliže ve čtyřúhelníku $ABCD$ platí $AB \parallel CD$ a $AB \cong CD$, je čtyřúhelník rovnoběžník. Dokažte. [11, strana 137, př. 3.22]

Řešení

Nejprve si uvědomme, co platí pro rovnoběžník:

1. protější strany jsou shodné
2. protější strany jsou rovnoběžné
3. protější úhly jsou shodné
4. součet sousedních úhlů je 180°
5. úhlopříčky se půlí. [1]

Ze zadání víme, že první dva body jsou díky předpokladům splněny.
Jestliže spojíme body D, B a body A, C úsečkami, které jsou tedy zároveň úhlopříčkami, dostaneme průsečík S.
Jistě víme, že u rovnoběžek proťatých příčkou jsou střídavé i souhlasné úhly shodné. V našem případě příčka BD protíná rovnoběžky DC a AB, tudíž vyhovuje třetí podmínce a taktéž po dobrém rozvážení i čtvrté.
Nyní potřebujeme ukázat, že bod S je středem čtyřúhelníku.
Díky shodnosti úhlů $|\sphericalangle BDC| = |\sphericalangle DBA|$ a $|\sphericalangle DCA| = |\sphericalangle CAB|$ a úseček s vlastností $|AB| = |DC|$ můžeme říci, že trojúhelníky DSC a ASB jsou shodné.
Ve středové souměrnosti se středem S se pak zobrazí $A \to C$ a $D \to B$. Dále je zřejmé, že $\mathsf{S}(S) : \triangle\, DSC \to \triangle\, ASB$.
Bod S tedy půlí úhlopříčky. Dokázali jsme poslední vlastnost rovnoběžníku a že čtyřúhelník $ABCD$ je rovnoběžníkem.



Obr. 3.11: Příklad 6

Popis konstrukce:

1. AB
2. CD; $CD \parallel AB \wedge |AB| = |CD|$
3. S; je střed čtyřúhelníku $ABCD$
4. $\mathsf{S}(S) : D \to B$
5. rovnoběžník $ABCD$

Závěr
Příčky rovnoběžek a zadané vlastnosti čtyřúhelníka nám dají střed souměrnosti, který tyto příčky půlí. Výsledkem je rovnoběžník $ABCD$.

Příklady na procvičení

1. Je dána kružnice k, přímka p a bod S. Sestrojte úsečku KP tak, aby bod S byl jejím středem, bod K ležel na kružnici k a bod P na přímce p. [4, strana 64, př. 11.10]

2. Jsou dány tři různé body M, N, S, které neleží v přímce. Sestrojte čtverec $ABCD$ se středem S tak, aby bod M ležel na přímce AB a bod N na přímce CD. [11, strana 138, př. 3.26]

3. Je dána úsečka AA_1 ($|AA_1| = 5\,cm$). Sestrojte všechny trojúhelníky ABC, pro které je AA_1 těžnicí t_a a pro které platí

   a) $c = 4\,cm, \quad b = 7\,cm;$

   b) $\gamma = 45°, \quad \beta = 60°;$

   c) $b = 6\,cm, \quad \beta = 45°;$

   d) $b = 6\,cm, \quad t_b = 6\,cm.$ [11, strana 138, př. 3.28]

4. Je dána úsečka AA_1; $|AA_1| = 4,5\,cm$. Sestrojte všechny pravoúhlé trojúhelníky ABC s pravým úhlem při vrcholu C, v nichž AA_1 je těžnicí t_a a $t_b = 6\,cm$. [11, strana 136, př. 3]

5. Sestrojte trojúhelník, je-li dáno: v_c, v_a, t_a. [8, strana 97, př. 21.4]

6. Je dán čtverec $ABCD$, přímka p a bod S. Sestrojte úsečku XY tak, aby bod S byl jejím středem, $X \in p$ a bod Y náležel obvodu čtverce $ABCD$. [2, strana 15, př. 20]

7. Jsou dány dvě kružnice k_1, k_2 takové, že $k_1 \cap k_2 \neq$. Bodem $X \in k_1 \cap k_2$ sestrojte takovou přímku, která vytíná v obou kružnicích shodné tětivy. [2, strana 16, př. 24]

8. Jsou dány čtyři kružnice a bod S. Sestrojte rovnoběžník $XYZU$ se středem S, jehož každý vrchol leží na jedné z daných kružnic. [2, strana 16, př. 27]

9. Je dána kružnice $k = X, |OX| = r$ s vyznačeným průměrem PQ, vnější přímka p kružnice k a bod $S \in p$. Sestrojte bod $Z \in k$ a přímky QZ a PZ tak, aby platilo: $PZ \cap p = X, QZ \cap p = Y$ a daný bod $S \in p$ je středem úsečky XY. [2, strana 15, př. 22]

10. Dokažte, že obrazem přímky a ve středové souměrnosti je přímka a' s přímkou a rovnoběžná. [8, strana 95, př. 21.2]

11. Dokaž, že platí věta. Jestliže se ve čtyřúhelníku $ABCD$ půlí úhlopříčky, je čtyřúhelník rovnoběžníkem. [7, kapitola 3.5.4, př. 6]

Kapitola 4

Posunutí

Text teorie příslušný k této kapitole je brán z knihy *Matematika pro gymnázia: planimetrie*.[11]
Orientovaná úsečka je úsečka, u níž je určeno, který její krajní bod je tzv. počáteční bod; druhý krajní bod je jejím koncovým bodem. Orientovanou úsečku s počátečním bodem A a koncovým bodem B značíme $\boldsymbol{AB}$.

Nenulové orientované úsečky $\boldsymbol{AB}$ a $\boldsymbol{CD}$ jsou **souhlasně orientované**, jestliže buď:

1. leží na téže přímce a polopřímka AB je částí polopřímky CD, příp. polopřímka CD je částí polopřímky AB, příp. obě polopřímky splynou, nebo

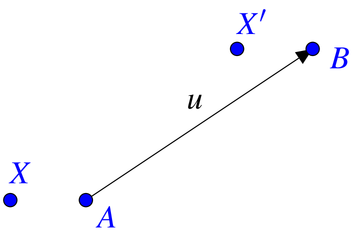
2. leží na různých rovnoběžkách a polopřímky AB, CD leží v téže polorovině s hraniční přímkou AC.

Pomocí orientované úsečky můžeme tedy definovat posunutí:

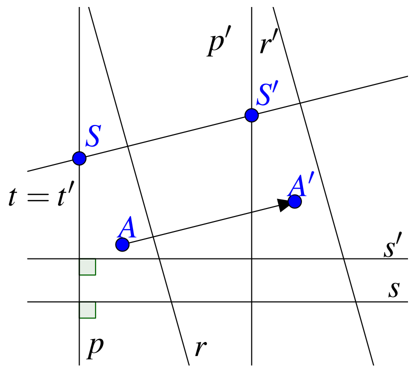
> Je dána nenulová orientovaná úsečka $\boldsymbol{AB}$. **Posunutí** neboli **translace** je shodné zobrazení $\mathsf{T}(\boldsymbol{AB})$, které každému bodu X přiřadí bod X' tak, že orientované úsečky $\boldsymbol{XX'}$ a $\boldsymbol{AB}$ mají stejnou délku a stejnou orientaci.

Délka orientované úsečky $\boldsymbol{AB}$ udává **délku posunutí**, její směr určuje **směr posunutí**. Posunutí je **přímá shodnost**.
Délka (velikost) orientované úsečky $\boldsymbol{AB}$ je délka úsečky AB. Značíme ji $|\boldsymbol{AB}|$.

Jednoduché příklady principu posunutí

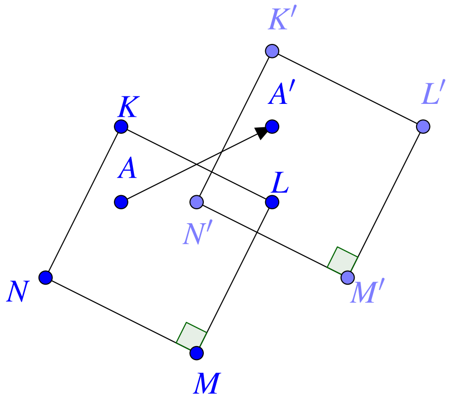


Obr. 4.1: Zobrazení bodu



Obr. 4.2: Zobrazení přímek

Zobrazení čtverce



Posuneme-li například čtverec ve směru orientované úsečky ***AA'***, dostaneme shodný čtverec. Jak lze vidět z obrázku, úhly v útvaru se nemění. Translace zachovává úhly.

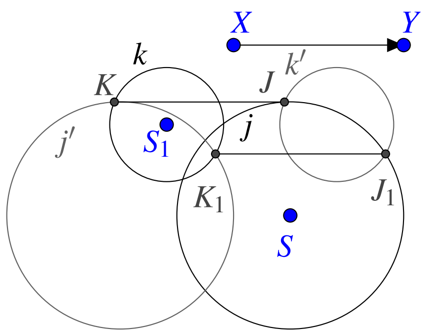
Obr. 4.3: Zobrazení čtverce a jeho úhlů

Zobrazení kružnic

Jsou dány dvě kružnice j, k a úsečka XY. Sestrojte úsečku JK shodnou a rovnoběžnou s úsečkou XY tak, aby bod J ležel na kružnici j a bod K na kružnici k. Uvažujte o počtu řešení.
[4, strana 60, př. 10.5]

Řešení

Jestliže má úsečka JK být úsečkou shodnou a rovnoběžnou s úsečkou XY a přitom $J \in j \wedge K \in k$, tak využijeme translaci a posuneme kružnici k ve směru orientované úsečky ***XY*** a kružnici j ve směru orientované úsečky ***YX***.
Body J, K dostaneme při průniku $j \cap k'$ a $k \cap j'$. Pak můžeme sestrojit úsečku JK.



Obr. 4.4: Zobrazení kružnic

Popis konstrukce:

1. $\boldsymbol{XY}$; orientovaná úsečka
2. k'; $\mathsf{T}(\boldsymbol{XY}) : k \to k'$
3. j'; $\mathsf{T}(\boldsymbol{XY}) : j \to j'$
4. J, K; $J \in j \cap k'$
   $K \in k \cap j'$
5. JK

Závěr
Úloha má tolik řešení, kolik je průniků j, k' (resp. k, j'). Dvě řešení dostaneme, jestliže průniky budou dva. Jediné řešení, pokud se kružnice j, k' dotknou v jednom bodě.
V našem případě jsem dostali dvě řešení.

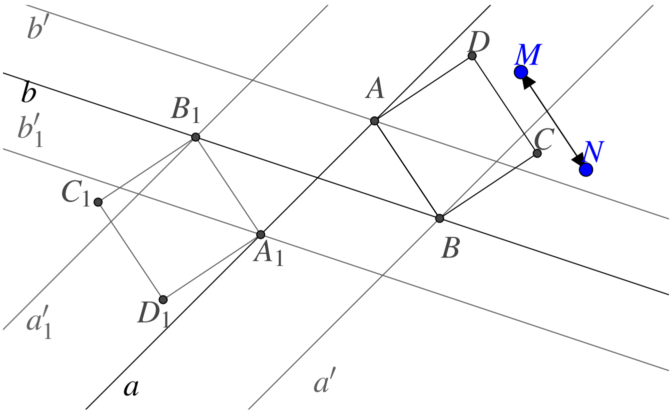
Nyní si ukážeme několik řešených příkladů na posunutí.

Příklad 1

Jsou dány dvě různoběžky a, b a úsečka MN. Sestrojte čtverec $ABCD$, pro který platí $A \in a$, $B \in b$, $AB \parallel MN$, $|AB| = |MN|$. [11, strana 144, př.3.32]

Řešení

Pro úsečku AB platí $AB \parallel MN$, $|AB| = |MN|$, potom MN bude orientovanou úsečkou $\boldsymbol{MN}$, která určí směr posunutí.
Posuneme přímku b ve směru orientované úsečky $\boldsymbol{NM}$ a přímku a ve směru $\boldsymbol{MN}$. Tak získáme obrazy přímek a, b a průsečíky A, B, pro které zřejmě platí $\mathsf{T}(\boldsymbol{NM}) : B \to A$.
Nyní už můžeme sestrojit čtverec $ABCD$.



Obr. 4.5: Příklad 1

Popis konstrukce:

1. $\boldsymbol{NM}$; orientovaná úsečka
2. a'; $\mathsf{T}(\boldsymbol{MN}) : a \to a'$
3. b'; $\mathsf{T}(\boldsymbol{NM}) : b \to b'$
4. A; $A \in a \cap b'$
5. B; $B \in b \cap a'$
6. čtverec $ABCD$

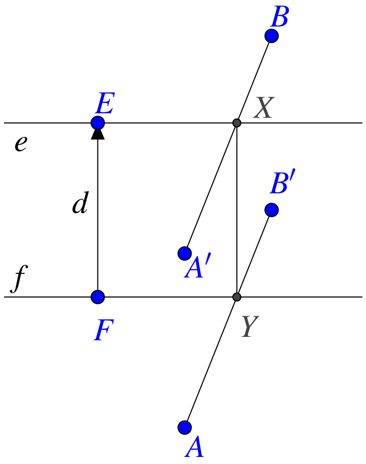
Závěr
Jelikož jsou dány dvě různoběžky, bude záležet na poloze úsečky MN vzhledem k přímkám a, b.
Jestliže MN bude různoběžná od přímek a, b, budou se přímky a, b vždy protínat s jejich obrazy ve čtyřech bodech a vždy dostaneme čtyři řešení. Posunutí můžeme provést vždy dvěma směry, budeme mít tedy první a druhé řešení. Třetí a čtvrté řešení sestrojíme v opačné polorovině, jejíž hraniční přímkou je úsečka AB, resp. A_1B_1.
Pokud MN bude rovnoběžná nebo totožná s některou z přímek a, b, nedostaneme žádné řešení, neboť a nebo b se zobrazí sama na sebe.

Příklad 2

Vyhledejte místo na řece šířky d, ve kterém by měl stát most ve směru kolmém na tok řeky tak, aby cesta z obce A do obce B, které leží na různých stranách řeky mimo její břehy, byla nejkratší.
[11, strana 144, př. 3.39]

Řešení

Vyznačíme si šířku řeky úsečkou EF, která bude mít pro nás význam orientované úsečky $\boldsymbol{FE}$. Pokud by mezi městy A, B nebyla řeka, zvolili bychom jako nejkratší cestu úsečku AB. Proto posuneme město A ve směru $\boldsymbol{FE}$ o velikost d a sestrojíme úsečku $A'B$. Tím získáme průsečík X přímky e s $A'B$. Zobrazíme bod B a analogicky provedeme konstrukci bodu Y. Potom úsečka XY představuje hledaný most mezi městy A, B.



Obr. 4.6: Příklad 2

Popis konstrukce:

1. $\boldsymbol{FE}$; $E \in e \wedge F \in f \wedge |\boldsymbol{FE}| = d$, orientovaná úsečka
2. A'; $\mathsf{T}(\boldsymbol{FE}) : A \to A'$
3. B'; $\mathsf{T}(\boldsymbol{EF}) : B \to B'$
4. X; $X \in A'B \cap e$
5. Y; $Y \in AB' \cap f$
6. XY

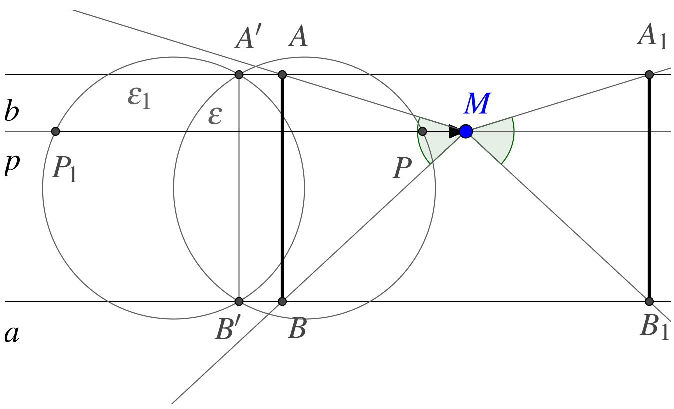
Závěr
Příklad má jediné řešení.

Příklad 3

Jsou dány dvě různé rovnoběžky a, b a bod M uvnitř pásu (a, b). Sestrojte všechny úsečky AB kolmé k přímkám a, b s krajními body A, B na přímkách a, b, které z bodu M vidíme pod úhlem $60°$. [11, strana 144, př. 3.37]

Řešení

Na začátek si zvolíme pomocnou úsečku $A'B'$ tak, aby $A'B' \perp a \wedge A' \in a \wedge B' \in b$. Sestrojíme ekvigonálu ε, tedy množinu vrcholů úhlů, ze kterých je $A'B'$ vidět pod úhlem o dané velikosti. Pro náš případ volíme úhel $60°$.
Do bodu M narýsujeme rovnoběžku p s přímkou a. Získáme bod P jako průsečík ε a p.
Jelikož chceme, aby výsledná úsečka AB byla vidět pod úhlem $60°$ z bodu M, posuneme ε a tedy i celou úsečku $A'B'$ ve směru a o velikost orientované úsečky $\boldsymbol{PM}$.
Tím získáme úsečku AB.



Obr. 4.7: Příklad 3

Popis konstrukce:

1. $A'B'$; $A' \in a \wedge B' \in b$ $\wedge\ A'B' \perp a$, lib.
2. ε; $\varepsilon = \{X;\ |\sphericalangle A'XB'| = 60°\}$
3. p; $p \parallel a \wedge M \in p$
4. P; $P \in \varepsilon \cap p$
5. $\boldsymbol{PM}$; orientovaná úsečka
6. AB; $\mathsf{T}(\boldsymbol{PM}) : A'B' \to AB$

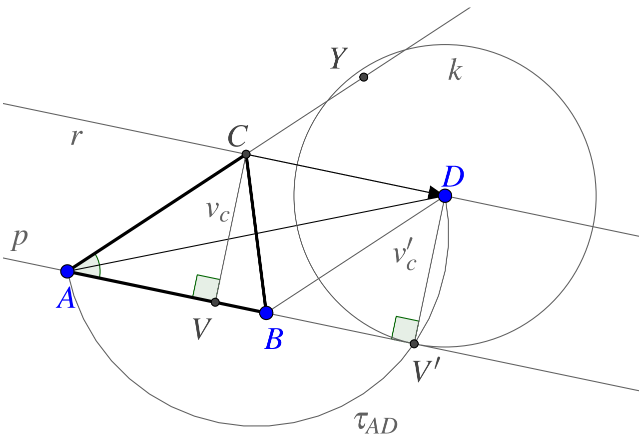
Závěr
Tato úloha má dvě řešení.
Protože ekvigonálu můžeme zkonstruovat na obě strany úsečky, dostaneme vždy dvě řešení, v našem případě je označeno A_1B_1.

Příklad 4

Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno $\alpha,\ v_c,\ t_a$. [9, strana 23, př. 3.10]

Řešení

Úlohu budeme řešit doplněním na rovnoběžník $ABCD$. Začněme konstrukcí úsečky AD, když víme, že její velikost se rovná $2\,t_a$. Dále známe výšku na stranu c. Je zřejmé, že použitím posunutí o orientovanou úsečku $\boldsymbol{CD}$ se zobrazí v_c na v_c'. Využijeme tedy Thaletovy kružnice nad AD, protože víme, že tato kružnice je množinou všech bodů, z nichž lze vidět úsečku pod pravým úhlem.
Pomocí kružnice k se středem v bodě D a poloměrem v_c získáme bod V' jako $\tau_{AD} \cap k$ a přímku p, která je kolmá na $V'D$ v bodě V' a zároveň prochází bodem A. Přímka r procházející bodem D a rovnoběžná s přímkou p určí bod C tak, že $C \in r \cap AY$. Bod B dostaneme posunutím bodu A o orientovanou úsečku $\boldsymbol{CD}$. Nyní můžeme sestrojit trojúhelník ABC.



Obr. 4.8: Příklad 4

Popis konstrukce:

1. AD; $|AD| = 2\,t_a$
2. $\tau_{AD}; \tau_{AD} = \{X; |\sphericalangle AXD| = 90^\circ\}$
3. DV'; $V' \in \tau_{AD} \cap k(D;\ v_c)$,
4. p; $p \perp DV' \wedge A \in p$
5. α; $|\sphericalangle BAY| = \alpha$
6. C; $C \in AY \cap r$, kde $r \parallel p \wedge D \in r$
7. $\boldsymbol{CD}$; orientovaná úsečka
8. B; $\mathsf{T}(\boldsymbol{CD}) : A \to B$
9. trojúhelník ABC

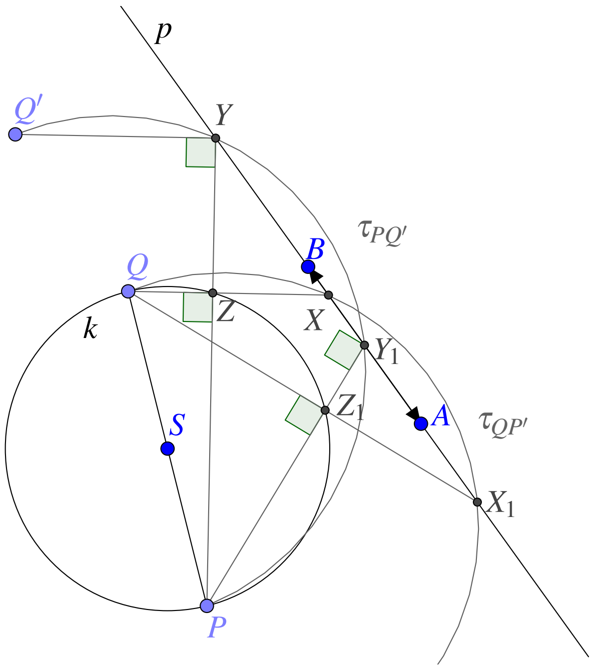
Závěr
Tento příklad bude mít jedno řešení.

Příklad 5

Je dána kružnice k s vyznačeným průměrem PQ a vnější přímka kružnice k. Na této přímce p je dána úsečka AB. Sestrojte bod $Z \in k$ takový, že přímky PZ, QZ protínají přímku p v bodech X, Y a $|XY| = |AB|$. [2, strana 16, př. 29]

Řešení

Jistě je zřejmé, že z hledaného bodu Z budeme vidět průměr PQ kružnice k pod úhlem 90°. Posuneme tedy bod Q o $\boldsymbol{AB}$ a ze znalosti vlastností rovnoběžek proťatých příčkou víme, že zkonstruováním Thaletovy kružnice $\tau_{PQ'}$ nad získaným bodem Q' a bodem P vznikne bod Y jako průnik $\tau_{PQ'}$ s přímkou p.
Posunutím tohoto bodu Y o $\boldsymbol{BA}$ dostaneme bod X. Spojením P s Y a Q s X získáme bod Z, který zároveň leží na kružnici k.



Obr. 4.9: Příklad 5

Popis konstrukce:

1. $\boldsymbol{AB}$; orientovaná úsečka
2. Q'; $\mathsf{T}(\boldsymbol{AB}) : Q \to Q'$
3. $\tau_{PQ'}$;
4. Y; $Y \in \tau_{PQ'} \cap p$
5. X; $\mathsf{T}(\boldsymbol{BA}) : Y \to X$
6. Z; $Z \in k \cap PY \wedge Z \in k \cap QX$

Závěr
V této úloze záleží na počtu bodů průniku $\tau_{PQ'}$ a přímky p.
Naše úloha má dvě řešení, neboť průsečíky $\tau_{PQ'} \cap p$ máme dva Y, Y_1.
Pokud by se přímka p dotýkala $\tau_{PQ'}$ pouze v jednom bodě, dostaneme jedno řešení.
Bude-li průnik prázdný, příklad nebude mít žádné řešení.

Příklad 6

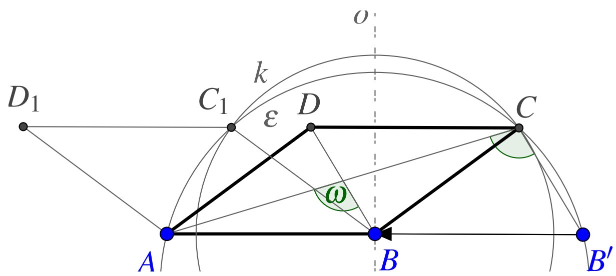
Sestrojte rovnoběžník $ABCD$, znáte-li velikost jeho stran a velikost toho úhlu úhlopříček, jehož ramena procházejí vrcholy A, B. [2, strana 17, př. 33]

Řešení

V předchozí kapitole v příkladu 6 jsme si zopakovali, co platí pro každý rovnoběžník. Proto jistě víme, že protější strany rovnoběžníka jsou shodné.
Nejprve tedy sestrojme úsečku AB', o které platí $|AB'| = 2a$, kde velikost strany AB a zároveň strany CD jsme označili a. Pak zřejmě platí, že B je středem úsečky AB'.

Kdybychom posunuli úhlopříčku BD v posunutí o orientovanou úsečku ***BB'***, vznikne nám úsečka $B'C$, která je tedy rovnoběžná s BD. Úhlopříčka AC protíná tyto rovnoběžky. Ze zadání známe velikost úhlu úhlopříček, jehož ramena procházejí vrcholy A, B. Označme jej ω. Díky vlastnostem rovnoběžek proťatých příčkou je pak úhel $|\sphericalangle ACB'| = \omega$.

Zkonstruujme množinu bodů, ze kterých je vidět úsečka AB' pod úhlem ω. Bod C je průnikem této množiny ε a kružnice k se středem v bodě B a poloměrem strany b.
Nyní stačí využít posunutí o ***B'B*** a zobrazit bod C na bod D.
Nyní můžeme sestrojit rovnoběžník $ABCD$.



Obr. 4.10: Příklad 6

Popis konstrukce:

1. AB'; $|AB'| = 2a$
2. B; je střed AB'
3. $\varepsilon = \{X;\ |\sphericalangle AXB'| = \omega\}$
4. ***B'B***; orientovaná úsečka
5. C; $C \in \varepsilon \cap k(B;\ b)$
6. D; $\mathsf{T}(\boldsymbol{B'B}) : C \to D$
7. čtyřúhelník $ABCD$

Závěr
V této úloze počet řešení ovlivňuje počet průniků ε s kružnicí k.
Můžeme tedy dostat žádné, jedno, dvě nebo nekonečně mnoho řešení.

Příklady na procvičení

1. Je dána kružnice $k(S;r)$ a ve vnitřní oblasti kružnice k bod $A \neq S$. Sestrojte všechny rovnoběžníky $ABCD$, jejichž vrcholy B,C,D leží na kružnici k a strana AB má délku r. [11, strana 144, př. 3.38]

2. Je dána kružnice $k(S;\ r)$, přímky $p,q(p \nparallel q)$ a na přímce q úsečka délky a. Určete na přímce p bod P a na kružnici k bod K tak, aby platilo $PK \parallel q,\ |PK| = a$. [11, strana 144, př. 3.31]

3. Dokažte, že obrazem přímky v posunutí je přímka s ní rovnoběžná. [8, strana 101, př. 22.6]

4. Sestrojte lichoběžník $ABCD(AB \parallel CD)$, je-li dáno:

   a) a,b,c,d;

   b) a,c,u_1,u_2.

   Stanovte podmínky řešitelnosti. [8, strana 102, př. 22.9]

5. Sestrojte lichoběžník, je-li dán rozdíl základen, dvě ramena a jedna úhlopříčka. [5, strana 79, př. 63]

6. Sestrojte lichoběžník, je-li dána základna, výška a dvě úhlopříčky. Stanovte podmínky řešitelnosti. [5, strana 79, př. 65]

7. Jsou dány rovnoběžné přímky a,b a bod M ležící uvnitř pásu, který ohraničují. Najdi všechny kružnice, které se dotýkají přímek a,b a prochází bodem M. Najdi řešení, které nevyužívá množiny bodů dané vlastnosti. [7, kapitola 3.5.7, př. 2]

8. Jsou dány přímky a,b a úsečka MN. Sestrojte čtverec $XYZU$ o straně $|XY| = |MN|$ a rovnoběžné s MN tak, aby bod $X \in a$ a bod $Y \in b$. [2, strana 16, př. 28]

9. Jsou dány dvě nesoustředné kružnice k_1,k_2 a směr s. Sestrojte přímku p náležející směru s, na které dané kružnice vytínají shodné tětivy. [2, strana 16, př. 32]

10. Úlohu č. 21 řešte pomocí posunutí.
    (Př. 21: Je dána přímka p, kružnice k a body S_1,S_2 navzájem různé. Sestrojte trojúhelník ABC tak, aby vrchol $A \in p$, vrchol $B \in k$ a body S_1,S_2 byly po řadě středy stran AC,BC.
    [2, strana 17, př. 34]

11. Sestrojte čtyřúhelník $ABCD$, je-li dáno $a = 5\,cm,\ c = 3,5\,cm,\ e = 6\,cm,\ f = 5,5\,cm,\ \varepsilon = 120°$, kde $\varepsilon = |\sphericalangle AEB|,\ E$ je průsečík úhlopříček. [11, strana 144, př. 3.42]

Kapitola 5

Otočení

Text teorie příslušný k této kapitole je brán z knihy *Matematika pro gymnázia: planimetrie*.[11]

Orientovaný úhel je úhel, u něhož je určeno, které jeho rameno je tzv. počáteční rameno; druhé rameno je jeho koncovým ramenem.

Orientovaný úhel si můžeme představit jako počáteční a koncovou polohu polopřímky, která se otáčí kolem svého počátku. Při otáčení může polopřímka vykonat libovolný počet otáček. Otáčet můžeme buď proti směru pohybu hodinových ručiček, čili v kladném smyslu, nebo po směru hodinových ručiček, tedy v záporném smyslu.

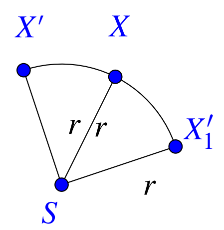
Základní velikost orientovaného úhlu AVB je velikost úhlu AVB, který je tvořen polopřímkou VA otočením do polopřímky VB v kladném smyslu. Vždy je to číslo z intervalu $\langle 0, 2\pi)$, případně z intervalu $\langle 0, 360^\circ)$.

Je dán orientovaný úhel, jehož jedna velikost je φ, a bod S. **Otočení** neboli **rotace** je shodné zobrazení $\mathsf{R}(S, \varphi)$, které přiřazuje:

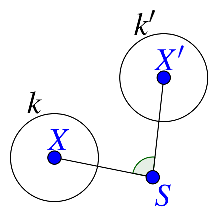
1. každému bodu $X \neq S$ bod X' tak, že $|X'S| = |XS|$ a orientovaný úhel XSX' má velikost φ,
2. bodu S bod $S' = S$.

Bod S se nazývá **střed otočení**, orientovaný úhel o velikosti φ **úhel otočení**. Otočení je **přímá shodnost**.

Jednoduché příklady principu otočení

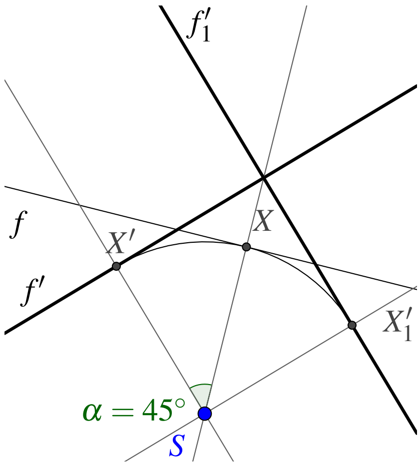


Obr. 5.1: Zobrazení bodu



Obr. 5.2: Zobrazení kružnice

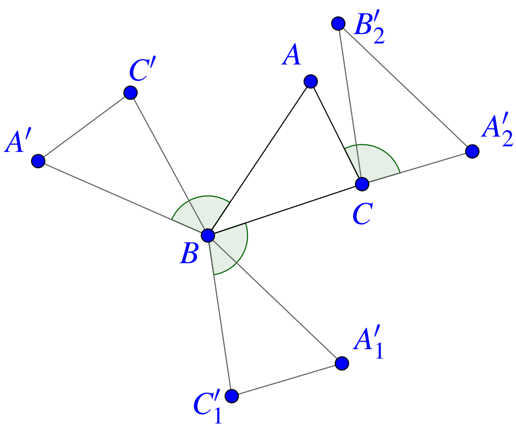
Zobrazení přímky



Obr. 5.3: Zobrazení přímky

Otočení přímky f, může sestrojit pomocí otočení dvou bodů, které leží na přímce, nebo jednodušeji pomocí kolmé přímky k přímce f a jejich průsečíku X.
Nejprve zkonstruujeme přímku kolmou procházející bodem S, čímž vznikne průsečík X. Po otočení tohoto bodu například o $\pm 45°$ budou zobrazené přímky f', f_1' opět kolmé k přímkám SX', SX_1'.

Zobrazení trojúhelníka



Obr. 5.4: Zobrazení trojúhelníka

Mějme trojúhelník ABC. Zvolme bod B jako střed otočení a otočme trojúhelník například o $+100°$. Dostaneme trojúhelník $A'BC'$.
Pokud zvolíme opačný úhel otočení, tedy úhel v záporném smyslu, $-100°$, což odpovídá otáčení po směru hodinových ručiček, budeme mít trojúhelník $A_1'BC_1'$.
Vidíme, že rotace zachovává původní vzdálenosti bodů i vrcholové úhly různých útvarů.
Podobně můžeme otočit trojúhelník ABC i se středem otočení například ve vrcholu C.
Obrazem bude trojúhelník $A_2'B_2'C$.

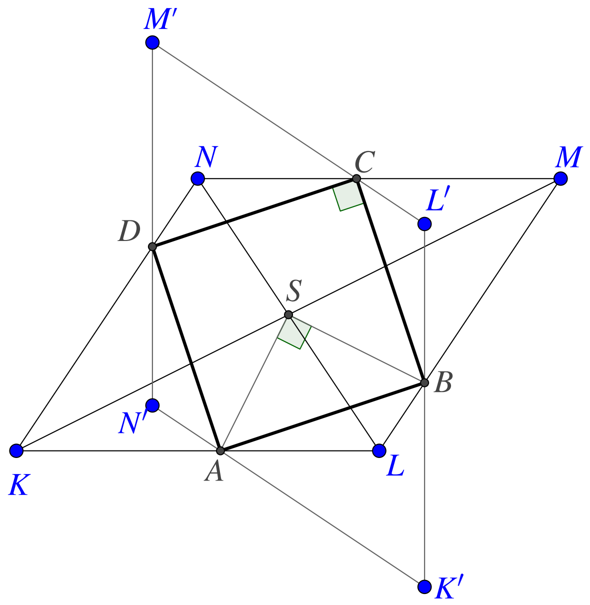
Nyní si ukážeme několik řešených příkladů na otočení.

Příklad 1

Do daného rovnoběžníku $KLMN$ vepište čtverec $ABCD$ tak, aby $A \in KL, B \in LM, C \in MN, D \in KN$. [11, strana 151, př. 3.50]

Řešení

Po narýsování daného rovnoběžníka $KLMN$ sestrojme střed úhlopříček S. Označme ho jako střed otáčení. Tento bod bude zároveň středem hledaného čtverce.
Pro každý vrchol čtverce platí, že v rotaci se středem v bodě S o $\pm 90°$ se zobrazí na vedlejší vrchol, neboť víme, že úhlopříčky všech čtverců se navzájem půlí a jsou na sebe kolmé.
Použijme tedy otočení se středem v bodě S například o $+90°$. Otočme každou stranu daného rovnoběžníka. Bod $B \in LM$ bude obrazem bodu $A \in KL$ a tedy bude ležet i na zobrazené úsečce $K'L'$. Analogickou úvahovou vzniknou ostatní body C, D a tedy i bod A.
Pak můžeme zkonstruovat čtverec $ABCD$.



Obr. 5.5: Příklad 1

Popis konstrukce:

1. S; střed otočení
2. $K'L'$; $\mathrm{R}(S, +90°) : KL \to K'L'$
3. B; $B \in KL \cap K'L'$
4. $L'M'$; $\mathrm{R}(S, +90°) : LM \to L'M'$
5. C; $C \in L'M' \cap MN$
6. $M'N'$; $\mathrm{R}(S, +90°) : MN \to M'N'$
7. D; $D \in M'N' \cap NK$
8. $N'K'$; $\mathrm{R}(S, +90°) : NK \to N'K'$
9. A; $A \in N'K' \cap KL$
10. čtverec $ABCD$

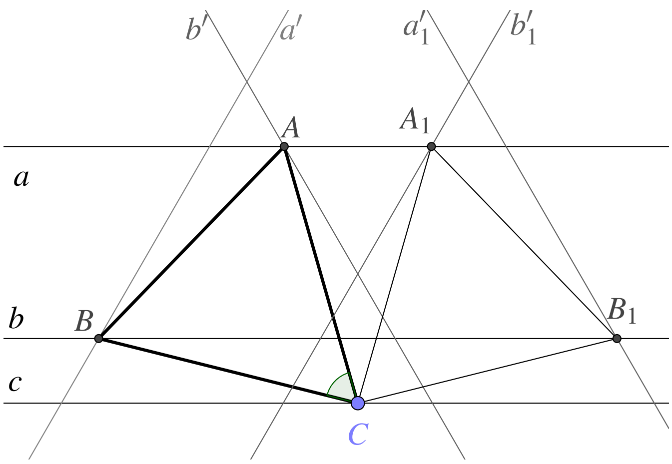
Závěr
V úloze záleží na orientaci úhlu, o který budeme rovnoběžník $KLMN$ otáčet. Druhé řešení tedy dostaneme, kdybychom rovnoběžník otočili o stejně velký úhel, ale v záporném smyslu.
Žádné řešení budeme mít, pokud se všechny vrcholy rovnoběžníka zobrazí vně $KLMN$.

Příklad 2

Jsou dány tři různé rovnoběžky a, b, c a bod $C \in c$. Sestrojte všechny rovnostranné trojúhelníky ABC tak, aby $A \in a, B \in b$. [11, strana 151, př. 3.52]

Řešení

Velikost všech vrcholových úhlů každého rovnostranného trojúhelníka je 60°. V otočení se středem v jednom z vrcholových úhlů se na sebe zobrazí o úhel ±60° ostatní dva vrcholy.
Použijeme tedy rotaci se středem v bodě C o orientovaný úhel +60°. Přímce a přiřadíme přímku a'.
Podobně zobrazíme přímku b na přímku b' se stejným středem otočení a velikostí úhlu, ale v záporném smyslu.
Dostaneme body A, B, neboť víme, že $A \in a \wedge B \in b$ a zřejmě $A \in b' \wedge B \in a'$.
Spojením všech tří bodů sestrojíme trojúhelník ABC.



Obr. 5.6: Příklad 2

Popis konstrukce:

1. C; střed otočení
2. a'; $\mathsf{R}(C; +60°) : a \to a'$
3. B; $B \in b \cap a'$
4. b'; $\mathsf{R}(C; -60°) : b \to b'$
5. A; $A \in a \cap b'$
6. trojúhelník ABC

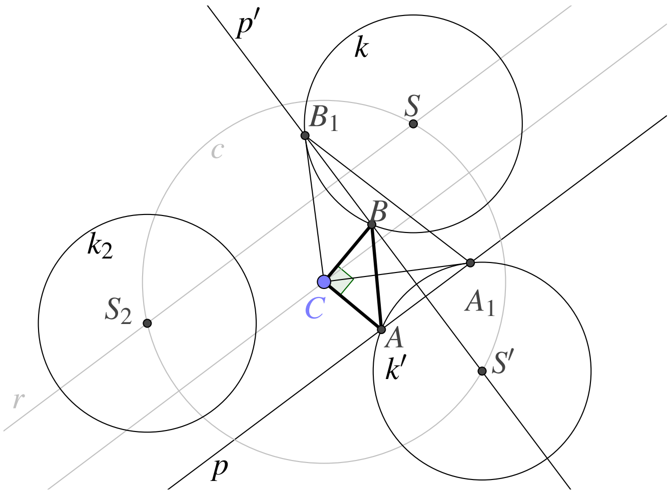
Závěr
Příklad má dvě řešení, neboť můžeme provést rotaci i v opačném směru. Druhý rovnostranný trojúhelník bude A_1B_1C.
I kdybychom zvolili jinou polohu přímek, vždy budeme mít dvě řešení, neboť přímky podle zadání musí být různé.

Příklad 3

Je dán bod C, přímka p a kružnice $k(S;, 3\,cm)$; $|Sp| = 4\,cm, |Cp| = 2\,cm, |CS| = 5\,cm$ a body C, S leží v téže polorovině s hraniční přímkou p. Sestrojte všechny pravoúhlé rovnoramenné trojúhelníky ABC ($|\sphericalangle ACB| = 90°$) tak, aby $A \in p, B \in k$. [11, strana 151, př. 3.53]

Řešení

Nejprve sestrojíme zadání. Jelikož ze zadání víme, že rovnoramenný trojúhelník ABC bude pravoúhlý s pravým úhlem u bodu C, můžeme použít rotaci se středem v tomto bodě o $\pm 90°$.
Ze zadání a našich úvah plyne, že $A \in p \cap k'$, kde k' je obrazem kružnice k, tedy $\mathsf{R}(C; -90°) : k \to k'$.
Pak bod $A \in k \cap p'$, kde obdobně p' je obrazem p, neboť $\mathsf{R}(C; +90°) : p \to p'$.
Pak můžeme narýsovat trojúhelník ABC.



Obr. 5.7: Příklad 3

Popis konstrukce:

1. C; střed otočení
2. k'; $\mathsf{R}(C; -90°) : k \to k'$
3. A; $A \in p \cap k'$
4. p'; $\mathsf{R}(C; +90°) : p \to p'$
5. B; $B \in k \cap p'$
6. trojúhelník ABC

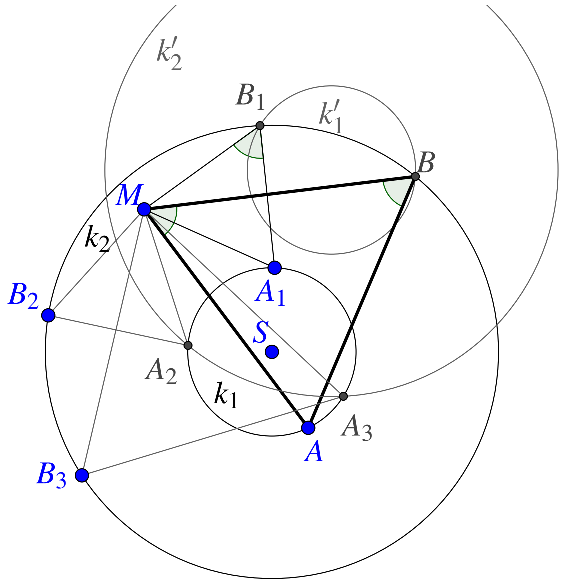
Závěr
V příkladu záleží na počtu bodů v průniku přímky p' a kružnice k (resp. $p \cap k'$).
Zjistili jsme, že kružnice c, která označuje danou vzdálenost CS se protne ve dvou bodech s přímkou r, kde vzdálenost r a p je stejná jako daná vzdálenost S a p.
V jedné polorovině s hraniční přímkou p získáme s těmito danými parametry čtyři řešení.
Pro přehlednost na obrázku jsou pouze dvě řešení.

Příklad 4

Jsou dány soustředné kružnice k_1, k_2 a bod M, který je vnitřním bodem mezikruží k_1, k_2. Sestrojte rovnostranný trojúhelník MAB tak, aby $A \in k_1$ a $B \in k_2$. [2, strana 15, př. 15]

Řešení

Bod M označme středem otočení a proveďme rotaci kružnice k_1 o $+60°$, neboť víme, že hledaný trojúhelník má být rovnostranný. Dostaneme bod B, který bude bodem průniku zobrazené kružnice k_1' a kružnice k_2. Bod A bude obrazem bodu M v otočení se středem v bodě B o úhel $+60°$. Můžeme tedy sestrojit hledaný trojúhelník.



Obr. 5.8: Příklad 4

Popis konstrukce:

1. M; střed otočení
2. k_1'; $\mathsf{R}(M;+60^\circ) : k_1 \to k_1'$
3. B; $B \in k_2 \cap k_1'$, střed otočení
4. A; $\mathsf{R}(B;+60^\circ) : M \to A$
5. trojúhelník MAB

Závěr

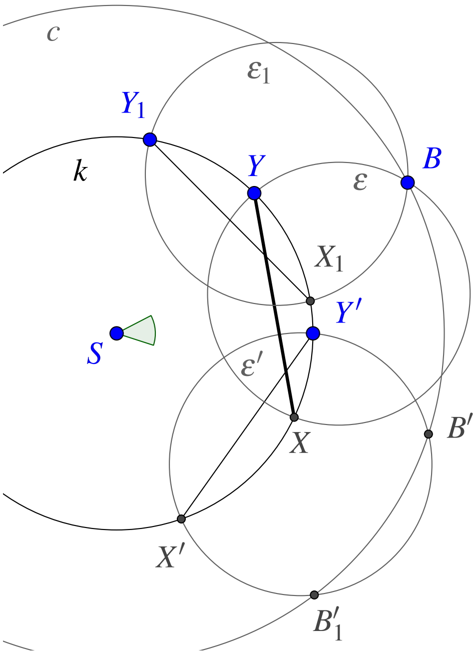
Počet řešení závisí na počtu bodů v průniku k_1' a k_2, resp. $k_2' \cap k_1$.
Jestliže se kružnice budou protínat ve dvou bodech, dostaneme čtyři řešení. Rotaci můžeme orientovat do dvou různých směrů.
Pokud se budou kružnice k_1' a k_2 jen dotýkat, tedy budou mít společný jeden bod, můžeme sestrojit pouze dvě řešení.
Úloha nebude mít řešení, když průnik těchto kružnic bude prázdný.

Příklad 5

Je dána kružnice $k(S;\ r)$, bod B a úsečka délky $d(d < 2r)$. Sestrojte tětivu XY kružnice k délky d tak, aby byla vidět z bodu B pod úhlem 60°. [11, strana 151, př. 3.56]

Řešení

Označme střed S kružnice k jako střed rotace a nejprve sestrojme libovolnou tětivu $X'Y'$ délky d kružnice k.
Jestliže z bodu B chceme vidět tětivu pod úhlem 60°, potřebujeme zkonstruovat ekvigonálu ε, tedy množinu bodů, ze kterých je $X'Y'$ vidět pod požadovaným úhlem.
Pomocí kružnice $c(S;\ |SB|)$ získáme bod B' jako průsečík ε a c. Pak už můžeme zobrazit tětivu $X'Y'$ na tětivu hledanou. Proveďme rotaci $\mathsf{R}(S;\ |\sphericalangle B'SB|)$.



Obr. 5.9: Příklad 5

Popis konstrukce:

1. S; střed otočení
2. $X'Y'$; $|X'Y'| = d$, tětiva kružnice
3. ε; $\varepsilon = \{A;\ |\sphericalangle X'AY'| = 60^\circ\}$
4. c; $c(S;\ |SB|)$
5. B'; $B' \in \varepsilon \cap c$
6. XY; $\mathrm{R}(S; |\sphericalangle B'SB|) : X'Y' \to XY$

Závěr

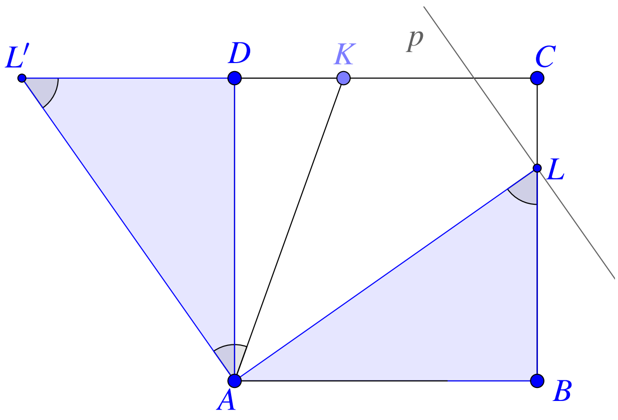
Počet řešení tohoto příkladu záleží na počtů průsečíků kružnice c a množiny bodů ε'.
Můžeme tedy mít dvě řešení XY, X_1Y_1, jestliže $\varepsilon' \cap c = \{B',\ B'_1\}$, jedno, pokud $\varepsilon' \cap c = \{B'\}$ nebo žádné, je-li $\varepsilon' \cap c = \emptyset$.

Příklad 6

Ve čtverci $ABCD$ je K libovolný bod strany DC, osa p úhlu BAK protíná stranu BC v bodě L. Dokažte, že platí $|BL| + |KD| = |AK|$. [6, strana 153, př. 61]

Řešení

Jestliže má platit daná rovnost, budeme považovat vrchol A čtverce $ABCD$ za střed otočení. Rotací se středem v tomto bodě o úhel $+90^\circ$ dostaneme obraz trojúhelníka ABL, trojúhelník ADL'. Jistě je zřejmé, že $AL' \perp AL$ a $|DL'| = |BL|$. Sestrojme do bodu L rovnoběžnou přímku p k přímce, která je označena body $L'A$. Pak ze znalosti vlastností rovnoběžek proťatých přímkou a vlastností rotace můžeme říct, že v trojúhelníku AKL' budeme mít shodné úhly u strany AL'. Trojúhelník bude rovnoramenný.
To tedy znamená, že musí platit rovnost $|L'K| = |AK|$.



Obr. 5.10: Příklad 6

Popis konstrukce:

1. A; střed otočení
2. $\triangle\, ABL$
3. ADL'; $\mathsf{R}(A;\ +90^\circ)$:
   $\triangle ABL \to \triangle ADL'$
4. $AL' \perp AL \wedge |DL'| = |BL|$
5. $|\sphericalangle KAL'| = |\sphericalangle AL'K|$
6. $|L'K| = |AK|$

Závěr
Díky použití rotace jsme dokázali zadanou rovnost.
Jinou možnost řešení jsme ukázali pomocí osové symetrie.

Příklady na procvičení

1. Jsou dány dvě navzájem rovnoběžné přímky b,c a mimo ně bod A. Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC s vrcholy $B \in b$ a zároveň $C \in c$. [4, strana 63, př. 11.6]

2. Jsou dány přímky p,q a bod S. Sestrojte čtverec $ABCD$ o středu S tak, aby byla splněna jedna z následujících podmínek:

   a) Pro dva sousední vrcholy A,B platí $A \in p,\ B \in q$.

   [4, strana 64, př. 11.11]

3. Do čtverce $ABCD$ vepište rovnostranný trojúhelník KLM, jestliže $K \in AB$.
   [8, strana 94, př. 20.11]

4. Jsou dány dvě přímky l_1, l_2, bod A a úhel α. Sestrojte kružnici k se středem v bodě A tak, aby platilo: $|\sphericalangle BAC| = \alpha$, kde $B \in l_1 \cap k$ a $C \in l_2 \cap k$. [2, strana 15, př. 16]

5. Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC, jehož vrcholy leží na třech daných soustředných kružnicích. [2, strana 14, př. 14]

6. Jsou dány dvě soustředné kružnice $k_1(S;4\,cm), k_2(S;3\,cm)$ a bod $A(|SA| = 2\,cm)$. Sestrojte všechny

   a) rovnostranné trojúhelníky ABC tak, aby $B \in k_1, C \in k_2$,

   b) čtverce $ABCD$ tak, aby $B \in k_1, D \in k_2$.

   [11, strana 151, př. 3.51]

7. Jsou dány dvě různoběžné přímky a,b a bod A, který neleží na žádné z nich. Sestrojte čtverec $ABCD$ tak, aby $B \in a$ a $D \in b$. [2, strana 15, př. 17]

8. Je dána kružnice $k(S;3\,cm)$ a bod $A(|SA| = 1{,}5\,cm)$. Sestrojte všechny tětivy XY kružnice k o délce $5{,}5\,cm$, které procházejí bodem A. [11, strana 151, př. 3.55]

9. V mezikruží tvořeném soustřednými kružnicemi k a h je dán bod M. Sestrojte úsečku, která prochází bodem M, má každý z krajních bodů na jedné z kružnic a má předem určenou délku d. [4, strana 64, př. 11.12]

10. Je dána kružnice $k(S;\ 5\,cm)$ a bod $X,\ |XS| = 4\,cm$. Najdi všechny tětivy AB kružnice k takové, aby procházely bodem X a měly délku $7\,cm$. [7, kapitola 3.5.9, př.5]

11. Je dána kružnice k, přímka q a kladné číslo d. Nalezněte na přímce q takový bod M, z něhož tečny sestrojené ke kružnici k budou mít délku d, tj. vzdálenost bodu M od bodu dotyku získané tečny s kružnicí bude právě d. [4, strana 64, př. 11.13]

Kapitola 6

Skládání shodných zobrazení

Text teorie příslušný k této kapitole je brán z knihy *Matematika pro gymnázia: planimetrie*.[11]

Jsou dána dvě shodná zobrazení $\mathsf{Z}_1, \mathsf{Z}_2$ a X je libovolný bod (roviny); $\mathsf{Z}_1 : X \to X', \mathsf{Z}_2 : X' \to X''$. Zobrazení $\mathsf{Z} : X \to X''$ se nazývá **zobrazení složené** ze zobrazení $\mathsf{Z}_1, \mathsf{Z}_2$ v tomto pořadí.

Pro skládání zobrazení se používá označení $\circ$. Zobrazení Z složené ze zobrazení $\mathsf{Z}_1, \mathsf{Z}_2$ v tomto pořadí pak zapíšeme $\mathsf{Z} = \mathsf{Z}_2 \circ \mathsf{Z}_1$.

Složením dvou osových souměrností vznikne vždy jedno ze shodných zobrazení: identita, posunutí a otočení (příp. středová souměrnost jako zvláštní případ otočení).

Zobrazení složené ze tří osových souměrností je buď osová souměrnost, nebo posunutá osová souměrnost.

Libovolné shodné zobrazení je buď osová souměrnost, nebo se dá složit ze dvou, popř. tří osových souměrností. Existují pouze následující shodná zobrazení: osová souměrnost, identita, posunutí, otočení (příp. středová souměrnost jako zvláštní případ otočení) a posunutá souměrnost.

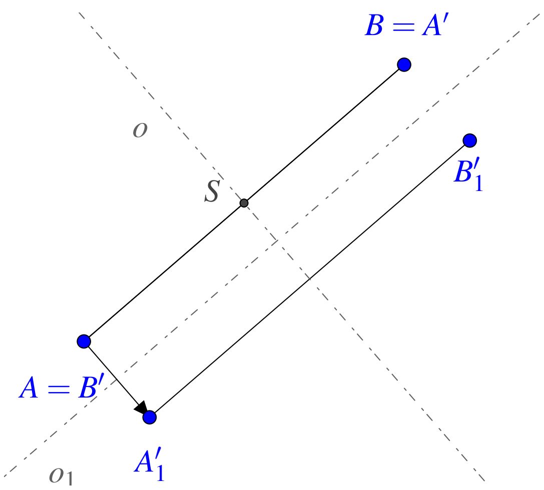
Protože je složením dvou přímých shodností opět přímá shodnost, dostáváme tak, že skládání posunutí a otočení je opět posunutí nebo otočení. To, že složením dvou posunutí je opět posunutí je zřejmé. Podobně se snadno nahlédne, že složením posunutí a otočení je opět otočení o stejný úhel kolem jiného středu. Nový střed otočení je ovšem závislý na tom, v jakém pořadí tato dvě zobrazení složíme. [3]

Jednoduché příklady principu skládání

Zobrazení úsečky

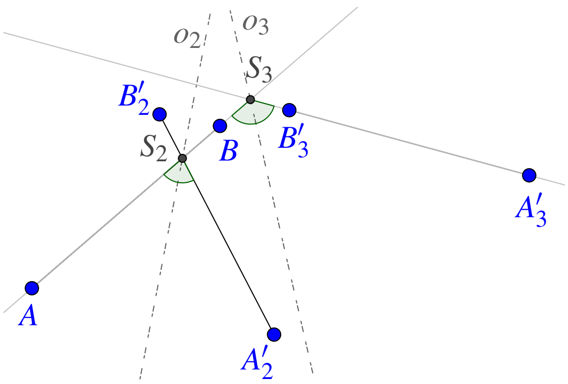
Jsou dány dvě shodné úsečky AB, $A'B'$. Určete zobrazení, v nichž je úsečka $A'B'$ obrazem úsečky AB. Vytvořte tato zobrazení složením osových souměrností. [11, strana 160, př. 3.62]

Řešení



Obr. 6.1: Zobrazení úsečky

Jestliže si zvolíme úsečky $AB, A'B'$ tak, že $A = A'$ a $B = B'$, zobrazení přiřazující úsečku AB úsečce $A'B'$ takovýmto způsobem bude identita.
Pokud úsečky budou opět totožné, ale bude platit $A = B'$ a $B = A'$, hledané zobrazení bude osová souměrnosti podle osy o, kde $o \perp AB \wedge S \in o$ a kde bod S je středem úsečky AB.
V případě, kdy AB bude rovnoběžná různá s úsečkou $A'_1B'_1$, budeme mít posunutí o orientovanou úsečku $\boldsymbol{AA'_1}$. Toto zobrazení můžeme sestrojit taky pomocí osy o_1, která je osou pásu určeného úsečkami AB a $A'_1B'_1$.



Obr. 6.2: Zobrazení úsečky

Budou-li dané úsečky různoběžné, budou mít buď jeden společný bod, nebo jejich průsečík bude ležet na přímkách vedoucích těmito úsečkami. Zobrazení, které hledáme, bude otočením v těch bodech průniku o určitý úhel.
Stejný obraz úsečky AB dostaneme i v případě, když použijeme osovou souměrnost podle osy, která bude osou úhlu otáčení.

Závěr
Záleží na poloze přímek.
V případě $A = A' \wedge B = B'$ dostaneme identitu, pro $A = B' \wedge B = A'$ budeme mít osovou souměrnost, pro $AB \parallel A'_1B'_1$ bude hledané zobrazení posunutím a pro možnost $AB \nparallel A'_2B'_2$ bude otočením.

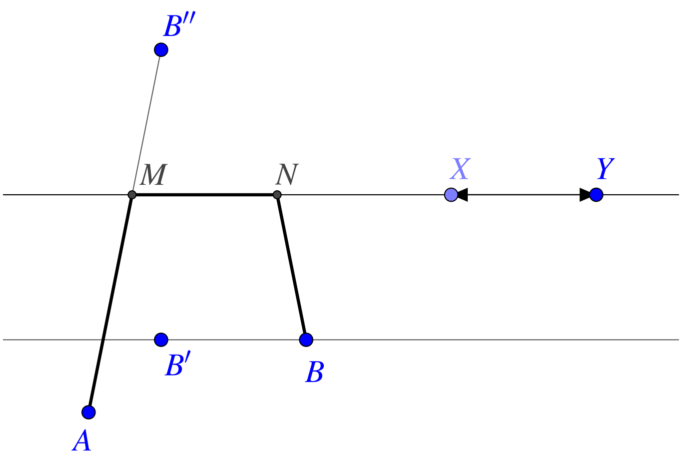
Nyní si ukážeme několik řešených příkladů na skládání shodných zobrazení.

Příklad 1

Jsou dány dva body A a B, ležící na téže straně od dané přímky XY. Naneste na tuto přímku úsečku MN dané délky l tak, aby lomená čára $AM + MN + NB$ byla nejmenší délky.
[5, strana 80, př. 75]

Řešení

Označme si XY, která udává danou přímku, jako orientovanou úsečku $\boldsymbol{XY}$ a zároveň $|XY| = l$. Posuňme bod B na bod B' směrem k bodu A po přímce rovnoběžné s XY o vzdálenost $|MN|$, tedy pro naše označení o orientovanou úsečku $\boldsymbol{YX}$. Potom budeme mít již známou úlohu z kapitoly o osové symetrii. Tedy pro získání nejkratší velikosti lomené čáry mezi bodem A bodem ležící na přímce XY a bodem B, zvolíme osovou souměrnost podle osy XY a zobrazíme bod B' na bod B''. Spojením těchto bodů získáme bod M na XY, který určuje onu minimální délku, neboť to plyne z trojúhelníkové nerovnosti.
Pak při posunutí M o orientovanou úsečku $\boldsymbol{XY}$, dostaneme bod N, který leží na XY a zároveň $|MN| = l$.
Pak bude součet délek $|AM| + |MN| + |NB|$ minimální.



Obr. 6.3: Příklad 1

Popis konstrukce:

1. $\boldsymbol{XY}$, orientovaná úsečka
2. B'; $\mathsf{T}(\boldsymbol{YX}) : B \to B'$
3. přímka XY, osa souměrnosti
4. B''; $\mathsf{O}(XY) : B' \to B''$
5. M; $M \in XY \cap AB''$
6. N; $\mathsf{T}(\boldsymbol{XY}) : M \to N$
7. $|AM| + |MN| + |NB|$ je minimální

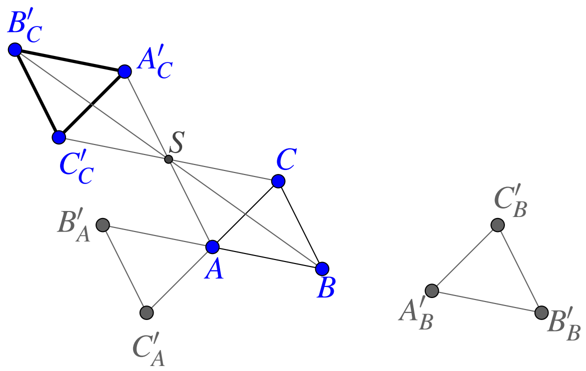
Závěr
Složením posunutí a osové souměrnosti jsme nanesli na přímku úsečku MN dané délky tak, aby zadaná lomená čára byla nejmenší délky.

Příklad 2

Je dán trojúhelník ABC. Určete, jaké shodné zobrazení vznikne složením středových souměrností $\mathsf{S}_1,\ \mathsf{S}_2,\ \mathsf{S}_3$, jejichž středy jsou po řadě body A,B,C. [2, strana 17, př. 36]

Řešení

Zobrazíme-li trojúhelník ABC postupně ve středové symetrii $\mathsf{S}_1,\ \mathsf{S}_2,\ \mathsf{S}_3$ se středy v bodech A,B,C, dostaneme výsledný trojúhelník $A'_C B'_C C'_C$. Sestrojíme úsečky AA'_C, BB'_C, CC'_C a tím získáme průsečík S, který je zároveň středem souměrnosti trojúhelníků ABC a $A'_C B'_C C'_C$. Vzniklé shodné zobrazení je středovou souměrností.



Obr. 6.4: Příklad 2

Popis konstrukce:

1. A,B,C; středy souměrnosti
2. $\triangle AB'_A C'_A$; $\mathsf{S}_1(A)$:
   $\triangle ABC \to \triangle AB'_A C'_A$
3. $\triangle A'_B B'_B C'_B$; $\mathsf{S}_2(B)$:
   $\triangle AB'_A C'_A \to \triangle A'_B B'_B C'_B$
4. $\triangle A'_C B'_C C'_C$; $\mathsf{S}_2(C)$:
   $\triangle A'_B B'_B C'_B \to \triangle A'_C B'_C C'_C$
5. S; $S \in AA'_C \cap BB'_C \cap CC'_C$,
   střed souměrnosti

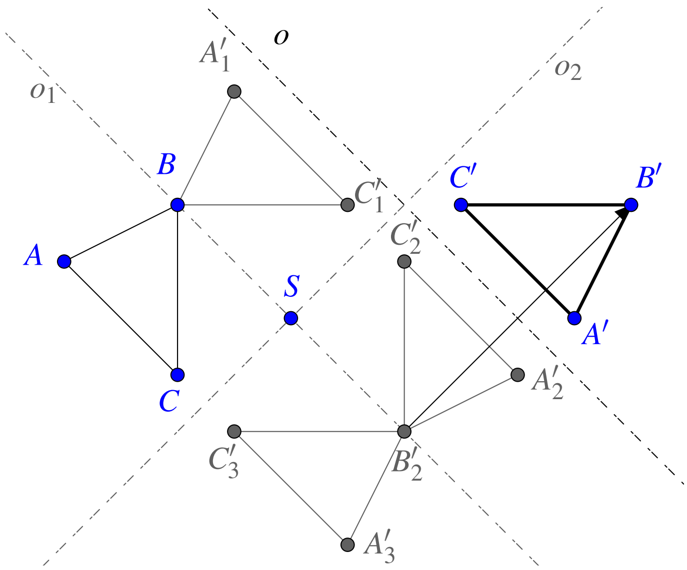
Závěr
Složením tří středových souměrností získáme opět středovou souměrnost.

Příklad 3

Dokažte, že posunutá souměrnost P se dá složit ze středové souměrnosti $\mathsf{S}(S)$ a osové souměrnosti $\mathsf{O}(o)$, $S \notin o$ v libovolném pořadí. [11, strana 160, př. 3.66]

Řešení

Mějme libovolný útvar, například trojúhelník ABC, střed S a osu o.
Posunutá osová symetrie je složením osové symetrie a posunutí ve směru osy o nenulový vektor. Je tedy posunutá osová symetrie složením tří osových symetrii, přitom jsou dvě osy symetrie rovnoběžné a kolmé na třetí osu. [3]
Proto sestrojme osu $o_1 \parallel o$ a osu $o_2 \perp o_1 \wedge S \in o_1 \cap o_2$. Složením osových souměrností podle os o_1 a o_2 dostaneme středovou souměrnost se středem v bodě S a obraz trojúhelníka ABC, trojúhelník $A_2'B_2'C_2'$.
Zobrazením trojúhelníka $A_2'B_2'C_2'$ v osové souměrnosti $\mathsf{O}(o)$ vznikne trojúhelník $A'B'C'$. Tento trojúhelník je zobrazen v posunuté symetrii, která je složením osové symetrie podle osy o_2 a posunutí o orientovanou úsečku $B_2'B'$.
Pak jistě platí, že $\mathsf{P} = \mathsf{S}(S) \circ \mathsf{O}(o) = \mathsf{O}(o_2) \circ \mathsf{O}(o_1) \circ \mathsf{O}(o) = \mathsf{O}(o_2) \circ \mathsf{T}(B_2'B')$
a $\mathsf{O}(o_2) \circ \mathsf{T}(B'B_2') = \mathsf{O}(o_2) \circ \mathsf{O}(o_1) \circ \mathsf{O}(o) = \mathsf{S}(S) \circ \mathsf{O}(o) = \mathsf{P}$.



Obr. 6.5: Příklad 3

Popis konstrukce:

1. S, střed souměrnosti
2. o, osa souměrnosti
3. o_1; $o_1 \parallel o \wedge S \in o_1$
4. o_2; $o_2 \perp o_1 \wedge S \in o_2$
5. $\triangle A_2'B_2'C_2'$;
   $\mathsf{S}(S) = \mathsf{O}(o_1) \circ \mathsf{O}(o_2)$:
   $\triangle ABC \to \triangle A_2'B_2'C_2'$
6. $\triangle A'B'C'$; $\mathsf{O}(o)$:
   $\triangle A_2'B_2'C_2' \to \triangle A'B'C'$

Závěr
Dokázali jsme, že posunutou souměrnost P lze složit z takto zadané středové a osové souměrnosti v libovolném pořadí.

Příklad 4

Je dán rovnoběžník $ABCD$, jehož všechny čtyři strany jsou shodné. Vyšetřete, jaké shodné zobrazení vznikne složením osových souměrností, jejichž osy jsou po řadě přímky AB, BC, CD, DA.
[2, strana 17, př. 35]

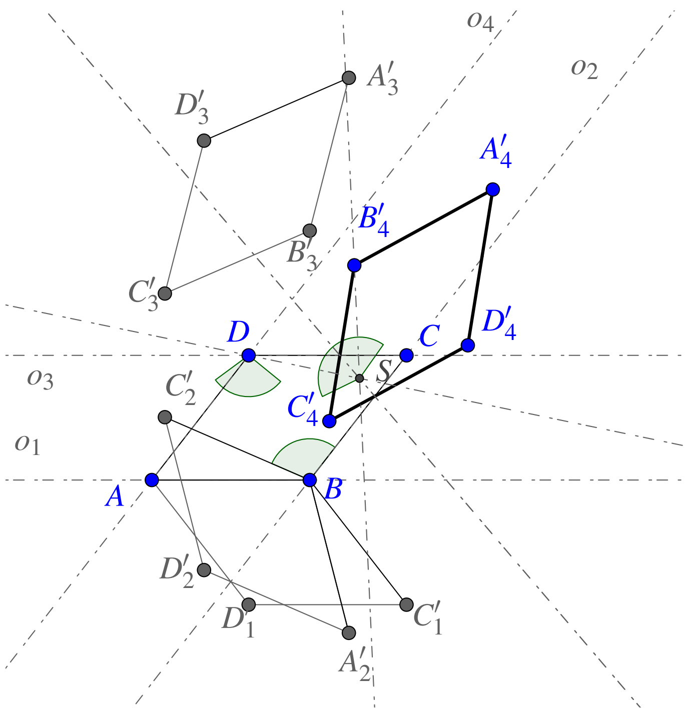
Řešení

Zobrazme daný rovnoběžník $ABCD$ v jednotlivých osových symetriích podle daných os AB, BC, CD, DA. Obrazem $ABCD$ při aplikaci tohoto složeného zobrazení je kosočtverec $A_4'B_4'C_4'D_4'$. Zobrazení, které nám vzniklo, označme Z. Z je složením dvou rotací, neboť platí, že otočení je složením dvou osových symetrií s různoběžnými osami.
Tedy $\mathsf{O}(o_2) \circ \mathsf{O}(o_1) = \mathsf{R}_1 \wedge \mathsf{O}(o_4) \circ \mathsf{O}(o_3) = \mathsf{R}_2 \implies \mathsf{Z} = \mathsf{R}_2 \circ \mathsf{R}_1$.

Složením dvou otočení (obecně podle různých středů i úhlů) je buďto posunutí, nebo otočení. Dvě složená otočení jsou otočením o úhel $\alpha + \beta \neq 2\pi$, kolem bodu, který dostaneme jako samodružný bod složeného zobrazení. Pro různé pořadí skládání jsou to různé body.
Speciálně pro $\alpha + \beta = \pi$, jde o středovou symetrii. Pro $\alpha + \beta = 2\pi$ dostaneme buď identitu (pro stejné středy otáčení), nebo posunutí (pro různé středy otáčení). Pro různé pořadí skládání jsou to různá posunutí. [3]

V našem případě otáčíme daný kosočtverec v rotaci R_1 kolem bodu B o velikost úhlu $\sphericalangle CBC_2'$ v kladném smyslu. V R_2 otočíme vzniklý kosočtverec $A_2'BC_2'D_2'$ se středem rotace v bodě D o velikost úhlu $\sphericalangle C_2'DC_4'$ opět v kladném smyslu. Ze symetrie kosočtverce si můžeme uvědomit, že $|\sphericalangle CBC_2'| = |\sphericalangle C_2'DC_4'|$.

Výsledný obraz $A_4'B_4'C_4'D_4'$ je dostaneme tedy složeným zobrazením, které je rotací
$\mathsf{Z} = \mathsf{R}(S; |\sphericalangle ASA_4') : ABCD \to A_4'B_4'C_4'D_4'$, kde S je průsečíkem os úseček AA_4', BB_4', CC_4', DD_4'.



Obr. 6.6: Příklad 4

Popis konstrukce:

1. o_1, o_2, o_3, o_4; $AB = o_1$, $BC = o_2$, $CD = o_3$, $DA = o_4$, osy souměrnosti
2. $ABC_1'D_1'$; $\mathsf{O}(o_1)$: $ABCD \to ABC_1'D_1'$
3. $A_2'BC_2'D_2'$; $\mathsf{O}(o_2)$: $ABC_1'D_1' \to A_2'BC_2'D_2'$
4. $A_3'B_3'C_3'D_3'$; $\mathsf{O}(o_3)$: $A_2'BC_2'D_2' \to A_3'B_3'C_3'D_3'$
5. $A_4'B_4'C_4'D_4'$; $\mathsf{O}(o_4)$: $A_3'B_3'C_3'D_3' \to A_4'B_4'C_4'D_4'$
6. $\mathsf{Z} : ABCD \to A_4'B_4'C_4'D_4'$
7. $\mathsf{Z} = \mathsf{R}_2 \circ \mathsf{R}_1$
8. $\mathsf{Z} = \mathsf{R}(S; |\sphericalangle ASA_4')$: $ABCD \to A_4'B_4'C_4'D_4'$

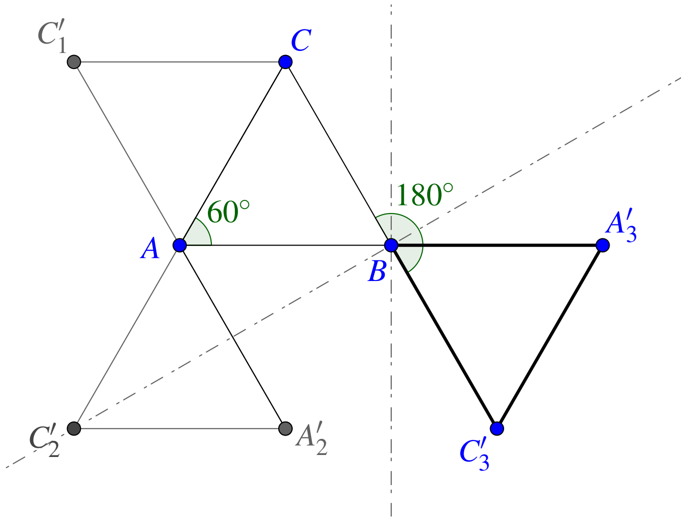
Závěr
Složením zadaných shodných osových zobrazení dostaneme rotaci $\mathsf{R}(S; |\sphericalangle ASA_4')$.

Příklad 5

Je dán rovnostranný trojúhelník ABC. Určete, jaké shodné zobrazení vznikne složením rotací o vrcholové úhly se středy, kterými jsou po řadě jednotlivé vrcholy A, B, C daného trojúhelníka.

Řešení

Složené zobrazení označme Z, přičemž $\mathsf{Z} = \mathsf{R}_3 \circ \mathsf{R}_2 \circ \mathsf{R}_1$. Když postupně zobrazíme jednotlivé rotace kolem daných středů o úhly $+60°$, dostaneme trojúhelník $A_3'BC_3'$.
V předchozím příkladě jsme si řekli, že složené otáčení, kde pro úhly jednotlivých otočení platí $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, je středovou souměrností, která je zároveň otočením o $\pm 180°$.
Pak tedy platí, že $\mathsf{Z} = \mathsf{R}(B; -180°) = \mathsf{S}(B)$, kde bod B je středem úseček CC_3', AA_3' a středem symetrie.



Obr. 6.7: Příklad 5

Popis konstrukce:

1. $\triangle ACC_1'$; $\mathsf{R}_1(A; +60°)$: $\triangle ABC \to \triangle ACC_1'$
2. $\triangle AC_2'A_2'$; $\mathsf{R}_2(B; +60°)$: $\triangle ACC_1' \to \triangle AC_2'A_2'$
3. $\triangle A_3'BC_3'$; $\mathsf{R}_3(C; +60°)$: $\triangle AC_2'A_2' \to \triangle A_3'BC_3'$
4. $\mathsf{Z} = \mathsf{R}_3 \circ \mathsf{R}_2 \circ \mathsf{R}_1$
5. $\mathsf{Z} = \mathsf{R}(B; -180°) = \mathsf{S}(B)$

Závěr
Složením zadaných rotací jsme dostali středovou souměrnost podle bodu B, která je speciálním případem otáčení.

Příklady na procvičení

1. Je dána přímka p, kružnice k a bod M. Vzájemnou polohu p, k, M volte stejně, jako v úloze 37. Sestrojte všechny čtverce $ABCD$ tak, aby platilo $B \in k \wedge D \in p \wedge A = M$.

   (př. 37: Je dána úsečka OP, $|OP| = 4\,cm$. Sestrojte kružnici $k(O; 2,5\,cm)$ a přímku p, $p \perp OP \wedge P \in p$. Dále sestrojte jeden bod M, pro který platí $|OM| = 3\,cm$ a $|\sphericalangle POM| = 30°$. [10, strana 79, př. 39]

2. Jsou dány tři různé body S_1, S_2, A tak, že bod S_2 je středem úsečky S_1A. Určete, jaké shodné zobrazení vznikne složením $\mathsf{R}_1 \circ \mathsf{T} \circ \mathsf{R}_2$, kde R_1, R_2 jsou rotace se středy S_1, S_2 a T je translace, která převádí bod S_1 v bod A. [2, strana 17, př. 37]

3. Je dán dutý úhel $\sphericalangle ASC$, jehož osou je polopřímka SB. Určete, jaké shodné zobrazení vznikne složením $\mathsf{T}_1 \circ \mathsf{R} \circ \mathsf{T}_2$, kde T_1, T_2 jsou translace, jejichž směry jsou po řadě kolmé na přímky SA, SB a R je rotace, která převádí polopřímku SA v polopřímku SC.
   [2, strana 17, př. 38]

4. Je dán pravidelný osmiúhelník $ABCDEFGH$ se středem S. Určete zobrazení, v němž je obrazem trojúhelníku ABD trojúhelník

   a) AHF
   b) HGE
   c) EFH
   d) BCE
   e) CHB

   Vytvořte tato zobrazení složením osových souměrností. [11, strana 160, př. 3.64]

Závěr

Práce obsahuje vždy v každé kapitole část teoretickou i praktickou, kde jsou řešeny typové příklady. Do výběru řešených úloh jsem zahrnula konstrukční i důkazové příklady.

V prvních příkladech jednotlivých kapitol jsem názorně ukázala elementární principy daného zobrazení.

Text teoretické části i následné zpracování jednotlivých úloh je přizpůsobeno tak, aby odpovídal běžně probíranému středoškolskému učivu. Budu ráda, když tato práce i nadále najde využití u některých učitelů při výuce na středních školách nebo u žáků alespoň při jejich samostudiu.

Při tvorbě své práce a díky ní jsem získala mnoho nových zkušeností, které budu moci využít ve svém budoucím povolání. Osvojila jsem si znalosti z učiva planimetrie a shodností. Zdokonalila jsem si jazykové schopnosti, zvláště formulaci svých myšlenek a jejich následný převod do smysluplných vět. Zlepšila jsem se v práci se sázecím systémem LaTeX a naučila jsem se obstojně pracovat v programu GeoGebra.

Seznam použité literatury

[1] Čtyřúhelníky. *Geometrie živě* [online]. Praha: Katedra didaktiky matematiky, 2003 [cit. 2016-05-22]. Dostupné z: http://kdm.karlin.mff.cuni.cz//diplomky/cabri/main.php?Kapitola=ctyruhelniky

[2] FRANCOVÁ, Marta, PaedDr. Jaroslav RÁDL, Květoslava MATOUŠKOVÁ a RNDr. Ota ŘÍHA. *Sbírka úloh z geometrie*. 1. vyd. Brno: rektorát UJEP Brno, 1975. ISBN 55 - 977 - 75.

[3] JANYŠKA, Josef. *Geometrická zobrazení* [online]. Brno, 2014 [cit. 2016-05-20]. Dostupné z: https://www.math.muni.cz/~janyska/ZobrazeniWS.pdf

[4] KADLEČEK, Jiří. *Geometrie v rovině a v prostoru pro střední školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1996. Učebnice pro střední školy. ISBN 80-719-6017-9.

[5] KISELEV, A. P. *Geometrie: Planimetrie a stereometrie*. Praha: Přírodovědecké vydavatelství, 1952. ISBN 49898-51-5-III-1.

[6] KUŘINA, František. *Umění vidět v matematice*. 1. vyd. Praha: SPN, 1990. Odborná literatura pro učitele. ISBN 80-042-3753-3.

[7] Matematika SŠ.realisticky.cz. *Matematika SŠ.realisticky.cz* [online]. 2015 [cit. 2016-04-21]. Dostupné z: http://www.realisticky.cz/dil.php?id=12

[8] MOLNÁR, Josef. *Planimetrie*. 1. vyd. Olomouc: Univerzita Palackého, 2001, 128 s. ISBN 80-244-0370-6.

[9] NIMRICHTROVÁ, Jana. *Shodná zobrazení na střední škole* [online]. Brno, 2006 [cit. 2016-03-25]. Dostupné z: http://is.muni.cz/th/98809/prif_b/shodnost.pdf. Bakalářská práce.

[10] PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika - příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vyd. Praha: Prometheus, 1998. Učebnice pro střední školy. ISBN 80-719-6099-3.

[11] POMYKALOVÁ, Eva. *Matematika pro gymnázia: planimetrie*. 4., upr. vyd. Praha: Prometheus, 2000, 206 s. Učebnice pro střední školy. ISBN 80-719-6174-4.

[12] VYŠÍN, Jan. *Elementární geometrie I.: Planimetrie*. 1. vyd. Praha: Přírodovědecké vydavatelství, 1952. ISBN 69734-51-1.