MASARYKOVA UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
ÚSTAV MATEMATIKY A STATISTIKY

Bakalářská práce

BRNO 2017 PETRA SIEBENBÜRGEROVÁ

MASARYKOVA UNIVERZITA
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA
ÚSTAV MATEMATIKY A STATISTIKY

Sbírka planimetrických úloh řešených pomocí podobností

Bakalářská práce

Petra Siebenbürgerová

Vedoucí práce: prof. RNDr. Josef Janyška, DSc. **Brno 2017**

Bibliografický záznam

Autor:	Petra Siebenbürgerová Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita Ústav matematiky a statistiky
Název práce:	Sbírka planimetrických úloh řešených pomocí podobností
Studijní program:	Fyzika
Studijní obor:	Fyzika se zaměřením na vzdělávání, Matematika se zaměřením na vzdělávání
Vedoucí práce:	prof. RNDr. Josef Janyška, DSc.
Akademický rok:	2016/2017
Počet stran:	ix + 44
Klíčová slova:	Podobné zobrazení; Podobnost trojúhelníků; Stejnolehlost

Bibliographic Entry

Author:	Petra Siebenbürgerová Faculty of Science, Masaryk University Department of Mathematics and Statistics
Title of Thesis:	Exercise book of plane geometry - similarity
Degree Programme:	Physics
Field of Study:	Physics with a view to Education, Mathematics with a view to Education
Supervisor:	prof. RNDr. Josef Janyška, DSc.
Academic Year:	2016/2017
Number of Pages:	ix + 44
Keywords:	Similarity; Similarity of triangles; Dilation

Abstrakt

V této bakalářské práci se věnujeme planimetrickým úlohám řešených pomocí podobností. Práce je pojata jako sbírka příkladů, teorie je tedy uvedena pouze okrajově. Je členěna do více kapitol, především je zde část příkladová a část s výsledky k uvedeným příkladů. Cílem práce je připravit sbírku úloh pro učitele a žáky střední školy.

Abstract

In this thesis we study deal with planimatric tasks solved with the help of similarities. The work is conceived as a collection of examples, the theory is therefore introduced only marginally. The work is divided into chapters, especially there is a chapter of examples and a part of results of the mentioned examples. The aim of this work is to prepare a collection of examples for secondary school teachers and students.

MASARYKOVA UNIVERZITA
Přírodovědecká fakulta

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Akademický rok: 2015/2016

Ústav: Ústav matematiky a statistiky

Studentka: Petra Siebenbürgerová

Program: Fyzika

Obor: Fyzika se zaměřením na vzdělávání
Matematika se zaměřením na vzdělávání

Ředitel *Ústavu matematiky a statistiky* PřF MU Vám ve smyslu Studijního a zkušebního řádu MU určuje bakalářskou práci s tématem:

Téma práce: Sbírka planimetrických úloh řešených pomocí podobností

Téma práce anglicky: Exercise book of plane geometry - similarity

Oficiální zadání:
Sbírka bude zahrnovat planimetrické úlohy (konstrukční, důkazové, ...) při jejichž řešení se použije podobnost.

Literatura:

VYŠÍN, Jan. *Elementární geometire. I, Planimetrie [Vyšín, 1952]*. 1. vyd. Praha: Přírodovědecké vydavatelství, 1952. 266 s.

HEJNÝ, Milan a Naďa STEHLÍKOVÁ. *Elementární matematika : rovnice, teorie čísel, kombinatorika, planimetrie*. 1. vyd. Praha: Karolinum, 1995. 93 s. ISBN 80-7184-103-X.

KISELEV, A. P. *Geometrie., Planimetrie a stereometrie*. Vyd. 1. Praha: Přírodovědecké nakladatelství, 1952. 351 s.

POMYKALOVÁ, Eva. *Matematika pro gymnázia :planimetrie*. 4., upr. vyd. Praha: Prometheus, 1993. 206 s. ISBN 80-7196-174-4.

MOLNÁR, Josef. *Planimetrie*. 1. vyd. Olomouc: Univerzita Palackého, 2001. 128 s. ISBN 80-244-0370-6.

Jazyk závěrečné práce:

Vedoucí práce: prof. RNDr. Josef Janyška, DSc.

Datum zadání práce: 24. 5. 2015

V Brně dne: 20. 10. 2015

Souhlasím se zadáním (podpis, datum):

9. 11. 2015
Petra Siebenbürgerová
studentka

prof. RNDr. Josef Janyška, DSc.
vedoucí práce

v. z.
prof. RNDr. Jan Slovák, DrSc.
ředitel Ústavu matematiky a statistiky

Poděkování

Na tomto místě bych chtěla poděkovat svým přátelům a rodině, kteří mě nesmírně podporovali. A samozřejmě v neposlední řadě také svému vedoucímu prof. RNDr. Josefu Janyškovi, DSc., za odborné a cenné rady a připomínky k této práci.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem svoji bakalářskou práci vypracovala samostatně s využitím informačních zdrojů, které jsou v práci citovány.

Brno 5. leden 2017

. . . .
Petra Siebenbürgerová

Obsah

Úvod

Cílem této práce bylo vytvořit sbírku neřešených příkladů z planimetrie s jejich výsledky.

Bakalářská práce je sestavena z 5 kapitol. V první kapitole se zabýváme zobrazením jako takovým a definujeme podobné zobrazení s jeho vlastnostmi. Druhá i třetí kapitola obsahuje neřešené příklady, které jsem se snažila rozdělit podle tématu a obtížnosti a k nim potřebnou teorii. Ve čtvrté a páté kapitole jsou tyto příklady vyřešené slovně, pomocí konstrukce, konstrukčního předpisu nebo kombinací konstrukce i kombinačního předpisu.

Práce je vytvořena jako doplňkový materiál, takže v ní předpokládám určitou znalost studentů z předchozího učiva.

Tuto bakalářskou práci jsem vysázela v systému LaTeX a všechny obrázky, které jsou v této práci použity, jsem vytvořila v matematickém programu GeoGebra, který je na internetu volně dostupný.

Přehled použitého značení

Pro snažší orientaci v textu zde čtenáři předkládáme přehled základního značení, které se v celé práci vyskytuje.

A, B	body A, B
a, b	přímka a, b
$p = AB$	přímka p určená body AB
$\rightarrow AB$	polopřímka AB
$\leftarrow AB$	polopřímka opačná k AB
$A \in a, A \notin a$	bod A náleží přímce a, bod A nenáleží přímce a
$a \parallel b$	přímka a je rovnoběžná s přímkou b
$a \perp b$	přímka a je kolmá na přímku b
$a \cap b$	průnik přímek a, b
AB	úsečka AB
$\|AB\|$	velikost úsečky AB
pA	polorovina určená přímkou p a bodem A
$\measuredangle AVB$	úhel AVB
$\|\measuredangle AVB\|$	velikost úhlu AVB
α, β	úhel α, β
$\triangle ABC$	trojúhelník ABC
a (v $\triangle ABC$)	délka strany protější k vrcholu A, $\|CB\| = a$
t_a	těžnice na stranu a
v_a	výška na stranu a
ρ	poloměr kružnice vepsané
r	poloměr kružnice opsané
$\triangle ABC \sim \triangle KLM$	trojúhelník ABC je podobný trojúhelníku KLM
$k(S, r)$	kružnice k se středem S a poloměrem r
τ	Thaletova kružnice

Kapitola 1

Podobná zobrazení

K textu teorie této kapitoly jsem využila knihu *Matematika pro gymnázia: planimetrie* [2].

Zobrazení Z v rovině je předpis, který každému bodu X roviny přiřazuje právě jeden bod X' roviny. Bod X se nazývá **vzor**, bod X' jeho **obraz**. Zapisujeme $Z : X \longrightarrow X'$.

Body X, které se zobrazí na sebe, se nazývají **samodružné** body. Zobrazení, ve kterém jsou všechny body samodružné, se nazývá **identita**.

Podobné zobrazení (podobnost) je takové zobrazení v rovině, pro které existuje kladné reálné číslo κ takové, že pro každé dvě dvojice bodů X, X' a Y, Y' vzoru a obrazu je splněn vztah $|X'Y'| = \kappa.|XY|$. Číslo κ se nazývá **koeficient podobnosti**.

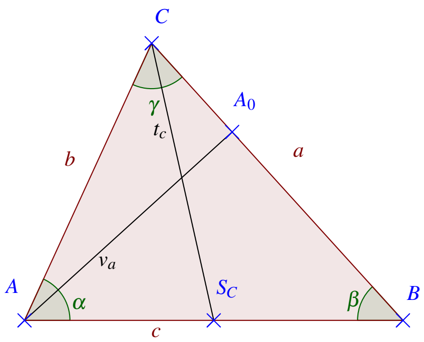
Jestliže $\kappa = 1$, pak se jedná o shodnost.
Pro každé podobné zobrazení platí:

- podobné zobrazení je injektivní,
- obrazem přímky *AB* je přímka *A'B'*,
- obrazem rovnoběžných přímek jsou rovnoběžné přímky,
- obrazem polopřímky *AB* je polopřímka *A'B'*,
- obrazem opačných polopřímek jsou opačné polopřímky,
- obrazem poloroviny *pA* je polorovina *p'A'*,
- obrazem opačných polorovin jsou opačné poloroviny,
- obrazem úhlu *AVB* je úhel *A'V'B'* shodný s úhlem *AVB*.

Kapitola 2

Podobnost trojúhelníků

K textu teorie této kapitoly jsem využila knihy *Matematika pro gymnázia: planimetrie* [2] a *Planimetrie* [3]



Obrázek 2.1: Popis trojúhelníku

Trojúhelník *A'B'C'* je **podobný trojúhelníku** *ABC* právě, když existuje kladné číslo κ tak, že pro jejich strany platí $a' = \kappa.a$, $b' = \kappa.b$, $c' = \kappa.c$ nebo-li $|A'B'| = \kappa|AB|$, $|B'C'| = \kappa|BC|$, $|C'A'| = \kappa|CA|$.

Číslo κ se nazývá **koeficient podobnosti trojúhelníků** *ABC, A'B'C*. Je-li $\kappa > 1$, představuje podobnost **zvětšení**, je-li $\kappa < 1$ jde o **zmenšení**, je-li $\kappa = 1$ jsou oba trojúhelníky **shodné**.
Podobnost trojúhelníků *ABC, A'B'C'* zapisujeme $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.
Pořadí vrcholů v zápisu $\triangle A'B'C'$ je určeno pořadím příslušných vrcholů $\triangle ABC$.

Věty o podobnosti trojúhelníků

Věty(sss)

Dva trojúhelníky jsou podobné právě tehdy, když se rovnají poměry všech tří odpovídajících si stran: $a : a' = b : b' = c : c' = \kappa$.

Dva trojúhelníky jsou podobné právě tehdy, když poměr každých dvou stran jednoho trojúhelníku se rovná poměru odpovídajících stran druhého trojúhelníku: $a' : b' = a : b$, $b' : c' = b : c$, $c' : a' = c : a$.

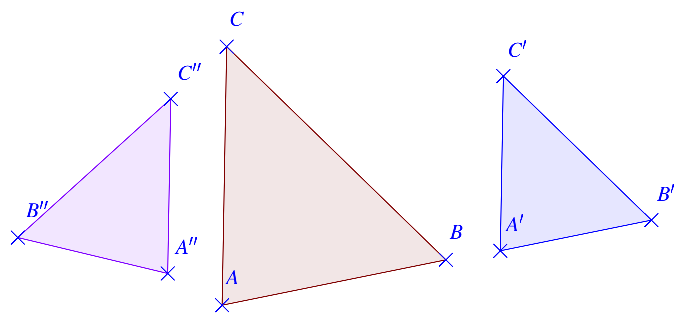
Věta(uu)
Dva trojúhelníky jsou podobné právě tehdy, shodují-li se alespoň ve dvou úhlech.

Věta(uSu)
Dva trojúhelníky jsou podobné právě tehdy, shodují-li se ve dvou úhlech přilehlých k odpovídající si straně.

Věta(sus)
Dva trojúhelníky jsou podobné právě tehdy, shodují-li se alespoň v jednom úhlu a v poměru stran tento úhel svírající.

Věta(Ssu)
Dva trojúhelníky jsou podobné právě tehdy, shodují-li se v poměru dvou odpovídajících si stran a v úhlu, který je naproti větší straně.

Přímá podobnost X Nepřímá podobnost
Existují dva typy podobnosti a tím pádem i dva typy podobných trojúhelníků.



Obrázek 2.2

Trojúhelníky *ABC* a *A'B'C'* jsou **přímo** podobné. Trojúhelníky *ABC* a *A"B"C"* jsou **nepřímo** podobné.
Dva trojúhelníky *ABC* a *A'B'C'* jsou **přímo** podobné, **jsou-li** jejich vrcholy stejně orientované - při pohybu od vrcholu A přes B do C se v obou případech pohybujeme po směru nebo proti směru hodinových ručiček. V případě **nepřímé** podobnosti **nejsou** jejich vrcholy stejně orientované - pohybujeme se jednou po směru a podruhé proti směru hodinových ručiček.
Přímou podobnost dostaneme z nepřímé podobnosti „vyjmutím“ obrazce z roviny, jeho převrácením a následným „vrácením“ do roviny.

1. Rozhodněte, zda jsou tyto trojúhelníky podobné, víte-li, že
   (a) první má délky stran $12\,cm$, $16\,cm$, $19\,cm$ a druhý $10\,cm$, $13\,cm$, $15\,cm$,
   (b) první má vnitřní úhly o velikosti $42°$, $84°$ a druhý $84°$, $54°$,
   (c) první má dvě strany délky $\frac{4}{3}\,cm$, $\frac{7}{6}\,cm$ a úhel jimi sevřený má velikost $55°$ a druhý $2\,cm$, $1,75\,cm$ a $55°$. [2, 39] [Řešení]

2. Rozhodně, zda jsou dané trojúhelníky ABC, $A'B'C'$ podobné:
   (a) $a = 3/5$, $b = 11/6$, $\gamma = 70°$, $a' = 5/2$, $b' = 11/4$, $\gamma' = 70°$,
   (b) $a = 3$, $b = 4$, $c = 4{,}5$, $a' = 5$, $b' = 6\frac{2}{3}$, $c' = 7{,}5$. [3, 34] [Řešení]

3. V jakém trojúhelníku ABC můžeme zvolit bod D na jeho straně AB tak, aby jej úsečka CD rozdělila na dva podobné trojúhelníky? [3, 34] [Řešení]

4. Jaké dva obdélníky považujeme za podobné? Určete podmínky jejich podobnosti. [3, 34] [Řešení]

5. Je dán libovolný trojúhelník ABC. Sestrojte trojúhelník $A'B'C'$ podobný trojúhelníku ABC tak, aby
   (a) $|B'C'| = \frac{3}{2}|BC|$,
   (b) $v'_a = 2v_a$,
   (c) $r' = \frac{4}{5}r$,
   (d) $\rho' = \frac{3}{4}\rho$. [2, 40] [Řešení]

6. Sestrojte dvojici podobných trojúhelníků podle zadání. Podobnost trojúhelníků zapište a uveďte větu o podobnosti trojúhelníků, která pro ně platí:
   (a) trojúhelník ABC má strany $|AB| = 3\,cm$, $|BC| = 4,5\,cm$, $|AC| = 3,5\,cm$ a trojúhelník $A'B'C'$ má odpovídající strany dvojnásobné délky,
   (b) pravoúhlý trojúhelník ABC má vnitřní úhel $\beta = 60°$ a pravoúhlý trojúhelník $A'B'C'$ má vnitřní úhel $\beta' = 60°$, $|AB| \neq |A'B'|$,
   (c) v trojúhelníku ABC je $|AB| = 2,5\,cm$, $\alpha = 40°$, $|AC| = 2\,cm$ a v trojúhelníku $A'B'C'$ je $|A'B'| = 5\,cm$, $\alpha' = 40°$, $|A'C'| = 4\,cm$,
   (d) v trojúhelníku ABC je $|AC| = 6\,cm$, $|AB| = 4,8\,cm$, $\beta = 110°$ a v trojúhelníku $A'B'C'$ je $|A'C'| = 3\,cm$, $|A'B'| = 2,4\,cm$, $\beta' = 110°$. [4, 83] [Řešení]

7. Je dán trojúhelník ABC, rovnoběžky p, r a na rovnoběžce p bod P. Sestrojte trojúhelník PQR podobný trojúhelníku ABC tak, aby $Q \in p$, $R \in r$. [2, 39] [Řešení]

8. Svislá metrová tyč vrhá stín $180\,cm$. Vypočítejte výšku sloupu, jehož stín je ve stejném okamžiku dlouhý $36\,m$. [2, 39] [Řešení]

9. Vypočítejte výšku stromu, který vrhá stín délky $21\,m$, víte-li, že ve stejném okamžiku $2\,m$ vysoký pilíř vrhá stín dlouhý $3\,m$. [4, 85] [Řešení]

10. Trojúhelníkové pole je na plánu v měřítku 1 : 5 000 zakresleno jako trojúhelník o stranách délek $32,5\,mm$, $23,5\,mm$ a $36\,mm$. Určete jeho skutečné rozměry. [2, 39]
[Řešení]

11. Určete měřítko mapy, je-li les tvaru trojúhelníku o rozměrech $1,6\,km$, $2,5\,km$, a $2,7\,km$ na mapě zakreslen jako trojúhelník o stranách délek $32\,mm$, $48\,mm$ a $54\,mm$. [2, 39]
[Řešení]

12. V trojúhelníku ABC ($|AB| = 12\,cm$, $|BC| = 9\,cm$, $|AC| = 15\,cm$) je narýsována příčka $EF(EF \parallel AB$, $|EF| = 4\,cm)$. Vypočtěte vzdálenost bodů E, F od vrcholu C. [2, 39]
[Řešení]

13. Zvolte vhodné měřítko a narýsujte plánek
    (a) vaší třídy,
    (b) vašeho pokoje nebo bytu,
    (c) vaší zahrady. [3, 35] [Řešení]

14. Úsečku $|AB| = 10\,cm$ rozdělte na :
    (a) pět stejných dílů,
    (b) devět stejných dílů,
    (c) dva díly v poměru 2 : 1,
    (d) dva díly v poměru 2 : 3,
    (e) tři díly v poměru 2 : 3 : 4,
    (f) v poměru $2 : 3 : \sqrt{5}$. [Řešení]

15. Úsečku AB ($|AB| = 12\,cm$) rozdělte body C a D v poměru $|AC| : |CD| : |DB| = 2 : 3 : 5$. [2, 40] [Řešení]

16. Zkraťte úsečky délek $5\,cm$, $6,5\,cm$ a $9cm$ na $\frac{4}{7}$ jejich délky. Sestrojte trojúhelník, jehož strany jsou shodné s původními úsečkami a trojúhelník, jehož strany jsou shodné se zkrácenými stranami. [2, 40] [Řešení]

17. Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC s odvěsnami $a = 8\,cm$, $b = 6\,cm$. Označte A_1 střed odvěsny AC, B_1 střed odvěsny BC a sestrojte nový pravoúhlý trojúhelník $A_1B_1C_1$, v němž $C_1 = C$. V tomto trojúhelníku postup opakujte a sestrojte trojúhelník $A_2B_2C_2$, v němž $C_2 = C_1 = C$. Měřením stran a úhlů se přesvědčte, že platí: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$. [4, 83] [Řešení]

Kapitola 3

Stejnolehlost

K textu této kapitoly jsem využila knihy *Matematika pro gymnázia: planimetrie* [2] a *Planimetrie* [3]

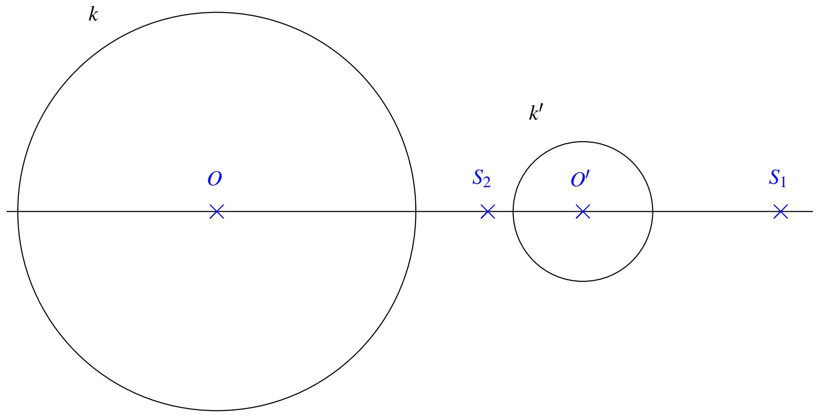
Je dán bod S a reálné číslo κ ($\kappa \neq 0$). **Stejnolehlost** se středem S a koeficientem κ je zobrazení $H(S,\kappa)$, které přiřazuje:

1. každému bodu $X \neq S$ bod *X'* tak, že platí $|SX'| = |\kappa|.|SX|$, přitom pro $\kappa > 0$ leží *X'* na polopřímce *SX*, pro $\kappa < 0$ je bod *X'* bodem polopřímky opačné,

2. bodu S bod $S' = S$.

- Stejnolehlost je podobné zobrazení (podobnost).
- Píšeme $H(S,\kappa) : X \longrightarrow X'$.
- Inverzní zobrazení k $H(S,\kappa) : X \longrightarrow X'$ je zobrazení $H^{-1}(S,\frac{1}{\kappa}) : X' \longrightarrow X$.
- Složením stejnolehlostí $H_1(S_1,\kappa_1)$ a $H_2(S_2,\kappa_2)$ dostaneme stejnolehlost $H(S,\kappa_1.\kappa_2)$, kde $S \in S_1S_2$. Pokud je $\kappa_1.\kappa_2 = 1$ dostaneme posunutí nebo identitu.
- Dva útvary považujeme za stejnolehlé, existuje - li stejnolehlost, která zobrazuje jeden útvar na druhý.
- Jediný samodružný bod je střed stejnolehlosti.
- Samodružné přímky jsou všechny přímky, které procházejí středem stejnolehlosti.
- Obrazem přímky je přímka, odpovídající si přímky jsou rovnoběžné.
- Obrazem úsečky je úsečka, odpovídající si úsečky jsou rovnoběžné. Jsou souhlasně orientované pro stejnolehlost s kladným koeficientem a opačně orientované pro stejnolehlost se záporným koeficientem.
- Jsou-li dány dvě rovnoběžné úsečky různých délek, existují právě dvě stejnolehlosti, které zobrazí jednu úsečku na druhou.
- Stejnolehlost zachovává velikost úhlu.

Obrazem kružnice $k(O,r)$ ve stejnolehlosti $H(S,\kappa)$ je kružnice $k'(O',|\kappa|.r)$, přitom bod O' je obrazem bodu O.



Obrázek 3.1

- Jsou-li dány dvě kružnice s různými poloměry, pak existují právě dvě stejnolehlosti, které zobrazí jednu kružnici na druhou.
- Bod S_1 z obrázku 3.1 se nazývá vnější střed stejnolehlosti a bod S_2 z obrázku 3.1 se nazývá vnitřní střed stejnolehlosti.
- Společná tečna dvou kružnic prochází středem některé stejnolehlosti, zobrazující jednu kružnici na druhou nebo je rovnoběžná se spojnicí středů kružnic, které mají stejné poloměry.
- Pokud jedna ze dvou kružnic leží uvnitř druhé, pak společná tečna neexistuje.
- Tečny procházející vnějším středem stejnolehlosti se nazývají vnější společné tečny, tečny procházející vnitřním středem stejnolehlosti jsou vnitřní společné tečny.

1. Narýsujte body P, S, úsečku AB a obecný trojúhelník KLM. Sestrojte obraz
   (a) bodu P ve stejnolehlosti $H_1(S, \kappa = \frac{1}{3})$,
   (b) úsečky AB ve stejnolehlosti $H_2(S, \kappa = -2)$,
   (c) trojúhelník KLM ve stejnolehlosti $H_3(P, \kappa = 3)$. [3, 107] [Řešení]

2. Je dán trojúhelník ABC ($a = 6\,cm$, $b = 7\,cm$, $c = 8\,cm$) a jeho těžiště T. Sestrojte obraz trojúhelníku ABC ve stejnolehlosti se středem T a koeficientem $\kappa = -\frac{1}{2}$. [1, 81] [Řešení]

3. Je dán trojúhelník ABC. Určete jeho obraz ve stejnolehlosti $H(S, \kappa)$:
   (a) $S \in AB$, $\kappa = \frac{3}{2}$,
   (b) $S = A$, $\kappa = -\frac{3}{4}$,
   (c) S leží uvnitř trojúhelníku, $\kappa = \sqrt{2}$,
   (d) S leží vně trojúhelníku, $\kappa = \frac{2}{3}$. [2, 165] [Řešení]

4. Je dán trojúhelník ABC ($a = 4\,cm$, $b = 3\,cm$, $c = 5\,cm$). Vně trojúhelníku ABC je bod S tak, že $|AS| = 3\,cm$, $|CS| = 4\,cm$. Sestrojte obraz trojúhelníku ABC ve stejnolehlosti se středem S a koeficientem:
   (a) $\kappa = \frac{3}{2}$,
   (b) $\kappa = \frac{1}{3}$,
   (c) $\kappa = -\frac{1}{2}$,
   (d) $\kappa = -1$. [1, 81] [Řešení]

5. Zvolte dvojici podobných trojúhelníku ABC, $A'B'C'$, které mají rovnoběžné odpovídající si strany. Sestrojte střed stejnolehlosti, ve které je obrazem trojúhelníku ABC trojúhelník $A'B'C'$. Uvažujte případy
   (a) $A = A'$,
   (b) AB a $A'B'$ leží v téže přímce,
   (c) jeden trojúhelník leží uvnitř druhého,
   (d) průnikem trojúhelníků je trojúhelník,
   (e) průnikem trojúhelníků je prázdná množina. [2, 166] [Řešení]

6. Je dán trojúhelník ABC a body S_1 a S_2. Zobrazte trojúhelník ABC postupně ve stejnolehlostech $H_1(S_1, -\frac{3}{2})$ a $H_2(S_2, \frac{1}{2})$. Určete zobrazení Z, které vynikne složením stejnolehlostí $H_2 \circ H_1$. [2, 166] [Řešení]

7. Lichoběžník $KLMN$ ($KL \parallel MN$) zobrazte ve stejnolehlosti se středem v průsečíku úhlopříček a koeficientem a) $\frac{1}{2}$ b) $-\frac{1}{2}$. [2, 165] [Řešení]

8. Jsou dány dva čtverce s rovnoběžnými stranami. Určete stejnolehlost zobrazující jeden na druhý. [3, 108] [Řešení]

9. Je dán čtverec *KLMN* ($a = 4\,cm$). Označte S střed čtverce. Sestrojte obraz čtverce ve stejnolehlosti se středem S a koeficientem:

    (a) $\kappa = \frac{1}{2}$,

    (b) $\kappa = 2$,

    (c) $\kappa = -\frac{3}{4}$,

    (d) $\kappa = -2$. [1, 81] [Řešení]

10. Je dán pravidelný pětiúhelník *ABCDE* a bod *M'*, který leží uvnitř konvexního úhlu *AVE* (*V* je společný bod přímek *AB* a *ED*). Sestrojte pětiúhelník *A'B'C'D'E'*, který je obrazem daného pětiúhelníku ve stejnolehlosti se středem v bodě *V* tak, aby bod *M'* byl vnitřním bodem úsečky *A'E'*. [2, 166] [Řešení]

11. Sestrojte středy stejnolehlosti dvou rovnoběžných úseček *AB*, *CD* v případě, že délky úseček *AB* a *CD*

    (a) nejsou stejné,

    (b) jsou stejné. [1, 82] [Řešení]

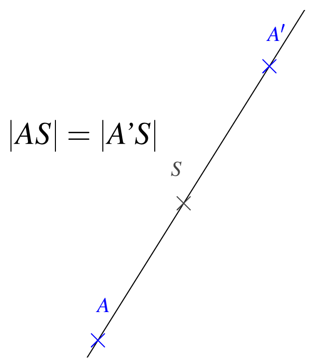
12. Sestrojte středy stejnolehlosti dvou úseček *KL* a *MN*, které leží na téže přímce. Úsečky *KL* a *MN*

    (a) nemají žádný společný bod,

    (b) mají společnou úsečkou *ML*. [1, 82] [Řešení]

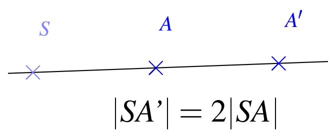
13. V obrázcích 13a, 13b, 13c, 13d, 13e, 13f určete střed stejnolehlosti a koeficient stejnolehlosti κ. Stejnolehlost zapište. [4, 86] [Řešení]

(a)



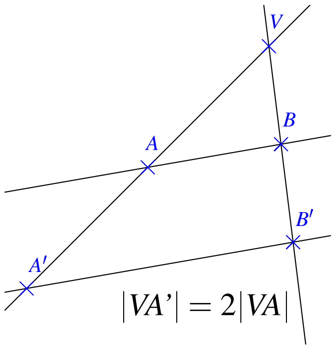
Obrázek 3.2

(b)



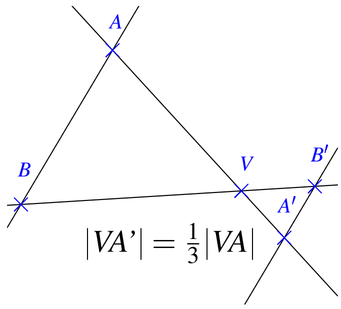
Obrázek 3.3

(c)



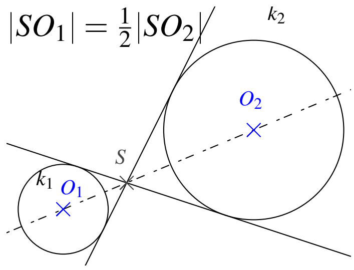
Obrázek 3.4

(d)



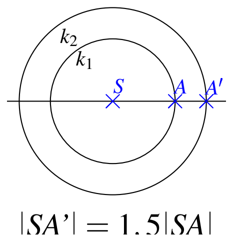
Obrázek 3.5

(e)



Obrázek 3.6

(f)



Obrázek 3.7

14. V soustavě souřadnic narýsujte dané útvary ve stejnolehlostech H_1 a H_2 se středem v počátku soustavy souřadnic O[0,0] a s koeficientem stejnolehlosti κ.

    (a) bod $A[1,5;3]$, $H_1(O,\kappa=2)$, $H_2(O,\kappa=-2)$,
    (b) bod $B[0;-3]$, $H_1(O,\kappa=0,5)$, $H_2(O,\kappa=-1)$,
    (c) úsečka KL, $K[1;2]$, $L[4;3]$, $H_1(O,\kappa=1,5)$, $H_2(O,\kappa=-0,5)$,
    (d) úsečka PQ, $P[3;0]$, $Q[0;-2]$, $H_1(O,\kappa=0,5)$, $H_2(O,\kappa=-3)$. [4, 87] [Řešení]

15. Je dána kružnice $k(S;4\,cm)$a bod $M\in k$. Sestrojte obraz kružnice k ve stejnolehlosti se středem v bodě M a koeficientem:

    (a) $\kappa=\frac{3}{4}$,
    (b) $\kappa=\frac{1}{2}$,
    (c) $\kappa=\frac{1}{4}$,
    (d) $\kappa=-\frac{1}{2}$. [1, 82] [Řešení]

16. Je dána kružnice $k(O;2\,cm)$. Sestrojte její obraz ve stejnolehlosti $H(S,\kappa)$:

    (a) S leží vně k, $\kappa=-\frac{3}{2}$,
    (b) $S\in k$, $\kappa=\sqrt{3}$,
    (c) S leží uvnitř k ($S\neq O$), $\kappa=-\frac{5}{4}$,
    (d) $S=O$, $\kappa=\frac{\sqrt{2}}{2}$. [2, 170] [Řešení]

17. Sestrojte středy stejnolehlosti dvou kružnic k_1, k_2, je-li dáno:

    (a) $k_1(O_1; 3\,cm)$, $k_2(O_2; 1\,cm)$, $|O_1O_2| = 6\,cm$,
    (b) $k_1(O_1; 3\,cm)$, $k_2(O_2; 2\,cm)$, $|O_1O_2| = 3{,}5\,cm$,
    (c) $k_1(O_1; 3\,cm)$, $k_2(O_2; 2\,cm)$, $|O_1O_2| = 1\,cm$,
    (d) $k_1(O_1; 3\,cm)$, $k_2(O_2; 2\,cm)$, $|O_1O_2| = 0{,}5\,cm$,
    (e) $k_1(O_1; 3\,cm)$, $k_2(O_2; 2\,cm)$, $|O_1O_2| = 0\,cm$,
    (f) $k_1(O_1; 3\,cm)$, $k_2(O_2; 3\,cm)$, $|O_1O_2| = 7\,cm$,
    (g) $k_1(O_1; 3\,cm)$, $k_2(O_2; 3\,cm)$, $|O_1O_2| = 6\,cm$,
    (h) $k_1(O_1; 3\,cm)$, $k_2(O_2; 3\,cm)$, $|O_1O_2| = 5\,cm$. [1, 82] [Řešení]

18. Jsou dány dvě kružnice $k_1(O_1; 4\,cm)$, $k_2(O_2; 1\,cm)$, $|O_1O_2| = 7\,cm$. Sestrojte středy stejnolehlosti S_1, S_2 daných kružnic. Označte S_1 vnější střed stejnolehlosti, S_2 vnitřní střed stejnolehlosti. Potom určete koeficienty stejnolehlosti v následujících případech:

    (a) střed stejnolehlosti je S_1 a stejnolehlost zobrazuje k_1 na k_2,
    (b) střed stejnolehlosti je S_1 a stejnolehlost zobrazuje k_2 na k_1,
    (c) střed stejnolehlosti je S_2 a stejnolehlost zobrazuje k_1 na k_2,
    (d) střed stejnolehlosti je S_2 a stejnolehlost zobrazuje k_2 na k_1. [1, 82] [Řešení]

19. Ke kružnicím k_1, k_2 z úlohy 17. sestrojte společné tečny. [2, 171] [Řešení]

20. Zvolte libovolný trojúhelník ABC, sestrojte jeho těžiště T a kružnici k trojúhelníku opsanou. Zobrazte kružnici k ve stejnolehlosti $H(T, -\frac{1}{2})$. Kterými body trojúhelníku ABC kružnice k' prochází? [2, 179] [Řešení]

21. Sestrojte rovnostranný trojúhelník o výšce $5{,}5\,cm$. [4, 87] [Řešení]

22. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno

    (a) $a : b = 4 : 7$, $\beta = 45°$, $t_c = 4{,}5\,cm$,
    (b) $a : b : c = 7 : 4 : 5$, $v_c = 4\,cm$,
    (c) $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$, $r = 5\,cm$, kde r je poloměr opsané kružnice,
    (d) $|AC| : |BC| = 5 : 4$, $\gamma = 60°$, $v_c = 5\,cm$. [2, 180] [Řešení]

23. Jsou dány kružnice $k_1(O_1; r_1)$, $k_2(O_2; r_2)$, $r_1 \neq r_2$. Kružnici k_1 vepište trojúhelník ABC a sestrojte k němu stejnolehlý trojúhelník $A'B'C'$ tak, aby jeho vrcholy ležely na kružnici k_2. [2, 171] [Řešení]

24. Sestrojte kosočtverec $ABCD$, je-li dáno $e : f = 3 : 4$, $a = 5{,}5\,cm$. [2, 180] [Řešení]

25. Sestrojte kosodélník $ABCD$, je-li dáno $a : b = 5 : 3$, $\alpha = 75°$, $f = 6\,cm$. [2, 180] [Řešení]

26. Do půlkružnice s poloměrem $3\,cm$ vepište obdélník $ABCD$ tak, aby jeho strana AB ležela na průměru a platí: $|AB| : |BC| = 3 : 4$. [2, 180] [Řešení]

27. Do trojúhelníku ABC ($a = 5\,cm$, $b = 6\,cm$, $c = 7\,cm$) vepište čtverec $KLMN$ tak, aby platilo $KL \subset AB$, $M \in BC$ a $N \in AC$. [1, 83] [Řešení]

28. V kružnici $k(S;4\,cm)$ vyznačte kruhovou úseč o výšce $2,5\,cm$. Krajní body základny úseče označte A, B. Potom do kruhové úseče vepište čtverec $KLMN$ tak, aby platilo $KL \subset AB$, $M \in k$ a $N \in k$. [1, 83] [Řešení]

29. Jsou dány dvě různoběžky a, b a kružnice $l(O;r)$ ležící uvnitř jednoho úhlu určeného přímkami a, b. Sestrojte kružnici, která se dotýká obou přímek a s kružnicí l má dotyk

    (a) vnitřní,

    (b) vnější. [2, 180] [Řešení]

30. Je dána kružnice $k(O;2,5\,cm)$ a přímka p, $|Op| = 4\,cm$. Na přímce p je dán bod T tak, že $|OT| = 4,5\,cm$. Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají kružnice k a přímky p v bodě T. [1, 82] [Řešení]

31. Je dán úhel AVB, $|\sphericalangle AVB| = 45^\circ$ a bod M, který leží na ose úhlu AVB a pro který platí $|VM| = 5\,cm$. Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají ramen úhlu a prochází bodem M. [1, 82] [Řešení]

32. Je dán úhel AVB, $|\sphericalangle AVB| = 45^\circ$ a uvnitř úhlu bod M tak, že vzdálenost M od $\rightarrow VB$ je $1,5\,cm$, vzdálenost M od $\rightarrow VA$ je $3\,cm$. Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají ramen úhlu a procházejí bodem M. [1, 82] [Řešení]

33. Je dána kružnice $k(S; r = 3,5\,cm)$ a bod M ($|SM| = 2\,cm$). Sestrojte všechny tětivy kružnice k, které procházejí bodem M a jsou bodem M děleny v poměru $2 : 5$. [2, 173] [Řešení]

34. Je dán bod M, přímka p a kružnice $k(S;3\,cm)$, $|Sp| = 4\,cm$, $|Mp| = 1\,cm$, $|MS| = 7\,cm$, body M, S leží v opačných polorovinách s hraniční přímkou p. Sestrojte všechny přímky XY tak, aby platilo: $X \in p, Y \in k, M \in XY$ a $|MY| = 2|MX|$. [2, 179] [Řešení]

35. Je dán konvexní úhel AVB a bod M, který leží uvnitř daného úhlu. Bodem M veďte přímku m, která protíná ramena VA, VB úhlu AVB po řadě v bodech X, Y a přitom platí: $|VX| : |VY| = 2 : 3$. [2, 179] [Řešení]

36. Bodem M uvnitř konvexního úhlu AVB veďte přímku tak, aby její úsek mezi rameny úhlu byl bodem M dělen v poměru $2 : 3$. [2, 40] [Řešení]

37. Je dán čtverec $ABCD$ ($|AB| = 5\,cm$) a bod M uvnitř čtverce ($M \in BD$, $|MB| = 2\,cm$). Sestrojte všechny úsečky XY, které mají krajní body X, Y na hranici čtverce tak, aby platilo $|MX| : |MY| = 4 : 3$. [2, 179] [Řešení]

38. Jsou dány dvě kružnice se stejným poloměrem $k_1(O_1;r)$, $k_2(O_2;r)$, které se protínají. Bod O je střed úsečky O_1O_2. Veďte bodem O přímku tak, aby její průsečík s kružnicemi k_1, k_2 byly krajními body tří shodných úseček. [2, 179] [Řešení]

39. Kružnice $k_1(O_1;4\,cm)$, $k_2(O_2;2,5\,cm)$, $|O_1O_2| = 3\,cm$ se protínají ve dvou bodech. Označte M jeden z těchto průsečíků. Sestrojte všechny úsečky XY, které procházejí bodem M a pro které platí, že $X \in k_1$, $Y \in k_2$ a bod M dělí úsečku XY v poměru $2:1$. [1, 82] [Řešení]

40. Jsou dány dvě kružnice $k_1(O_1;3,5\,cm)$, $k_2(O_2;2,5\,cm)$, $|O_1O_2| = 7\,cm$. Sestrojte všechny přímky p tak, aby obě kružnice k_1 i k_2 vytínaly na přímce p stejně dlouhé tětivy délky $4\,cm$. [1, 82] [Řešení]

41. Je dána kružnice $k(O;4,5\,cm)$ a bod M, $|OM| = 10\,cm$. Sestrojte přímku procházející bodem M tak, aby kružnici k protínala v bodech X, Y a aby dále platilo:

    (a) bod X leží mezi body M, Y a platí $|MX| : |XY| = 3:1$,

    (b) bod Y leží mezi body M, X a platí $|MX| : |XY| = 3:1$. [1, 82] [Řešení]

42. Je dána kružnice $k(O;4\,cm)$ a bod M, $|OM| = 9\,cm$. Sestrojte přímku procházející bodem M tak, aby kružnici k protínala v bodech X, Y a aby dále platilo $|XY| = |XM|$. [1, 82] [Řešení]

43. Jsou dány dvě přímky a, b, jejichž průsečík P leží mimo papír, na kterém rýsujeme. Dále je dán bod M. Sestrojte přímku PM, tj. spojte bod M s nedostupným průsečíkem P přímek a, b. [1, 84] [Řešení]

44. Je dán trojúhelník ABC. Vrchol C leží mimo papír, na kterém rýsujeme. Sestrojte kolmici z bodu C na stranu AB. [1, 84] [Řešení]

Kapitola 4

Řešení: Podobnost trojúhelníků

1. (a) ne (b) ano (c) ano

[Zadání]

2. (a) ne (b) ano

[Zadání]

3. rovnostranný nebo rovnoramenný [Zadání]

4. poměr odpovídajících si stran je stejný [Zadání]

5. (a)
   1. $\triangle ABC$
   2. $B'C'$; $|B'C'| = \frac{3}{2}|BC|$
   3. $\triangle A'B'C'(uSu) : S = B'C',$
      $u = \beta,$
      $u = \gamma$

   Úloha má dvě řešení při dané volbě úsečky $B'C'$. [Zadání]

   (b)
   1. $\triangle ABC$
   2. $A'A'_0$; $|A'A'_0| = 2v_a$
   3. a'; $a' \perp A'A'_0 \wedge A'_0 \in a'$
   4. B'; $|\measuredangle A'_0A'B'| = |\measuredangle A_0AB| \wedge B' \in a'$
   5. C'; $|\measuredangle A'_0A'C'| = |\measuredangle A_0AC| \wedge *$
      * $|\measuredangle ABC| < 90^\circ \wedge |\measuredangle ACB| < 90^\circ \Rightarrow C' \in \leftarrow A'_0B'$
      * $|\measuredangle ABC| > 90^\circ \vee |\measuredangle ACB| > 90^\circ \Rightarrow C' \in \rightarrow A'_0B'$
      * $|\measuredangle ABC| = 90^\circ \vee |\measuredangle ACB| = 90^\circ \Rightarrow B' = A'_0 \vee C' = A'_0$
   6. $\triangle A'B'C'$

   Úloha má dvě řešení při dané volbě úsečky $A'A'_0$. [Zadání]

(c)
1. $\triangle ABC$
2. S; S střed kružnice opsané $\triangle ABC$
3. $k'; k'(S', \frac{4}{5}r)$
4. $A'; A' \in k'$
5. $B'; B' \in k' \wedge |\measuredangle S'A'B'| = |\measuredangle SAB|$
6. $C'; C' \in k' \wedge |\measuredangle B'A'C'| = |\measuredangle BAC|$
7. $\triangle A'B'C'$

Úloha má dvě řešení při dané volbě bodu S' a A'. [Zadání]

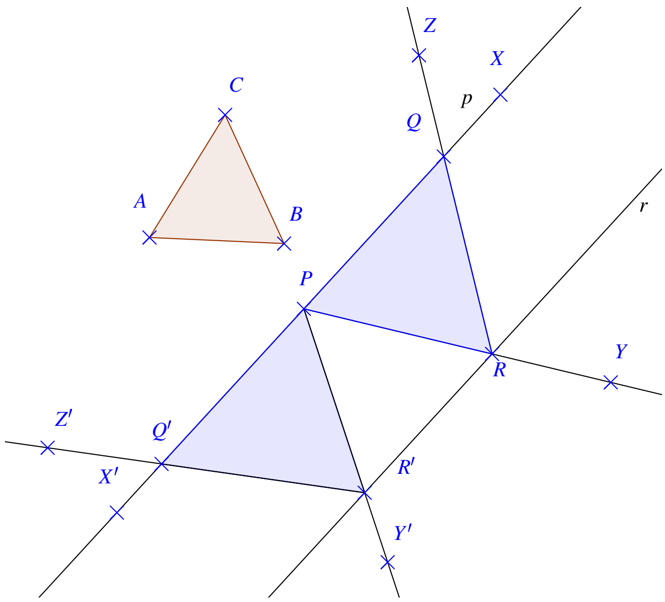
(d)
1. $\triangle ABC$
2. S; S je střed kružnice vepsané $\triangle ABC$
3. $k'; k'(S', \frac{3}{4}\rho)$
4. $S'_a; S'_a \in k'$
5. $S'_b; S'_b \in k' \wedge |\measuredangle S'_aS'S'_b| = |\measuredangle S_aSS_b|$
6. $S'_c; S'_c \in k' \wedge |\measuredangle S'_aS'_bS'_c| = |\measuredangle S_aS_bS_c|$
7. $a'; a' \perp S'S'_a$
8. $b'; b' \perp S'S'_b$
9. $c'; c' \perp S'S'_c$
10. $A'; A' \in b' \cap c'$
11. $B'; B' \in a' \cap c'$
12. $C'; C' \in b' \cap a'$
13. $\triangle A'B'C'$

Úloha má dvě řešení při dané volbě bodu S' a S'_a. [Zadání]

6. (a) věta(sss) (b) věta(uu) (c) věta(sus) (d) věta(Ssu)

[Zadání]

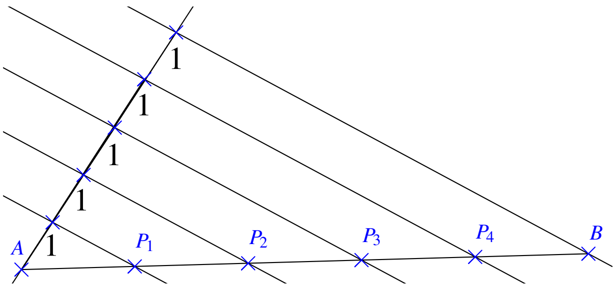
7.
1. $\triangle ABC$, p, r, P
2. $\rightarrow PY; |\measuredangle XPY| = |\measuredangle CAB|$
3. $R; R \in r \cap \rightarrow PY$
4. $\rightarrow RZ; |\measuredangle PRZ| = |\measuredangle ABC|$
5. $Q; Q \in p \cap \rightarrow RZ$
6. $\triangle PQR$



Obrázek 4.1

Úloha má 2 řešení. [Zadání]

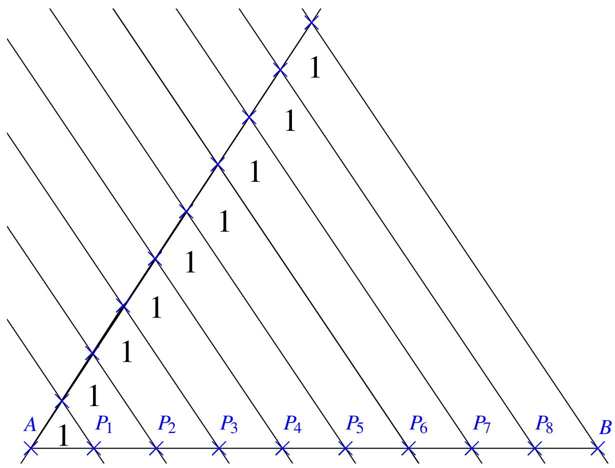
8. $20\,m$ [Zadání]
9. $14\,m$ [Zadání]
10. $162,5\,m$, $117,5\,m$, $180\,m$ [Zadání]
11. $1 : 50\,000$ [Zadání]
12. $|CE| = 5\,cm, |CF| = 3\,cm$ [Zadání]
13. zvolte sami [Zadání]
14. (a)



Obrázek 4.2

[Zadání]

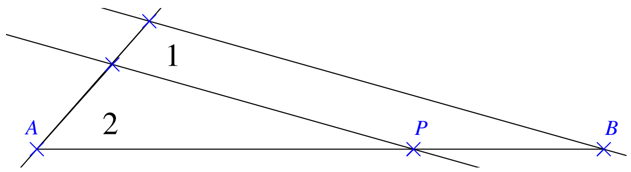
(b)



Obrázek 4.3

[Zadání]

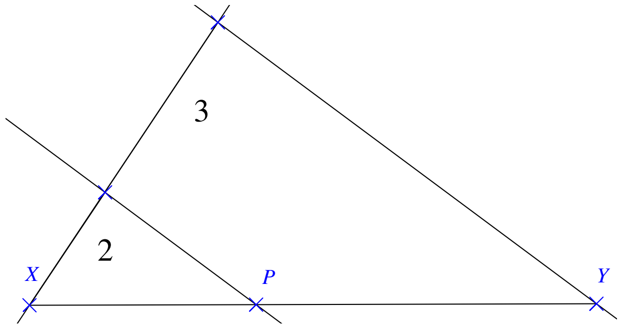
(c)



Obrázek 4.4

[Zadání]

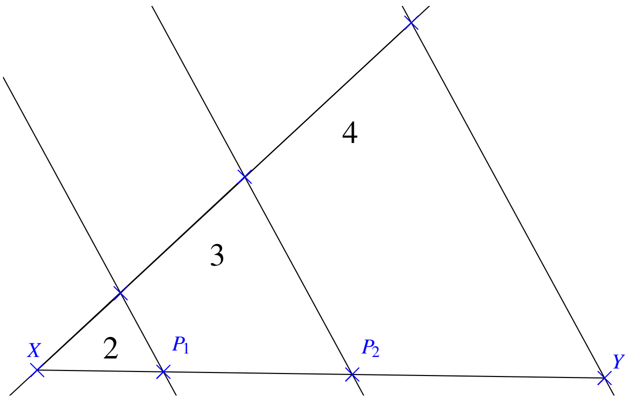
(d)



Obrázek 4.5

[Zadání]

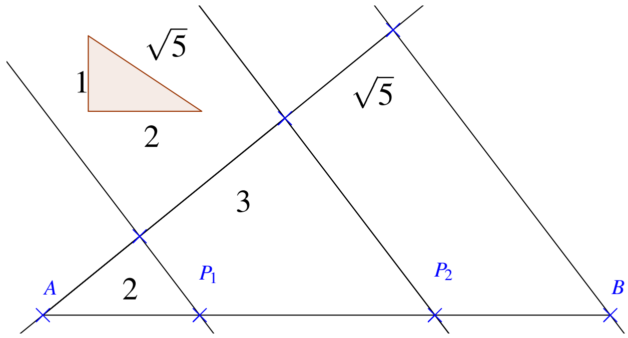
(e)



Obrázek 4.6

[Zadání]

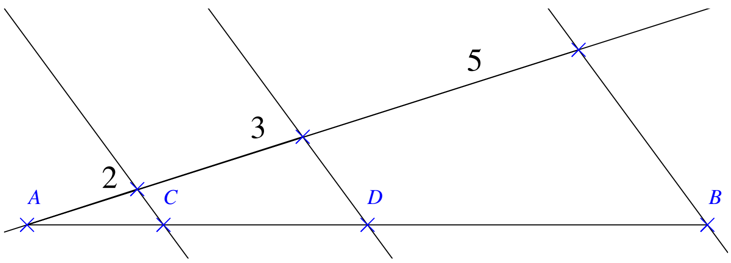
(f)



Obrázek 4.7

[Zadání]

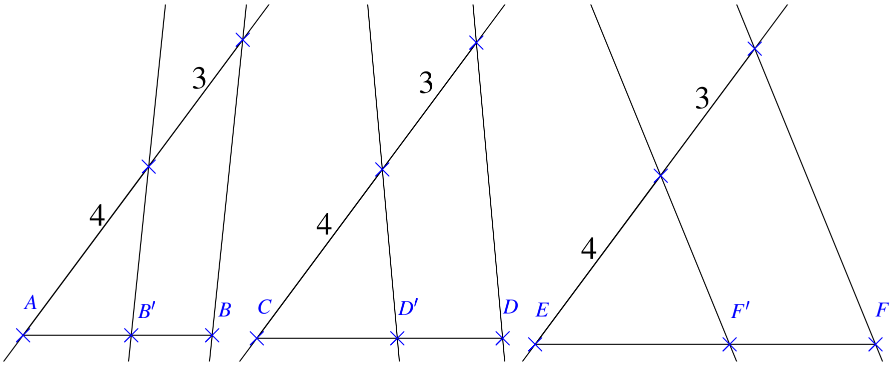
15.



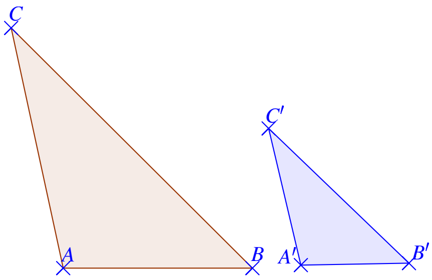
Obrázek 4.8

[Zadání]

16.



Obrázek 4.9

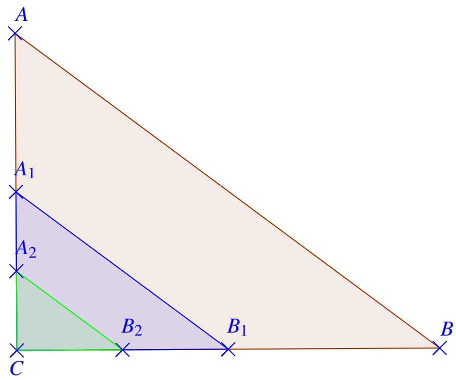


Obrázek 4.10

[Zadání]

17.

- $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$
  Podle věty sus, kde úhel je při vrcholu C.
- $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$
  Podle věty sus, kde úhel je při vrcholu C.
- $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1 \wedge \triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2 \Rightarrow$
  $\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A_2B_2C_2$



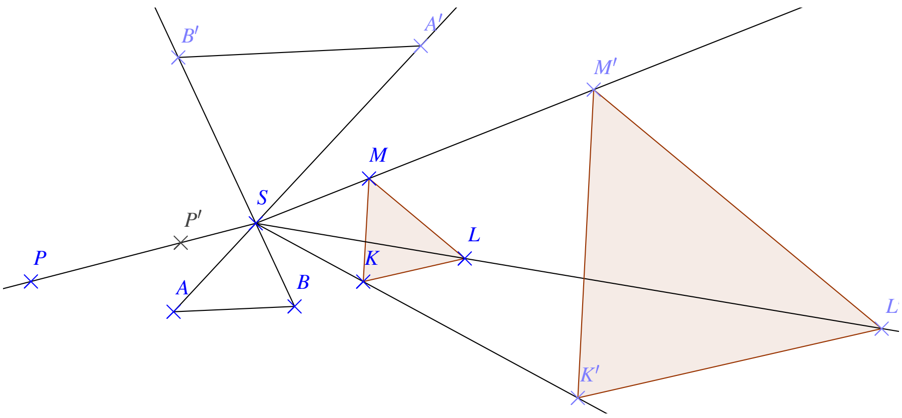
Obrázek 4.11

[Zadání]

Kapitola 5

Řešení: Stejnolehlost

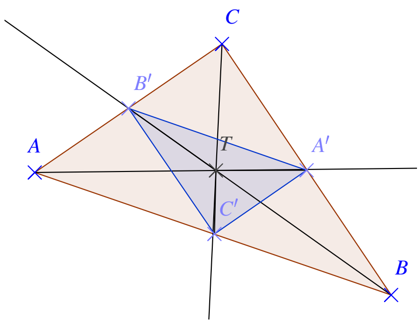
1.



Obrázek 5.1

[Zadání]

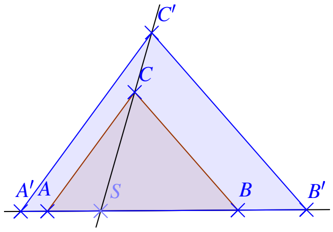
2.



Obrázek 5.2

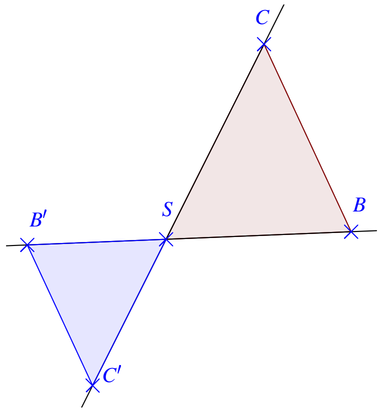
[Zadání]

3. (a)



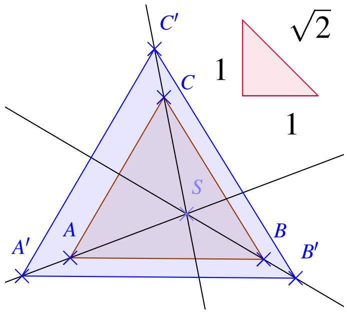
Obrázek 5.3

(b)



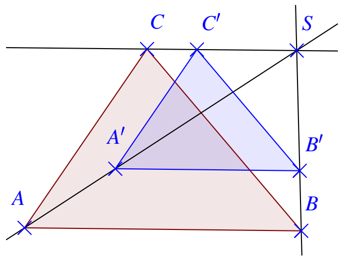
Obrázek 5.4

(c)



Obrázek 5.5

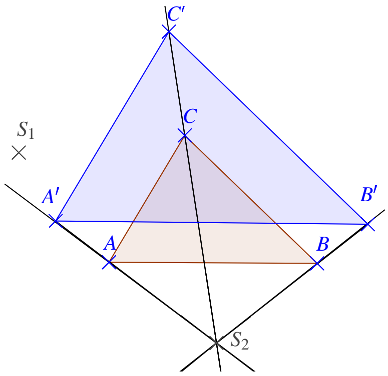
(d)



Obrázek 5.6

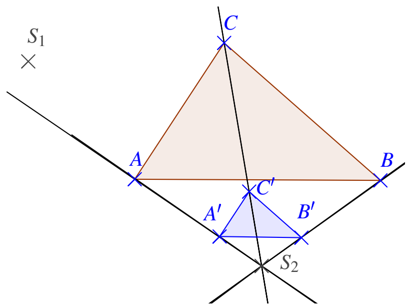
[Zadání]

4. (a)



Obrázek 5.7

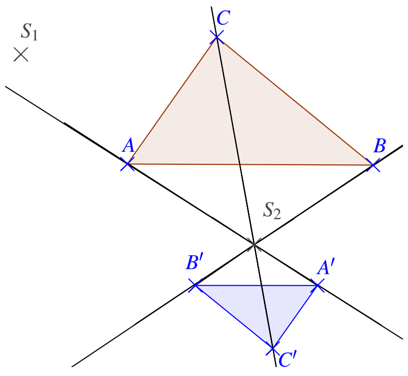
(b)



Obrázek 5.8

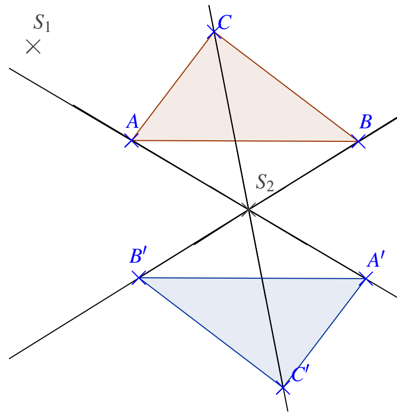
[Zadání]

(c)



Obrázek 5.9

(d)

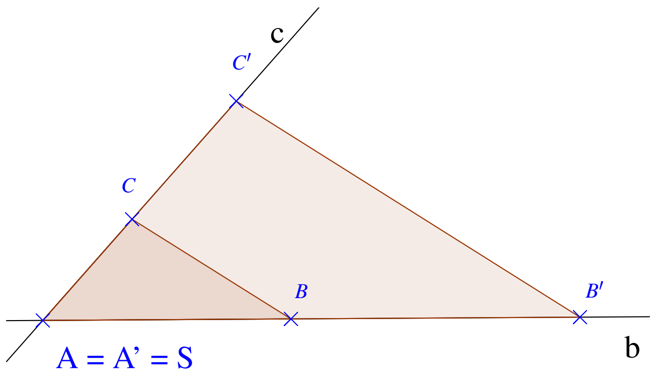


Obrázek 5.10

[Zadání]

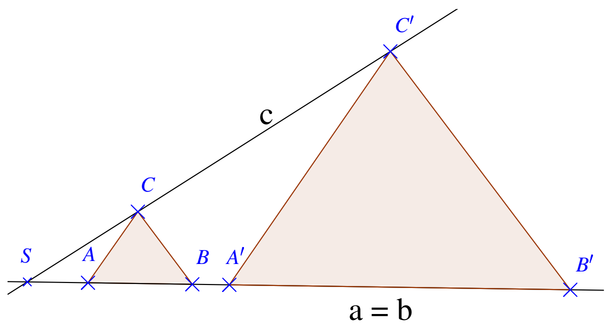
5.
   1. a; $a = AA'$
   2. b; $b = BB'$
   3. c; $c = CC'$
   4. S; $S \in a \cap b \cap c$

(a)



Obrázek 5.11

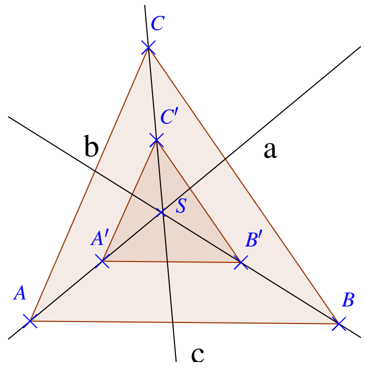
(b)



Obrázek 5.12

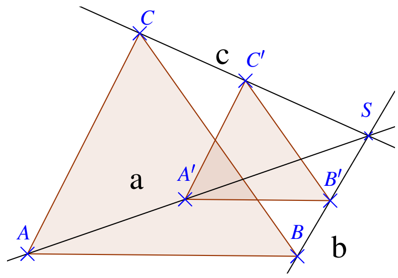
[Zadání]

(c)



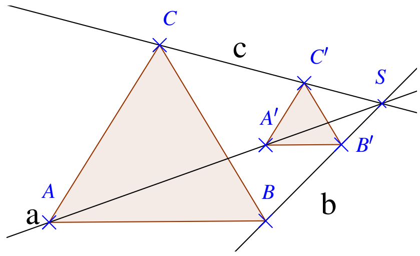
Obrázek 5.13

(d)



Obrázek 5.14

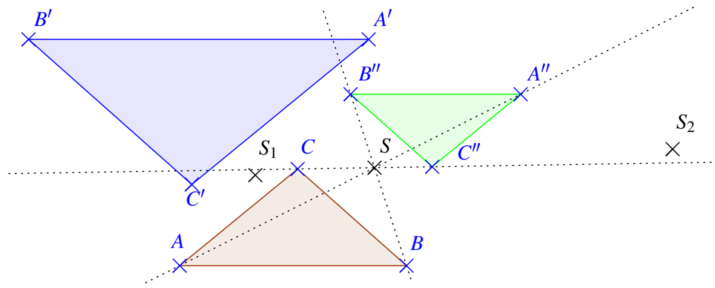
(e)



Obrázek 5.15

[Zadání]

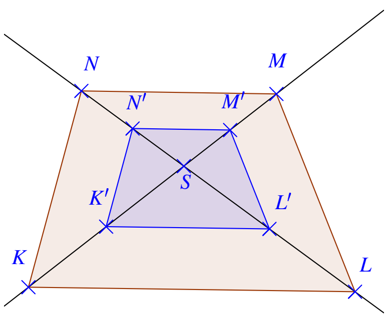
6. $Z = H(S, \kappa)$, $\kappa = -\frac{3}{2}.\frac{1}{2} = -\frac{3}{4}$



Obrázek 5.16

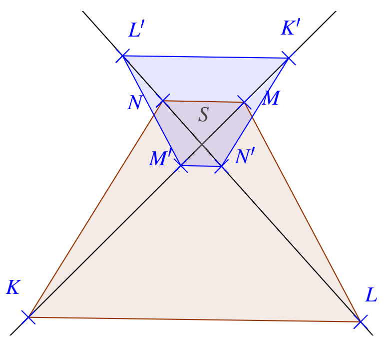
[Zadání]

7. (a)



Obrázek 5.17

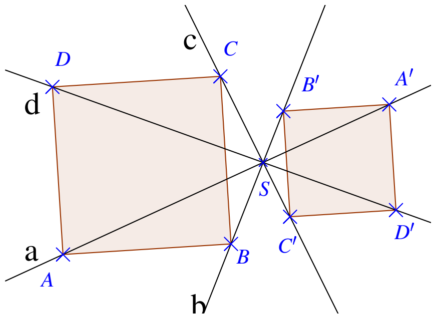
(b)



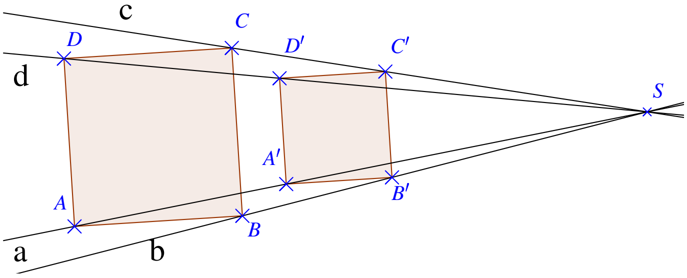
Obrázek 5.18

[Zadání]

8. 1. a; $a = AA'$
   2. b; $b = BB'$
   3. c; $c = CC'$
   4. d; $d = DD'$
   5. S; $S \in a \cap b \cap c \cap d$



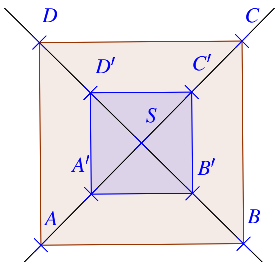
Obrázek 5.19



Obrázek 5.20

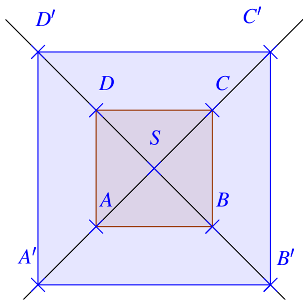
Úloha má dvě řešení. [Zadání]

9. (a)



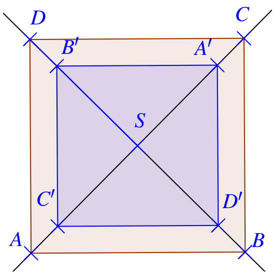
Obrázek 5.21

(b)



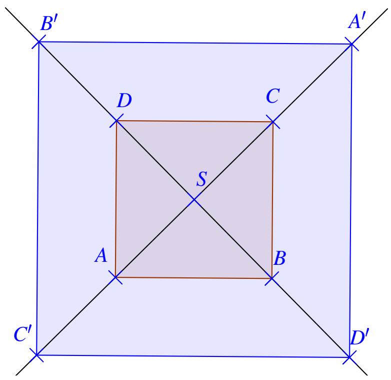
Obrázek 5.22

(c)



Obrázek 5.23

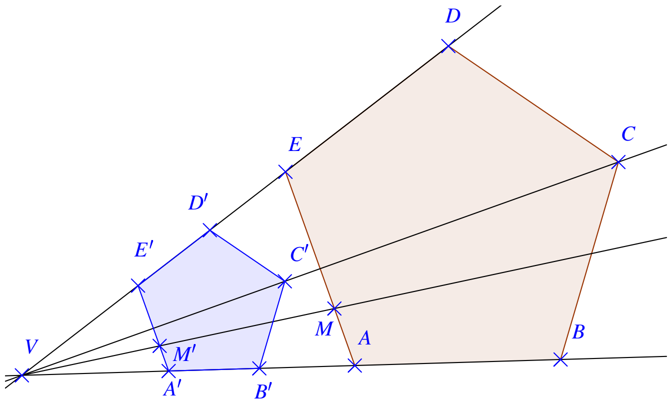
(d)



Obrázek 5.24

[Zadání]

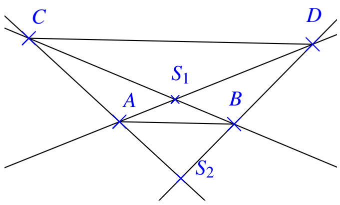
10. 1. *ABCDE, V, M'*
    2. $M; M \in AE \cap VM'$
    3. *A' B' C' D' E'*; $H(V, \frac{|VM'|}{|VM|}) : ABCDE \longrightarrow A'B'C'D'E'$



Obrázek 5.25

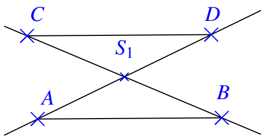
[Zadání]

11. (a)



Obrázek 5.26

(b)

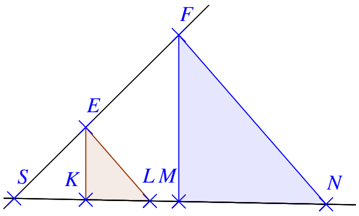


Obrázek 5.27

[Zadání]

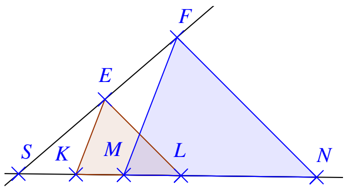
12. Pomocí podobných trojúhelníků nad těmito úsečkami.

(a)



Obrázek 5.28

(b)



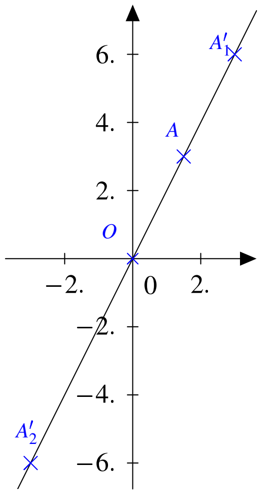
Obrázek 5.29

[Zadání]

13. (a) $H(S,-1) : A \longrightarrow A'$
    (b) $H(S,2) : A \longrightarrow A'$
    (c) $H(S,2) : AB \longrightarrow A'B'$
    (d) $H(S,-\frac{1}{3}) : AB \longrightarrow A'B'$
    (e) $H(S,-\frac{1}{2}) : k_2 \longrightarrow k_1$ nebo $H(S,-2) : k_1 \longrightarrow k_2$
    (f) $H(S,1.5) : k_1 \longrightarrow k_2$

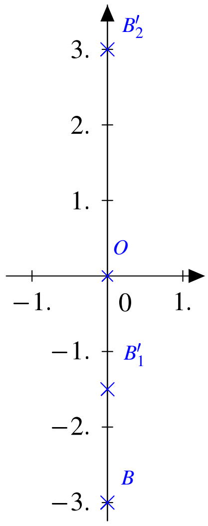
[Zadání]

14. (a)



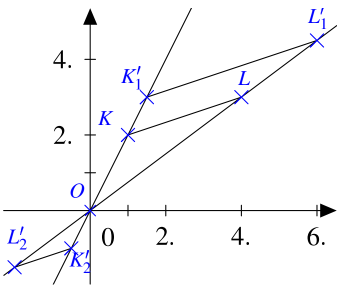
Obrázek 5.30

(b)



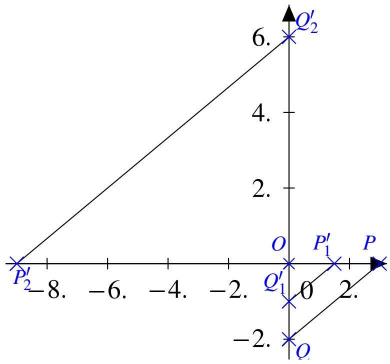
Obrázek 5.31

(c)



Obrázek 5.32

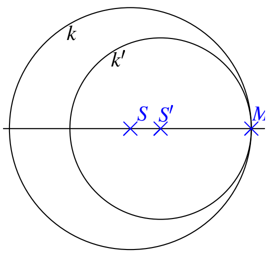
(d)



Obrázek 5.33

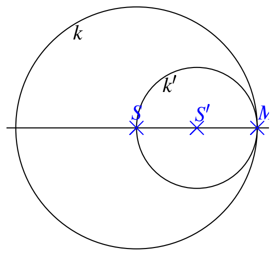
[Zadání]

15. (a)



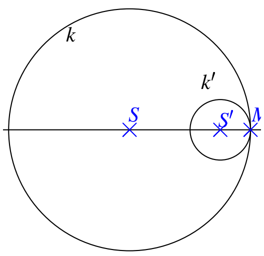
Obrázek 5.34

(b)



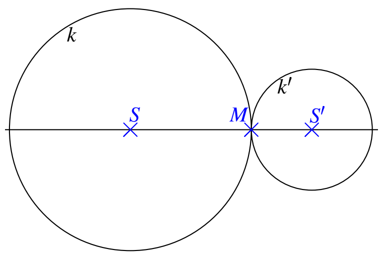
Obrázek 5.35

(c)



Obrázek 5.36

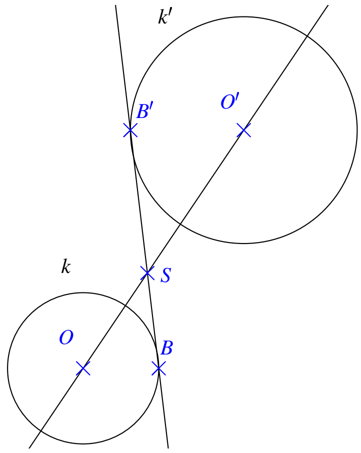
(d)



Obrázek 5.37

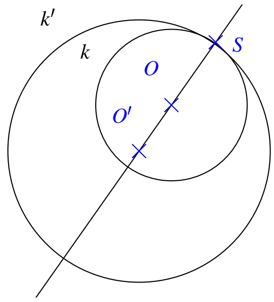
[Zadání]

16. (a)



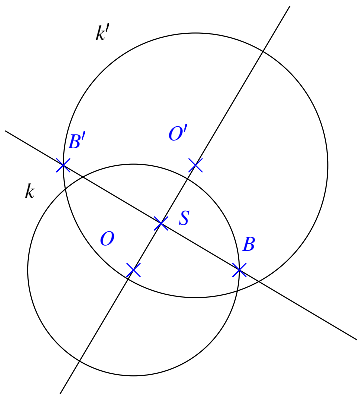
Obrázek 5.38

(b)



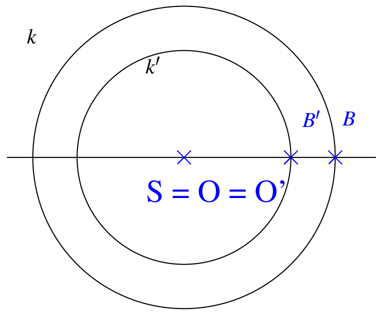
Obrázek 5.39

(c)



Obrázek 5.40

(d)

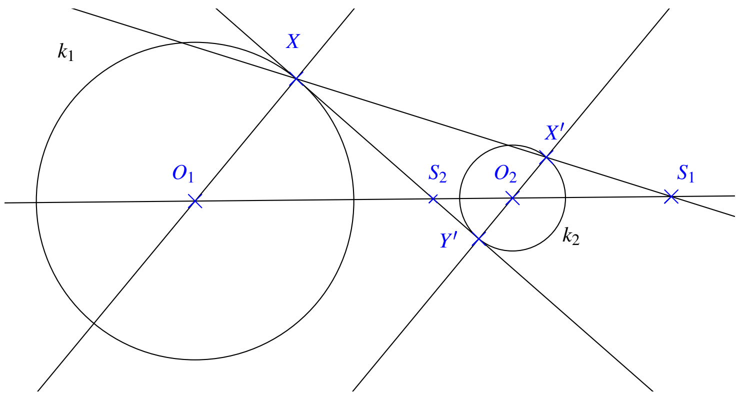


Obrázek 5.41

[Zadání]

17.
1. k_1, k_2
2. X; $X \in k_1$
3. p; $p \parallel XO_1 \wedge O_2 \in p$
4. X'; $X' \in k_2 \cap p$
5. S; $S \in O_1O_2 \cap XX'$

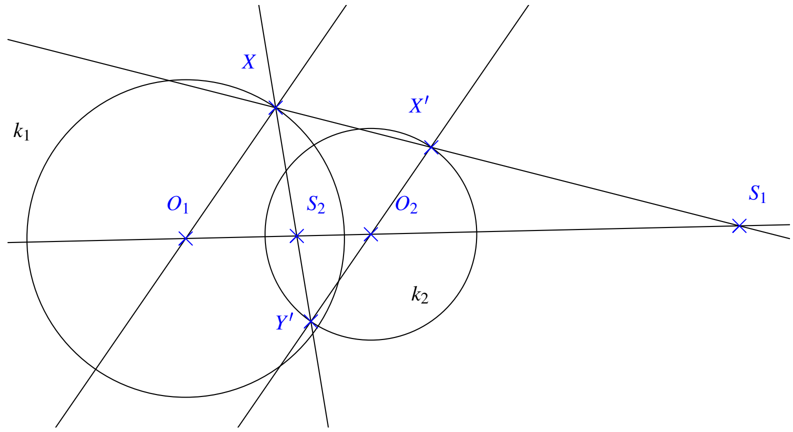
(a)



Obrázek 5.42

[Zadání]

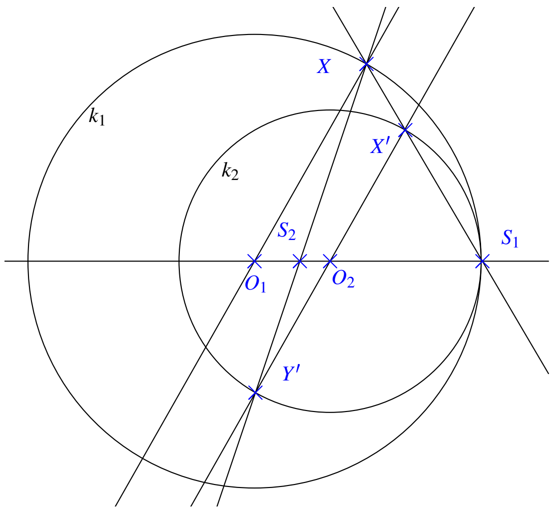
(b)



Obrázek 5.43

[Zadání]

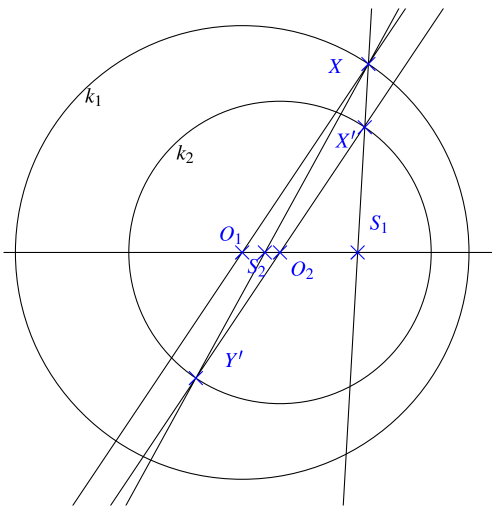
(c)



Obrázek 5.44

[Zadání]

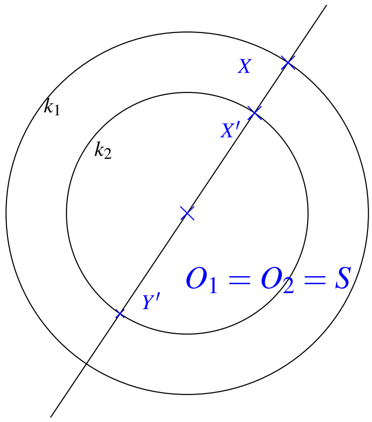
(d)



Obrázek 5.45

[Zadání]

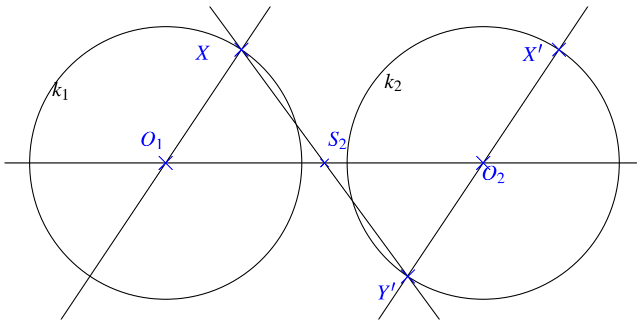
(e)



Obrázek 5.46

[Zadání]

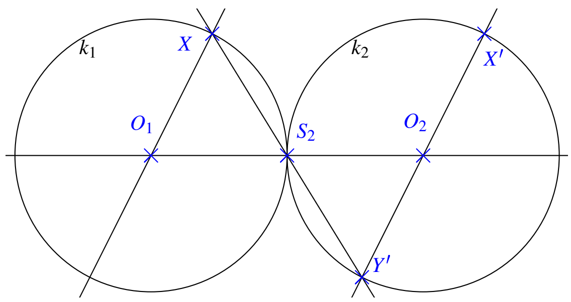
(f)



Obrázek 5.47

[Zadání]

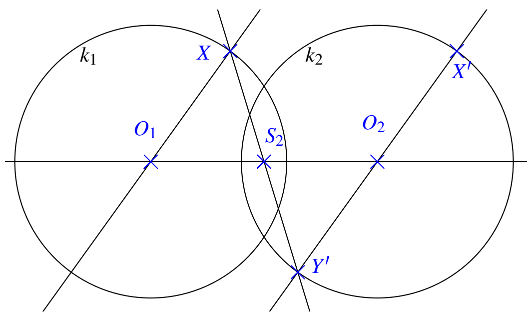
(g)



Obrázek 5.48

[Zadání]

(h)



Obrázek 5.49

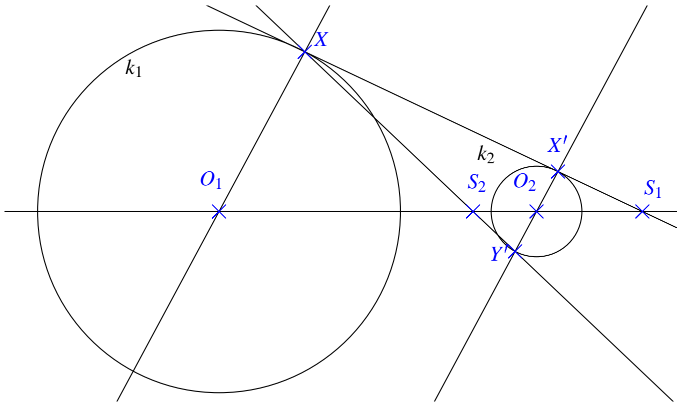
[Zadání]

18. (a) $H(S_1, \kappa) : k_1 \longrightarrow k_2; \kappa = \frac{|X'S_1|}{|XS_1|}$

(b) $H(S_1, \kappa) : k_2 \longrightarrow k_1; \kappa = \frac{|XS_1|}{|X'S_1|}$

(c) $H(S_2, \kappa) : k_1 \longrightarrow k_2; \kappa = -\frac{|Y'S_2|}{|XS_2|}$

(d) $H(S_2, \kappa) : k_2 \longrightarrow k_1; \kappa = -\frac{|XS_2|}{|Y'S_2|}$

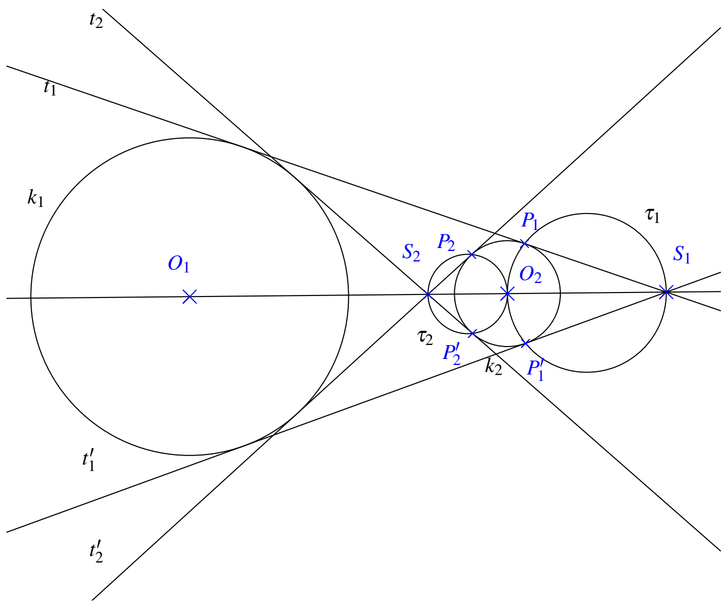


Obrázek 5.50

[Zadání]

19. 1. k_1, k_2
2. S; S je střed stejnolehlosti
3. τ_{SO_2}
4. P; $P \in k_2 \cap \tau_{SO_2}$
5. t; $t = PS$

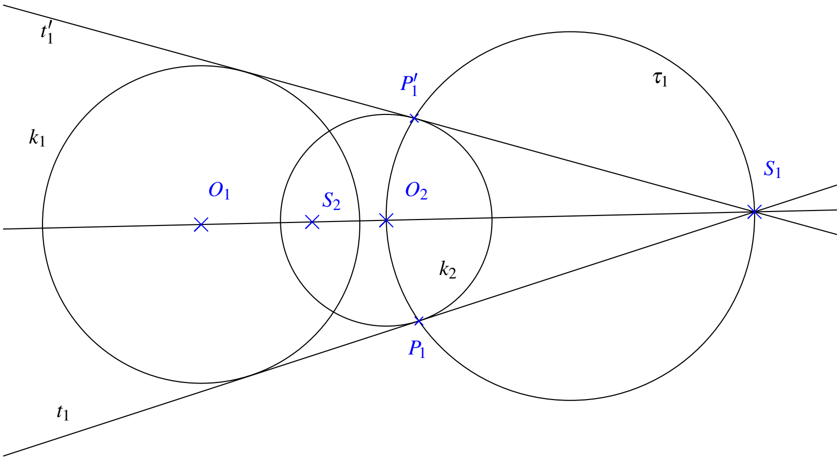
(a)



Obrázek 5.51

[Zadání]

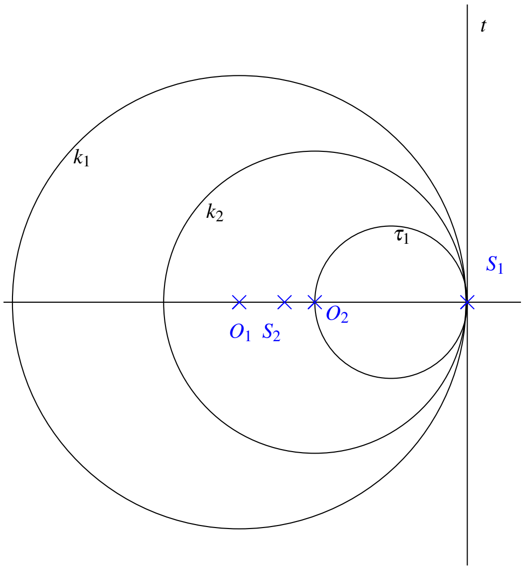
(b)



Obrázek 5.52

[Zadání]

(c)



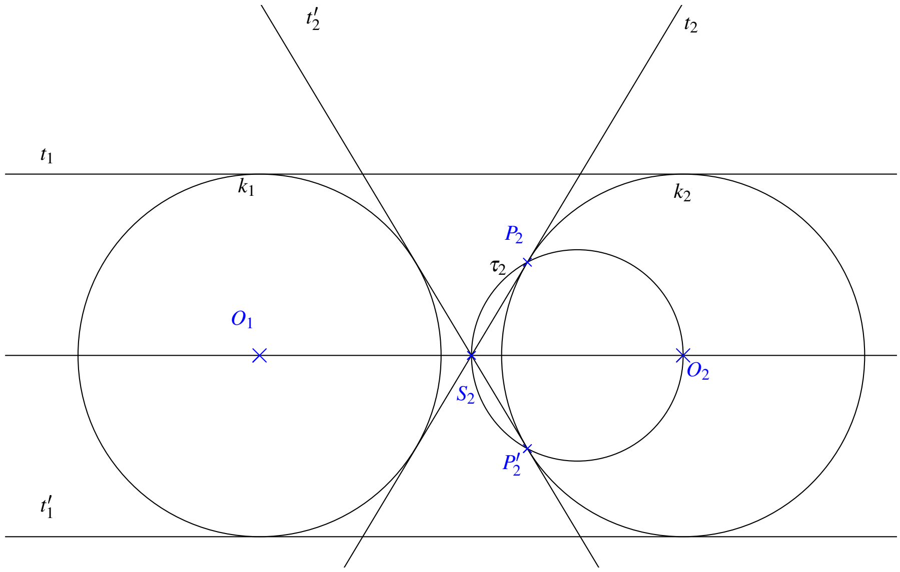
Obrázek 5.53

[Zadání]

(d) Nelze.

(e) Nelze.

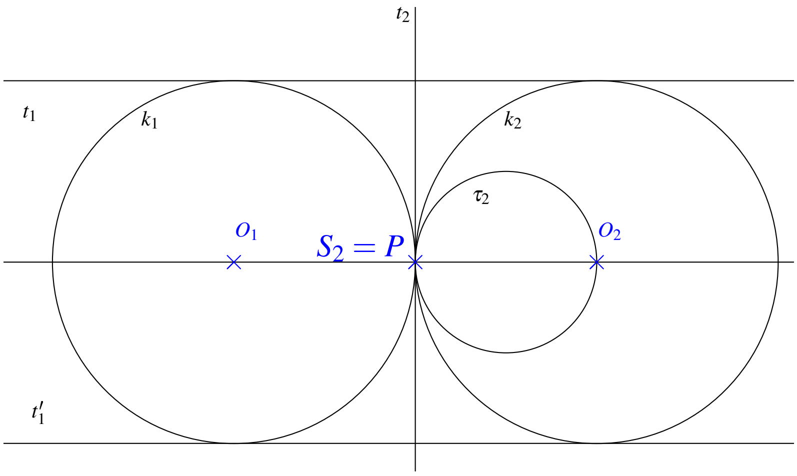
(f)



Obrázek 5.54

[Zadání]

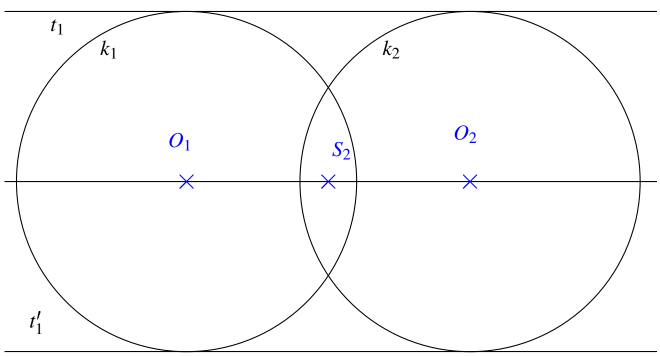
(g)



Obrázek 5.55

[Zadání]

(h)

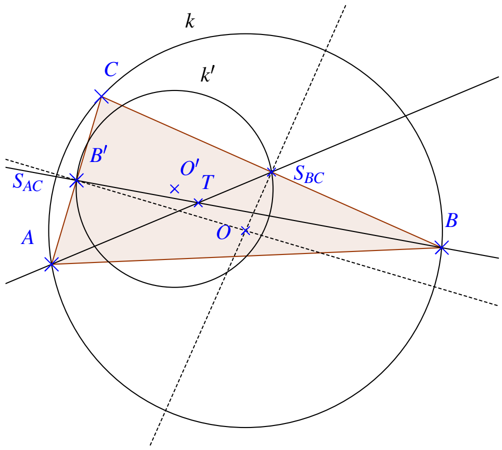


Obrázek 5.56

[Zadání]

20.
1. $\triangle ABC$
2. S_{AC}, S_{BC}; středy stran AC a BC
3. T; $T \in BS_{AC} \cap AS_{BC}$
4. o_{AC}, o_{BC}; osy stran AC a BC
5. O; $O \in o_{AC} \cap o_{BC}$
6. k; $k(O, |OB|)$
7. k'; $H(T, -\frac{1}{2}) : k \longrightarrow k'$

Kružnice k' prochází středy stran $\triangle ABC$.

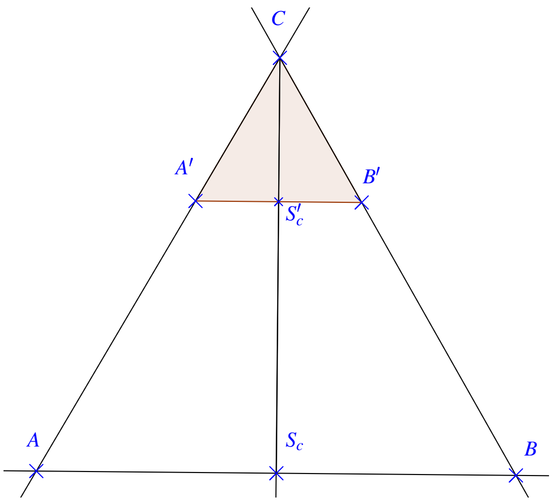


Obrázek 5.57

[Zadání]

21.
1. pomocný $\triangle A'B'C; |A'B'| = |B'C| = |A'C| = a$
2. $S'_c; S'_c$ je střed A'B'
3. $\triangle ABC; H(C, \frac{5{,}5}{|CS'_c|}) : \triangle A'B'C \longrightarrow \triangle ABC$

Úloha má jedno řešení.



Obrázek 5.58

[Zadání]

22. (a)
1. pomocný $\triangle A'B'C; |B'C| = 4\,cm, |A'C| = 7\,cm, |\measuredangle A'B'C| = 45^\circ$
2. $S'_c; S'_c$ je střed A'B'
3. $\triangle ABC; H(C, \frac{4{,}5}{|CS'_c|}) : \triangle A'B'C \longrightarrow \triangle ABC$

Úloha má jedno řešení.

[Zadání]

(b)
1. pomocný $\triangle A'B'C; |A'B'| = 5\,cm, |B'C| = 7\,cm, |A'C| = 4\,cm$
2. $v'_c; v'_c \perp c' \wedge C \in v'_c$
3. $C'_0; C'_0 \in c' \cap v'_c$
4. $\triangle ABC; H(C, \frac{4}{|CC'_0|}) : \triangle A'B'C \longrightarrow \triangle ABC$

Úloha má jedno řešení.

[Zadání]

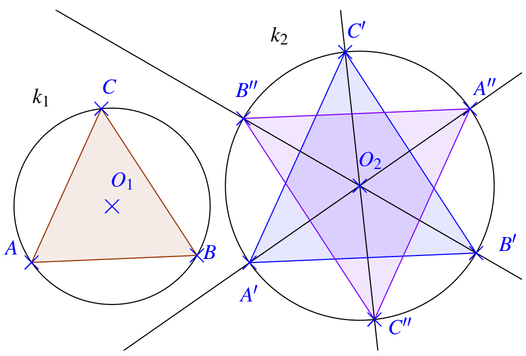
(c)
1. pomocný $\triangle A'B'C'; |\measuredangle B'A'C'| = 45°, |\measuredangle A'B'C'| = 60°$
2. $o_1; o_1$ osa strany $A'B'$
3. $o_2; o_2$ osa strany $B'C'$
4. $S; S \in o_1 \cap o_2$
5. $\triangle ABC; H(S, \frac{5}{|SA'|}) : \triangle A'B'C' \longrightarrow \triangle ABC$ Úloha má jedno řešení.

[Zadání]

(d)
1. pomocný $\triangle A'B'C; |A'C| = 5cm, |B'C| = 4cm, |\measuredangle A'CB'| = 60°$
2. $v'_c, v'_c \perp A'B' \wedge C \in v'_c$
3. $C'_1; C'_1 \in A'B' \cap v'_c$
4. $\triangle ABC; H(C, \frac{5}{|CC'_1|}) : \triangle A'B'C \longrightarrow \triangle ABC$ Úloha má jedno řešení.

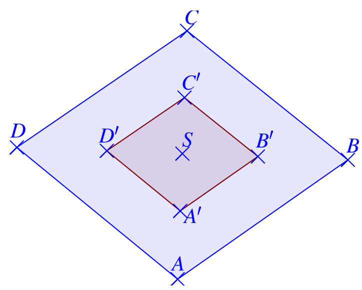
[Zadání]

23.
1. $k_1, k_2; k_1(O_1, r_1), k_2(O_2, r_2)$
2. $\triangle ABC; A \in k_1 \wedge B \in k_1 \wedge C \in k_1$
3. $a; a \parallel AO_1 \wedge O_2 \in a$
4. $b; b \parallel BO_1 \wedge O_2 \in b$
5. $c; c \parallel CO_1 \wedge O_2 \in c$
6. $A'; A' \in k_2 \cap a$
7. $B'; B' \in k_2 \cap b$
8. $C'; C' \in k_2 \cap c$
9. $\triangle A'B'C'$



Obrázek 5.59

Úloha má dvě řešení. [Zadání]



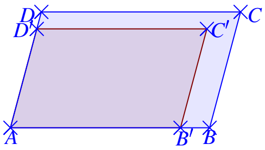
24.
1. pomocný $A'B'C'D'; |A'C'| = 3cm, |B'D'| = 4cm$
2. $S; S \in A'C' \cap B'D'$
3. $ABCD; H(S, \frac{5{,}5}{|A'B'|}) : A'B'C'D' \longrightarrow ABCD$

Obrázek 5.60

Úloha má jedno řešení [Zadání]

25. 1. pomocný $AB'C'D'$; $|AB'| = 5cm$, $|AD'| = 3cm$, $|\measuredangle D'AB'| = 75^\circ$
    2. $ABCD; H(A, \frac{6}{|D'B'|}) : AB'C'D' \longrightarrow ABCD$

Úloha má jedno řešení.

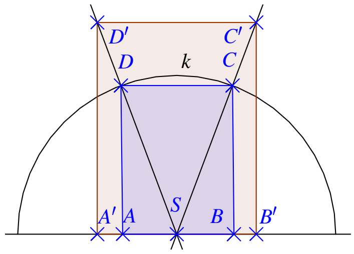


Obrázek 5.61

[Zadání]

26. 1. k
    2. pomocný $A'B'C'D'$; S se střed $A'B'$
    3. $C; C \in k \cap SC'$
    4. $ABCD; H(S, \frac{SC}{SC'}) : A'B'C'D' \longrightarrow ABCD$

Úloha má jedno řešení.

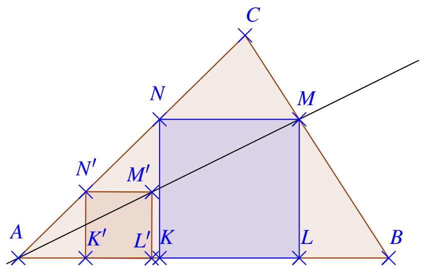


Obrázek 5.62

[Zadání]

27. 1. $\triangle ABC$
    2. pomocný $K'L'M'N'$; $K'L'M' \in \triangle ABC$
    3. $M; M \in \triangle ABC \cap AM'$
    4. $KLMN; H(A; \frac{AM}{AM'}) : K'L'M'N' \longrightarrow KLMN$

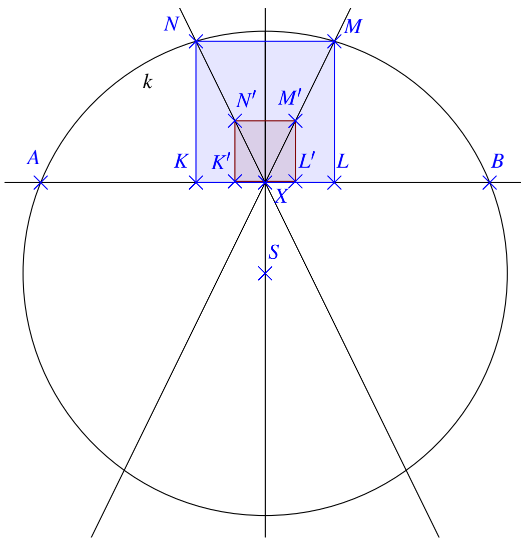
Úloha má jedno řešení.



Obrázek 5.63

[Zadání]

28.

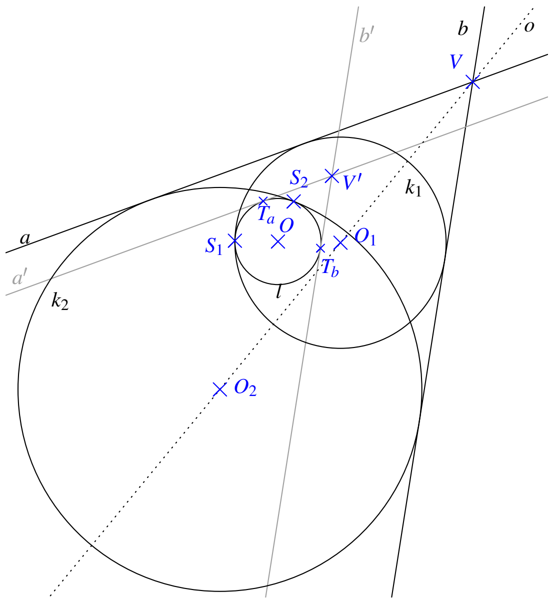


Obrázek 5.64

[Zadání]

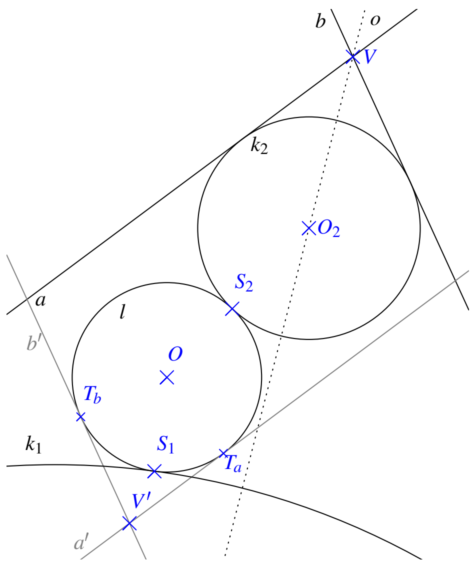
29.
1. a, b, l, V
2. $a'; a' \parallel a \wedge a'$ je tečna l
3. $b'; b' \parallel b \wedge b'$ je tečna l
4. $V'; V' \in a' \cap b'$
5. $o; o = \{X; |aX| = |bX|\}$
6. $S; S \in l \cap VV'$
7. $O'; O' \in o \cap OS$
8. $k; k(O', |SO'|)$

(a)



Obrázek 5.65

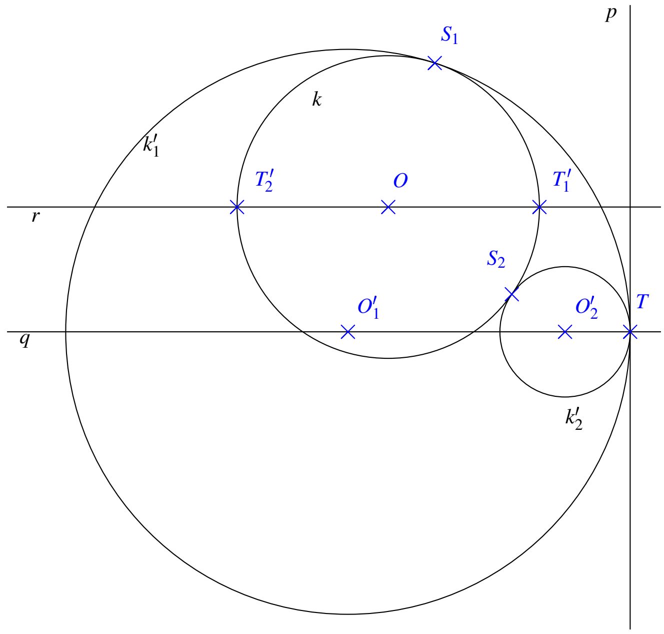
(b)



Obrázek 5.66

Podúloha a i b má dvě řešení. [Zadání]

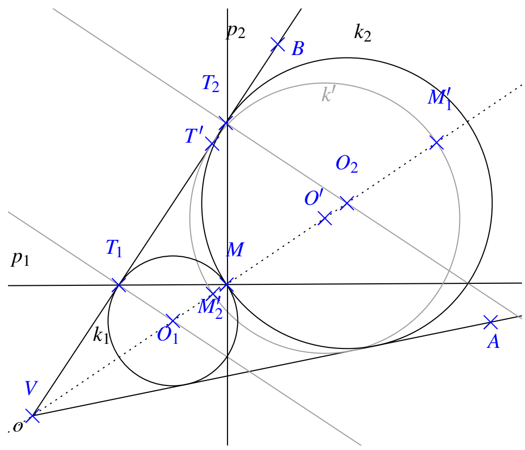
30. 1. p, k, T
2. $r; r \perp p \wedge O \in r$
3. $T'; T' \in k \cap r$
4. $S, S \in k \cap TT'$
5. $q; q \perp p \wedge T \in q$
6. $O'; O' \in q \cap OS$
7. $k'; k'(O', |O'T|)$



Obrázek 5.67

Úloha má dvě řešení. [Zadání]

31. 1. $\measuredangle AVB, M$
2. $O'; O' \in VM$
3. $T'; T' \in \rightarrow VB \wedge O'T' \perp \rightarrow VB$
4. $k'; k'(O', |O'T'|)$
5. $M'; M' \in k' \cap VM$
6. $p; p \parallel M'T' \wedge M \in p$
7. $T; T \in \rightarrow VB \cap p$
8. $O; O \in VM \wedge TO \perp \rightarrow VB$
9. $k; k(O, |OT|)$

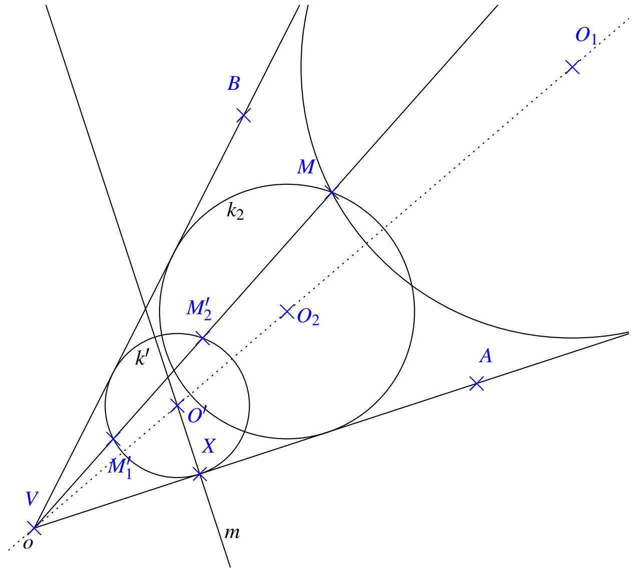


Obrázek 5.68

Úloha má dvě řešení. [Zadání]

32. 1. $\measuredangle AVB, M$
    2. $o; o = \{X; |aX| = |bX|\}$
    3. $A; A \in a$
    4. $m; m \perp a \wedge A \in m$
    5. $O'; O' \in m \cap o$
    6. $k'; k'(O', |O'A|)$
    7. $M'; M' \in k' \cap VM$
    8. $O; O \in o \wedge MO \parallel M'O'$

Úloha má dvě řešení.

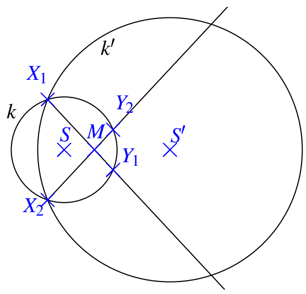


Obrázek 5.69

[Zadání]

33. 1. k, M
    2. $k'; H(M; -\frac{5}{2}) : k \longrightarrow k'$
    3. $X; X \in k \cap k'$
    4. $Y; Y \in k \cap \rightarrow XM$
    5. XY

Úloha má dvě řešení.

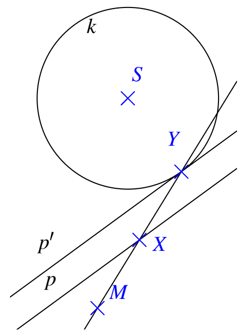


Obrázek 5.70

[Zadání]

34. 1. k, p, M
    2. $p'; H(M, 2) : p \longrightarrow p'$
    3. $Y; Y \in p' \cap k$
    4. $X; X \in p \cap \rightarrow MY$
    5. XY

Úloha má jedno řešení.



Obrázek 5.71

[Zadání]

35. 1. $\measuredangle AVB, M$

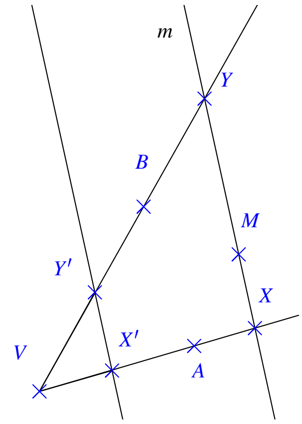
2. $X'; X' \in \rightarrow VA \wedge |VX'| = 2cm$

3. $Y'; Y' \in \rightarrow VB \wedge |VY'| = 3cm$

4. $m; m \parallel X'Y' \wedge M \in m$

5. $X; X \in \rightarrow VA \cap m$

6. $Y; Y \in \rightarrow VB \cap m$



Obrázek 5.72

Úloha má jedno řešení.

[Zadání]

36. 1. $\measuredangle AVB, M$

2. $\rightarrow V'A'; H(M; -\frac{2}{3}) : \rightarrow VA \longrightarrow \rightarrow V'A'$

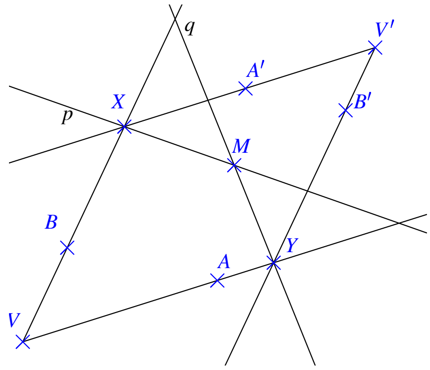
3. $X; X \in \rightarrow V'A' \cap \rightarrow VB$

4. $\rightarrow V'B'; H(M; -\frac{2}{3}) : \rightarrow VB \longrightarrow \rightarrow V'B'$

5. $Y; Y \in \rightarrow V'B' \cap \rightarrow VA$

6. $p; p = MX$

7. $q; q = MY$



Obrázek 5.73

Úloha má dvě řešení.

[Zadání]

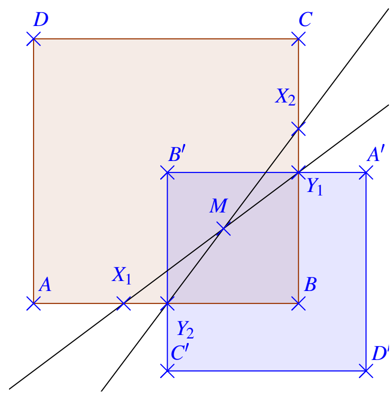
37. 1. $ABCD,\ M$

2. $A'B'C'D'; H(M; -\frac{3}{4}) : ABCD \longrightarrow A'B'C'D'$

3. $Y; Y \in ABCD \cap A'B'C'D'$

4. $X; X \in ABCD \cap \rightarrow YM$

5. XY



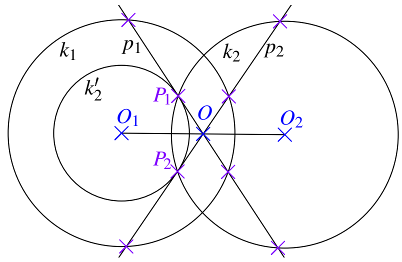
Obrázek 5.74

Úloha má dvě řešení.

[Zadání]

38.
1. k_1, k_2, O
2. $k_2'; H(O, -\frac{1}{3}) : k_2 \longrightarrow k_2'$
3. $P; P \in k_1 \cap k_2'$
4. $p; p = PO$

Úloha má dvě řešení.

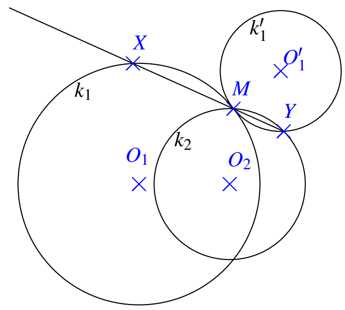


Obrázek 5.75

[Zadání]

39.
1. k_1, k_2, M
2. $k_1'; H(M, -\frac{1}{2}) : k_1 \longrightarrow k_1'$
3. $Y; Y \in k_2 \cap k_1'$
4. $X; X \in k_1 \cap \rightarrow YM$
5. XY

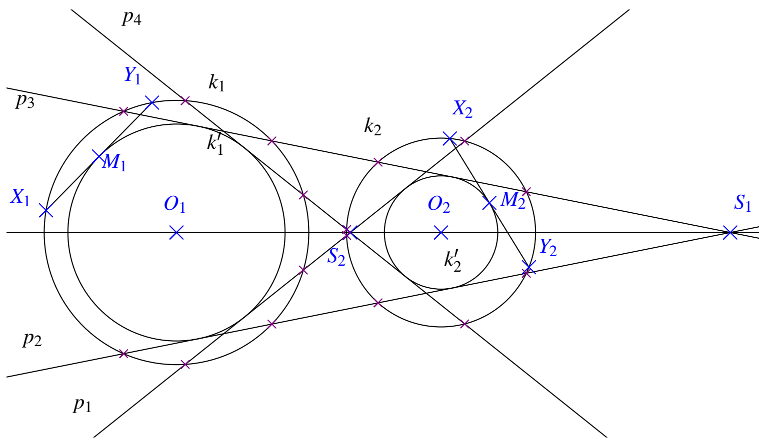
Úloha má jedno řešení.



Obrázek 5.76

[Zadání]

40.
1. k_1, k_2
2. $X_1Y_1; X_1 \in k_1 \wedge Y_1 \in k_1 \wedge |X_1Y_1| = 4cm$
3. $M_1; M_1 \in X_1Y_1 \wedge |M_1X_1| = |M_1Y_1|$
4. $k_1'; k_1'(O_1; |O_1M_1|)$
5. $X_2Y_2; X_2 \in k_2 \wedge Y_2 \in k_2 \wedge |X_2Y_2| = 4cm$
6. $M_2; M_2 \in X_2Y_2 \wedge |M_2X_2| = |M_2Y_2|$
7. $k_2'; k_2'(O_12; |O_2M_2|)$
8. S; S je střed stejnolehlosti k_1', k_2'
9. p; p je tečna k_1' $\wedge$ tečna k_2' $\wedge$ $S \in p$



Obrázek 5.77

Úloha má 4 řešení.

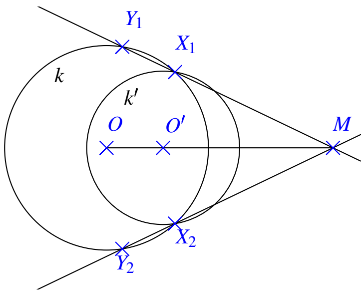
[Zadání]

41. (a) $|MX| = 3|XY|, |MY| = |MX| + |XY| = 4|XY|$

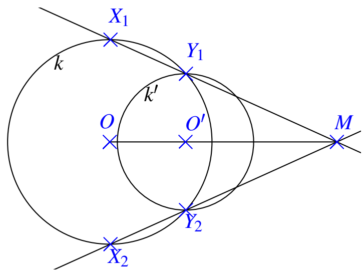
    1. k, M
    2. $k'; H(M, \frac{3}{4}) : k \longrightarrow k'$
    3. $X; X \in k \cap k'$
    4. $Y; Y \in k \cap \rightarrow MX$
    5. XY

    (b) $|MX| = 3|XY|, |MY| = |MX| - |XY| = 2|XY|$

    1. k, M
    2. $k'; H(M, \frac{2}{3}) : k \longrightarrow k'$
    3. $Y; Y \in k \cap k'$
    4. $X; X \in k \cap \rightarrow MY$
    5. XY



Obrázek 5.78



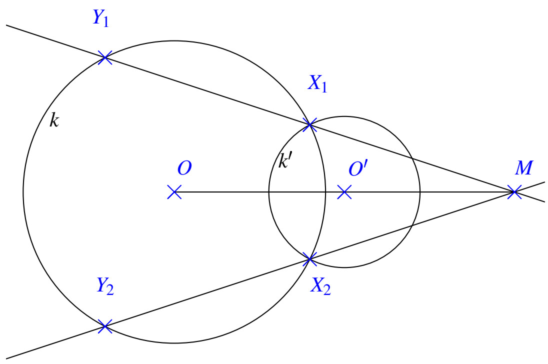
Obrázek 5.79

Podúloha *a* i *b* má dvě řešení.

[Zadání]

42. $|MX| = 1|XY|$
    $|MY| = |MX| + |XY| = 2|MX|$

    1. k, M
    2. $k'; H(M, \frac{1}{2}) : k \longrightarrow k'$
    3. $X; X \in k \cap k'$
    4. $Y; Y \in k \cap \rightarrow MX$
    5. XY

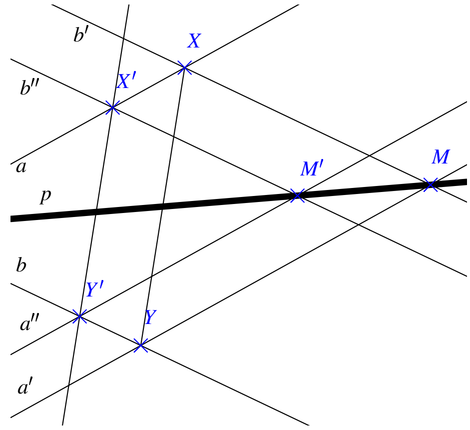


Obrázek 5.80

Úloha má dvě řešení.

[Zadání]

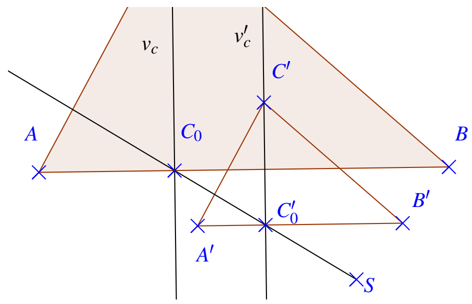
43.
1. a, b, M
2. $a'; a' \parallel a \wedge M \in a'$
3. $b'; b' \parallel b \wedge M \in b'$
4. $X, Y; X \in a \cap b', Y \in b \cap a'$
5. $X'Y'; X'Y' \parallel XY \wedge X' \in a, Y' \in b$
6. $a''; a'' \parallel a \wedge X' \in a''$
7. $b''; b'' \parallel b \wedge Y' \in b''$
8. $M'; M' \in a'' \cap b''$
9. $p; p = MM'$



Obrázek 5.81

[Zadání]

44. Pomocí stejnolehlosti se středem S a libovolným koeficientem κ
1. $\triangle ABC$
2. S; S libovolný
3. $A'B'C'; H(S, \frac{1}{2}) : ABC \longrightarrow A'B'C'$
4. $v_c'; v_c' \perp A'B' \wedge C' \in v_c'$
5. $C_0'; C_0' \in A'B' \cap v_c'$
6. $C_0; H^{-1}(S, \frac{1}{2}) : C_0' \longrightarrow C_0$
7. $v_c; v_c \perp AB \wedge C_0 \in v_c$



Obrázek 5.82

[Zadání]

Závěr

Jak už bylo řečeno, práce obsahuje teorii, příklady a jejich řešení. Výběr úloh je především konstrukční, ale najdou se tu i výpočetní úlohy nebo úlohy se slovní odpovědí.

Příklady jsou brány ze středoškolských učebnic, takže budu velmi ráda pokud tato práce poslouží jako doplňkový materiál pro žáky i pro vyučující.

Díky této práci jsem si nejen prohloubila znalosti planimetrie, především podobného zobrazení, ale také práci s LaTeXem a GeoGebrou.

Seznam použité literatury

[1] PETÁKOVÁ, Jindra. *Matematika - příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vydání. Praha: Prometheus, 1998, 287 s. učebnice prostřední školy. ISBN 80-719-6099-3.

[2] POMYKALOVÁ, Eva. *Matematika pro gymnázia: planimetrie*. 4. upravené vydání. Praha: Prometheus, 2000, 206 s. Učebnice pro střední školy. ISBN 80-719-6174-4.

[3] MOLNÁR, Josef. *Planimetrie*. 1. vydání. Olomouc: Univerzita Palackého, 2001, 128 s. ISBN 80-244-0370-6.

[4] HUDCOVÁ, Milada a KUBÍČKOVÁ, Libuše. *Sbírka úloh z matematiky pro střední odborná učiliště a střední odborné školy*. 3. upravené vydání. Praha: Prometheus, 2015, 388 s. ISBN 978-80-7196-344-8