Kvadratické nerovnice [1]

Definice. Kvadratickou nerovnicí rozumíme nerovnici tvaru

$$ax^2 + bx + c\,\mu\,0\,, \quad \text{kde } \mu \in \{<;>;\leq;\geq\}\,,\ a \neq 0,\ a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Čísla a, b , c nazýváme koeficienty kvadratické nerovnice, výrazy ax^2, bx a c nazýváme členy této nerovnice, a to po řadě kvadratický, lineární a absolutní.

Řešení kvadratické nerovnice. Vhodné je nejprve vyřešit příslušnou kvadratickou rovnici $ax^2+bx+c = 0$. Již víme, že nastávají 3 případy:

1. Jestliže $D < 0$, rovnice v $\mathbb{R}$ nemá žádné řešení. Výraz $ax^2 + bx + c$ tedy nemá žádný nulový bod. Znamená to, že pro všechna $x \in \mathbb{R}$ je buď kladný, nebo záporný, tj.

   $$ax^2 + bx + c > 0\,,\ \text{nebo } ax^2 + bx + c < 0\,.$$

   To, která z variant nastává, poznáme podle znaménka koeficientu a. Platí

   $$a > 0 \quad \Leftrightarrow \quad ax^2 + bx + c > 0 \qquad \Big(\text{a podobně } a < 0 \quad \Leftrightarrow \quad ax^2 + bx + c < 0\Big)\,.$$

   U následujících příkladů si sami ověřte, že všechny rovnice příslušné uvažovaným nerovnicím mají záporné diskriminanty:

   a) Nerovnice
   $$3x^2 + 4x + 2 \geq 0$$
   má množinu kořenů $K = \mathbb{R}$, neboť $a = 3 > 0$, takže pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí $3x^2 + 4x + 2 > 0$.

   b) Nerovnice
   $$2x^2 - 5x + 6 \leq 0$$
   má množinu kořenů $K = \emptyset$, neboť $a = 2 > 0$, takže pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí $2x^2 - 5x + 6 > 0$.

   c) Nerovnice
   $$-4x^2 + 6x - 3 > 0$$
   má množinu kořenů $K = \emptyset$, neboť $a = -4 < 0$, takže pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí $-4x^2+6x-3 < 0$.

   d) Nerovnice
   $$-5x^2 + 8x - 4 < 0 \quad \text{i} \quad -5x^2 + 8x - 4 \leq 0$$
   mají množinu kořenů $K = \mathbb{R}$, neboť $a = -5 < 0$, takže pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí $-5x^2+8x-4 < 0$.

2. Pokud $D = 0$, rovnice tedy má 1 (tzv. dvojnásobný) kořen $x_1 = x_2$. Výraz $ax^2 + bx + c$ tedy má právě jeden nulový bod x_1. Znamená to, že pro všechna $x \in \mathbb{R}$, $x \neq x_1$ je buď kladný, nebo záporný, tj.

   $$ax^2 + bx + c > 0\,,\ \text{nebo } ax^2 + bx + c < 0\,.$$

   To, která z variant nastává, opět poznáme podle znaménka koeficientu a. Pro všechna $x \in \mathbb{R}$, $x \neq x_1$ tedy platí

   $$a > 0 \quad \Leftrightarrow \quad ax^2 + bx + c > 0 \qquad \Big(\text{a podobně } a < 0 \quad \Leftrightarrow \quad ax^2 + bx + c < 0\Big)\,.$$

   U následujících příkladů si sami rozmyslete, že všechny rovnice příslušné uvažovaným nerovnicím mají diskriminanty rovné nule:

   a) Nerovnice
   $$x^2 + 4x + 4 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x + 2)^2 \geq 0$$
   má množinu kořenů $K = \mathbb{R}$, neboť jakýkoliv kvadrát je nezáporný.

[1] Případné náměty k tomuto textu prosím adresujte na e-mail akob@jaroska.cz. Děkuji Aleš Kobza (autor materiálu).

b) Nerovnice

$$2x^2 - 12x + 18 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\,(x-3)^2 > 0$$

má množinu kořenů $K = \mathbb{R} - \{3\}$, neboť výraz $(x-3)^2$ je nulový právě tehdy, když $x = 3$ a ve všech ostatních případech je kladný.

c) Nerovnice

$$-3x^2 + 6x - 3 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -3\,(x-1)^2 \geq 0$$

má množinu kořenů $K = \{1\}$, neboť výraz $-3\,(x-1)^2$ je nulový právě tehdy, když $x = 1$ a ve všech ostatních případech je záporný.

d) Nerovnice

$$-4x^2 + 16x + 16 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -4\,(x-2)^2 > 0$$

má množinu kořenů $K = \emptyset$, neboť výraz $-4\,(x-2)^2$ je nekladný pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

3. Pro $D > 0$ má uvažovaná rovnice dva reálné různé kořeny x_1 a x_2, které umíme najít užitím známých vzorců

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}\,, \quad \text{kde } D = b^2 - 4ac\,.$$

Můžeme tedy psát

$$a\,(x - x_1)\,(x - x_2) = ax^2 + bx + c\,,$$

čímž zadanou nerovnici převedeme do součinového tvaru a vyřešíme ji například analýzou znamének jednotlivých činitelů.
Právě popsaným způsobem lze u následujících příkladů získat uvedené rozklady do součinového tvaru:

a) Nerovnice

$$-3x^2 + 10x + 8 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -3\left(x + \frac{2}{3}\right)(x-4) \geq 0$$

má množinu kořenů $K = \langle -2/3; 4 \rangle$.

b) Nerovnice

$$6x^2 + 13x - 5 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 6\left(x + \frac{5}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) < 0$$

má množinu kořenů $K = (-5/2; 1/3)$.

c) Nerovnice

$$-4x^2 + 5x + 6 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -4\left(x + \frac{3}{4}\right)(x-2) \leq 0$$

má množinu kořenů $K = (-\infty; -3/4\rangle \cup \langle 2; \infty)$.

d) Nerovnice

$$\sqrt{3}x^2 + 9x + \sqrt{108} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{3}\left(x + \sqrt{3}\right)\left(x + 2\sqrt{3}\right) > 0$$

má množinu kořenů $K = \left(-\infty; -2\sqrt{3}\right) \cup \left(-\sqrt{3}; \infty\right)$.

Zadání úloh.

1. V $\mathbb{R}$ vyřešte nerovnice

   a)
$$2x^2 - 12x + 19 > 0\,,$$

   b)
$$2x^2 - 6\sqrt{2}x + 9 \leq 0\,,$$

   c)
$$2x\,(x-2) + (2-x)\,(x+3) < 0\,,$$

   d)
$$2x^2 + 8x + 1 \geq 0\,.$$

2. Určete definiční obory následujících výrazů

   a)
$$V_1 = \sqrt{x^2-6} + \sqrt{3x+10-x^2}\,,$$

   b)
$$V_2 = \sqrt{x^2-6x+8} + \sqrt{3-x}\,,$$

   c)
$$V_3 = \sqrt{x^2+5x+7} - \frac{1}{\sqrt{x^2-9}}\,,$$

   d)
$$V_4 = \sqrt{\frac{x^2+8x+12}{x^2-6x-40}} \quad \text{a} \quad V_5 = \frac{\sqrt{x^2+8x+12}}{\sqrt{x^2-6x-40}}\,.$$

3. Určete definiční obory následujících výrazů a poté je zjednodušte

   a)
$$V_6 = \frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{\sqrt{5x-4-x^2}}\,,$$

   b)
$$V_7 = \frac{\sqrt{6-x-x^2}}{\sqrt{6+5x+x^2}}$$

Návody k řešení a výsledky úloh.

1. a) $K = \mathbb{R}$,

   b) $K = \left\{3/\sqrt{2}\right\}$,

   c) $K = (2; 3)$,

   d) $K = \left(-\infty; -\frac{4+\sqrt{14}}{2}\right\rangle \cup \left\langle\frac{-4+\sqrt{14}}{2}; \infty\right)$.

2. a) $D(V_1) = \left\langle\sqrt{6}; 5\right\rangle$,

   b) $D(V_2) = (-\infty; 2\rangle$,

   c) $D(V_3) = (-\infty; -3) \cup (3; \infty)$,

   d) Aby byl definován výraz V_4 je nutné a stačí, aby

$$\frac{x^2 + 8x + 12}{x^2 - 6x - 40} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(x+2)(x+6)}{(x-10)(x+4)} \geq 0\,.$$

   Řešením této nerovnice dostáváme $D(V_4) = (-\infty; -6\rangle \cup (-4; -2\rangle \cup (10; \infty)$. Zato nutnou a dostatečnou podmínkou k tomu, aby byl definován výraz V_5, je

$$x^2 + 8x + 12 \geq 0 \quad \text{a současně} \quad x^2 - 6x - 40 > 0\,.$$

   Vyřešením této soustavy nerovnic obdržíme $D(V_5) = (-\infty; -6\rangle \cup (10; \infty)$. Vidíme, že $D(V_4) \supset D(V_5)$. Dále víme, že pro všechna $x \in D(V_5)$ platí $V_4 = V_5$. Nelze však tvrdit, že tato rovnost platí pro všechna $x \in D(V_4)$!

3. a) $D(V_6) = (1; 4)$. Pro všechna $x \in D(V_6)$ platí

$$V_6 = \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{4-x}} = \sqrt{\frac{x+3}{4-x}}\,.$$

   b) $D(V_7) = (-2; 2\rangle$. Pro všechna $x \in D(V_7)$ platí

$$V_7 = \frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}} = \sqrt{\frac{2-x}{2+x}}\,.$$