Kvadratické rovnice 1 [1]

Definice. Kvadratickou rovnicí rozumíme rovnici tvaru

$$ax^2 + bx + c = 0\,, \quad \text{kde } a \neq 0,\ a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Čísla a, b , c nazýváme koeficienty kvadratické rovnice, výrazy ax^2, bx a c nazýváme členy této rovnice, a to po řadě kvadratický, lineární a absolutní.

Odvození vzorce pro řešení kvadratické rovnice. Po vydělení rovnice nenulovým číslem a dostaneme

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0\,.$$

Její levou stranu upravíme pomocí doplnění na čtverec

$$\left[x^2 + 2\cdot\frac{b}{2a}\cdot x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\,.$$

Označíme-li $D = b^2 - 4ac$, můžeme psát

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{D}{(2a)^2}\,.$$

Vzhledem k tomu, že levá strana této rovnice je nezáporná a jmenovatel pravé strany kladný, bude mít řešená kvadratická rovnice v $\mathbb{R}$ řešení právě tehdy, když $D \geq 0$. Dostáváme tedy tři případy:

1. Jestliže $D < 0$, rovnice v $\mathbb{R}$ nemá žádné řešení.
2. Pokud $D = 0$, platí
$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{b}{2a}\,, \tag{1}$$
rovnice tedy má 1 (tzv. dvojnásobný) kořen.
3. Pro $D > 0$ po odmocnění, které je v této situaci ekvivalentní úpravou, obdržíme
$$\left|x + \frac{b}{2a}\right| = \left|\frac{\sqrt{D}}{2a}\right| \quad \Leftrightarrow \quad x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{D}}{2a} \quad \Leftrightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}\,, \tag{2}$$
což znamená, že řešením rovnice jsou dva různé kořeny.

Všimněte si, že odvozený vzorec (2) lze použít i v situaci, kdy $D = 0$, neboť vyjádření (1) je vlastně jeho speciálním případem.

Výraz $D = b^2 - 4ac$ nazýváme *diskriminant* kvadratické rovnice.

Pomocí odvozených vzorců lze vyřešit jakoukoliv kvadratickou rovnici. Má-li však řešená rovnice nějaký speciální tvar (např. $b = 0$ nebo $c = 0$) bývá rychlejší se užití těchto vzorců vyhnout a použít přímý výpočet. Ilustrujeme to na následujících příkladech.

[1] Případné náměty k tomuto textu prosím adresujte na e-mail akob@jaroska.cz. Děkuji Aleš Kobza (autor materiálu).

Řešené příklady. V $\mathbb{R}$ vyřešte rovnice

1. $$\sqrt{3}x^2 - 5x - 2\sqrt{3} = 0\,,$$
2. $$4x^4 - x^2 - 18 = 0\,,$$
3. $$25x^2 - 30x + 9 = 0\,,$$
4. $$9x^2 + 42x + 50 = 0\,,$$
5. $$\sqrt{2}x^2 + \sqrt{8}x = 0\,.$$

Řešení.

1. Dle námi používaného značení je $a = \sqrt{3}$, $b = -5$ a $c = -2\sqrt{3}$. Výpočtem diskriminantu zjistíme, že $D = b^2 - 4ac = 25 - 4 \cdot \sqrt{3} \cdot \left(-2\sqrt{3}\right) = 49 > 0$, takže řešená rovnice má dva reálné různé kořeny. Ty najdeme užitím vztahu (2). Platí
$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{5+7}{2\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \qquad \text{a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{5-7}{2\sqrt{3}} = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}\,.$$
Veškeré úpravy byly ekvivalentní, žádné podmínky stanovovat není třeba, zkoušku provádět nemusíme. Dostáváme tak závěr, že $K = \left\{2\sqrt{3}; -\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$.

2. Všimneme-li si, že všechny mocniny neznámé x jsou sudé, nabízí se provést substituci $y = x^2$. Po jejím zavedení je našim úkolem řešit rovnici $4y^2 - y - 18 = 0$. Její diskriminant je $D = (-1)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-18) = 289 = 17^2 > 0$. Proto má pomocná rovnice s neznámou y dva reálné různé kořeny, a to
$$y_1 = \frac{1+17}{2 \cdot 4} = \frac{18}{8} = \frac{9}{4} \qquad \text{a} \qquad y_2 = \frac{1-17}{2 \cdot 4} = -\frac{16}{8} = -2\,.$$
Zbývá se vrátit k původní neznámé. Platí
$$x_1^2 = \frac{9}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x_{1a,1b} = \pm\frac{3}{2} \qquad \text{a} \qquad x_2^2 = -2\,, \text{ což v } \mathbb{R} \text{ nelze.}$$
Dostáváme tak závěr $K = \left\{\pm\frac{3}{2}\right\}$.

3. Když si uvědomíme, že $25x^2 - 30x + 9 = (5x-3)^2$, ihned uvidíme, že jediným kořenem řešené rovnice je $x = \frac{3}{5}$. Samozřejmě lze tuto rovnici řešit „otrocky“ užitím vzorce podobně jako v předchozích úlohách. Není to však výhodné. Při tomto postupu vychází $D = (-30)^2 - 4 \cdot 25 \cdot 9 = 0$, takže podle (1) obdržíme $x = \frac{30}{2 \cdot 25} = \frac{3}{5}$, takže $K = \left\{\frac{3}{5}\right\}$.

4. Tentokrát není levá strana uvažované rovnice přímo čtvercem, přesto lze postupovat podobně jako v předchozí úloze. Platí $9x^2 + 42x + 50 = (9x^2 + 42x + 49) + 1 = (3x+7)^2 + 1 > 0$, proto rovnice $9x^2 + 42x + 50 = 0$ v $\mathbb{R}$ nemá žádné řešení, $K = \emptyset$. Samozřejmě bychom toto zjistili i pomocí výpočtu diskriminantu, který vychází záporný: $D = 42^2 - 4 \cdot 9 \cdot 50 = -36$.

5. Uvedenou rovnici je výhodné řešit rozkladem na součin. Platí
$$\sqrt{2}x^2 + \sqrt{8}x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{2}x\left(x + \sqrt{4}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\,(x+2) = 0 \quad \Rightarrow \quad K = \{0; -2\}\,.$$

Vztahy mezi kořeny a koeficienty kvadratické rovnice (tzv. (Newton)-Viètovy vztahy).

Označme x_1 a x_2 kořeny uvažované kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$. Tu můžeme vyřešit rovněž tak, že její levou stranu rozložíme na součin, tj.

$$a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 + bx + c = 0\,.$$

Po roznásobení tedy máme

$$ax^2 - a(x_1 + x_2)\,x + ax_1x_2 = ax^2 + bx + c\,.$$

Porovnáním koeficientů u lineárního a absolutního členu dostaneme

$$-a(x_1 + x_2) = b \quad \Leftrightarrow \quad x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

a

$$ax_1x_2 = c \quad \Leftrightarrow \quad x_1x_2 = \frac{c}{a}\,.$$

Uvedené vzorce sice nenahrazují vzorec (2), ale zato platí i v situaci, kdy $D < 0$. Můžeme s nimi tedy počítat i v případě, že kořeny kvadratické rovnice nechceme či neumíme najít.

Řešené příklady.

1. Výraz $V = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$ vyjádřete ve tvaru, který obsahuje jen součty či součiny hodnot x_1 a x_2.
2. Aniž řešíte rovnici $x^2 - x + 16 = 0$, najděte alespoň jednu kvadratickou rovnici, jejíž kořeny jsou (druhými) odmocninami kořenů zadané rovnice.

Řešení.

1. Platí
$$V = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{x_2^2 + x_1^2}{(x_1x_2)^2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{(x_1x_2)^2}\,.$$
2. Označme x_1 a x_2 kořeny rovnice $x^2 - x + 16 = 0$. Platí tedy pro ně $x_1 + x_2 = 1$ a $x_1x_2 = 16$. Hledejme vyhovující rovnici ve tvaru $ay^2 + by + c = 0$. Pro její kořeny y_1a y_2 má podle zadání platit $y_1 = \sqrt{x_1}$ a $y_2 = \sqrt{x_2}$, podle Viètových vztahů pak $y_1 + y_2 = -\frac{b}{a}$ a $y_1y_2 = \frac{c}{a}$. Počítejme
$$y_1 + y_2 = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \sqrt{\left(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}\right)^2} = \sqrt{x_1 + 2\sqrt{x_1}\cdot\sqrt{x_2} + x_2} = \sqrt{x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1x_2}} =$$
$$= \sqrt{1 + 2\sqrt{16}} = \sqrt{9} = 3 = -\frac{b}{a}\,,$$
$$y_1y_2 = \sqrt{x_1}\cdot\sqrt{x_2} = \sqrt{x_1x_2} = \sqrt{16} = 4 = \frac{c}{a}\,.$$
Protože chceme najít jednu z vyhovujících rovnic, můžeme si například zvolit $a = 1$. Potom z právě provedených výpočtů dostaneme $b = -3$ a $c = 4$, takže hledaná rovnice je tvaru $y^2 - 3y + 4 = 0$. Poznamenejme, že vyhovujících rovnic je nekonečně mnoho, vzájemně se liší nenulovým násobkem, neboť jde o ekvivalentní úpravy nalezené rovnice.

Rovnice - zadání úloh.

V $\mathbb{R}$ vyřešte rovnice

1. $$\sqrt{2}x^2 - 5x + \sqrt{8} = 0\,,$$

2. $$\sqrt{3}x^2 - \sqrt{8}x - \sqrt{12} = 0\,,$$

3. $$\sqrt{2}x^4 - 2x^2 - \sqrt{32} = 0\,,$$

4. $$\sqrt{3}x^6 + \sqrt{32}x^3 - \sqrt{192} = 0\,,$$

5. $$6x^2 + 7x - 3 = 0\,,$$

6. $$4x^2 + 11x + 6 = 0\,,$$

7. $$6x^2 - 19x + 10 = 0\,,$$

8. $$8x^6 - 215x^3 - 27 = 0\,,$$

9. $$9x^2 + 42x + 49 = 0\,,$$

10. $$25x^2 - 9 = 0\,,$$

11. $$-16x^2 + 81 = 0\,,$$

12. $$2x^2 - 3x = 0\,.$$

Rovnice - návody k řešení a výsledky úloh.

V úlohách 9. - 12. je výhodnější počítat bez užití vzorce (2).

1. $K = \left\{2\sqrt{2}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$,
2. $K = \left\{\sqrt{6}; -\frac{\sqrt{6}}{3}\right\}$,
3. užijte substituci $x^2 = y$, $K = \left\{\pm\sqrt[4]{8}\right\}$,
4. užijte substituci $x^3 = y$, $K = \left\{\sqrt[6]{\frac{8}{3}}; -\sqrt[6]{24}\right\}$,
5. $K = \left\{\frac{1}{3}; -\frac{3}{2}\right\}$,
6. $K = \left\{-2; -\frac{3}{4}\right\}$,
7. $K = \left\{\frac{2}{3}; \frac{5}{2}\right\}$,
8. užijte substituci $x^3 = y$, $K = \left\{-\frac{1}{2}; 3\right\}$,
9. $K = \left\{-\frac{7}{3}\right\}$,
10. $K = \left\{\pm\frac{3}{5}\right\}$,
11. $K = \left\{\pm\frac{9}{4}\right\}$,
12. $K = \left\{0; \frac{3}{2}\right\}$.

Užití Viètových vztahů - zadání úloh.

1. Následující výrazy vyjádřete ve tvaru, který obsahuje jen součty či součiny hodnot x_1 a x_2.
   a)
   $$V_1 = \left(x_1^{-1} + x_2^{-1}\right)^{-2},$$
   b)
   $$V_2 = x_1^3 + x_2^3,$$
   c)
   $$V_3 = \sqrt{1+x_1} + \sqrt{1+x_2}.$$
2. Uvažujme rovnici $4x^2 - 11x + 5 = 0$. Aniž tuto rovnici řešíte, najděte alespoň jednu kvadratickou rovnici s celočíselnými koeficienty, jejíž kořeny jsou
   a) opačná čísla než kořeny uvažované rovnice,
   b) druhými mocninami kořenů uvažované rovnice,
   c) převrácenými hodnotami kořenů uvažované rovnice,
   d) čísla o 2 větší než kořeny uvažované rovnice,
   e) čísla 4 krát větší než kořeny uvažované rovnice.

3. Označme x_1 a x_2 kořeny rovnice $x^2 + x + 2 = 0$. Aniž tuto rovnici řešíte, najděte alespoň jednu kvadratickou rovnici, jejíž kořeny jsou čísla

$$\frac{1}{x_1^3} \quad \text{a} \quad \frac{1}{x_2^3} .$$

Užití Viètových vztahů - návody k řešení a výsledky úloh.

1. Počítejme

   a)

$$V_1 = \left(x_1^{-1} + x_2^{-1}\right)^{-2} = \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right)^{-2} = \left(\frac{x_2 + x_1}{x_1 x_2}\right)^{-2} = \frac{(x_1 x_2)^2}{(x_1 + x_2)^2} ,$$

   b)

$$V_2 = x_1^3 + x_2^3 = \left(x_1^3 + 3x_1^2 x_2 + 3x_1 x_2^2 + x_2^3\right) - 3x_1^2 x_2 - 3x_1 x_2^2 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) ,$$

   c)

$$V_3 = \sqrt{1 + x_1} + \sqrt{1 + x_2} = \sqrt{\left(\sqrt{1 + x_1} + \sqrt{1 + x_2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{1 + x_1 + 2\sqrt{1 + x_1}\sqrt{1 + x_2} + 1 + x_2} = \sqrt{2 + (x_1 + x_2) + 2\sqrt{1 + (x_1 + x_2) + x_1 x_2}} .$$

2. Pro kořeny x_1 a x_2 rovnice $4x^2 - 11x + 5 = 0$ platí $x_1 + x_2 = \frac{11}{4}$ a $x_1 x_2 = \frac{5}{4}$. Aby nedošlo k duplicitnímu značení hledejme rovnici ve tvaru $ay^2 + by + c = 0$.

   a) Má platit $y_1 = -x_1$ a $y_2 = -x_2$,

$$y_1 + y_2 = -\frac{b}{a} = -x_1 - x_2 = -(x_1 + x_2) = -\frac{11}{4}$$

   a

$$y_1 y_2 = \frac{c}{a} = -x_1 \cdot (-x_2) = x_1 x_2 = \frac{5}{4} .$$

   Zvolíme-li $a = 4$, dopočteme $b = 11$ a $c = 5$. Jedna z vyhovujících rovnic je tedy tvaru $4y^2 + 11y + 5 = 0$.

   b) Např. $16y^2 - 81y + 25 = 0$,

   c) např. $5y^2 - 11y + 4 = 0$,

   d) např. $4y^2 - 27y + 43 = 0$,

   e) např. $y^2 - 11y + 20 = 0$,

3. Např. $8y^2 - 5y + 1 = 0$.