Postřehy a materiály k výuce celku „Funkce“

1) Grafy funkcí

- Precizní zápis posunutí soustavy souřadnic - např.

$$f\,:\;y=\frac{2x+3}{x+1}=\frac{2(x+1)+1}{x+1}=2+\frac{1}{x+1}\,,\ \text{tedy } y-2=\frac{1}{x+1}\,.$$

  Označíme-li $x'=x+1$ a $y'=y-2$, pak má uvažovaná funkce f v posunutých „čárkovaných“ souřadnicích předpis

$$f\,:\;y'=\frac{1}{x'}\,.$$

  Uvedená transformace představuje posunutí souřadnicových os. Posunutý počátek P' má souřadnice $P'=[-1;2]$. Je tedy evidentní, že grafem funkce f je stejná křivka, která je grafem funkce $g\,:\;y=1/x$ (tedy rovnoosá hyperbola). Je proto pouze potřeba známou křivku umístit do posunuté polohy, která je určena pomocnými souřadnicovými osami x' a y', jejímž průsečíkem je bod P'.

- Grafické řešení rovnic a nerovnic - často opomíjená metoda, která je vhodná zejména v situaci, kdy algebraické úpravy studované (ne)rovnice nevedou k jejímu zjednodušení. Pro průkaznost řešení je vhodné úlohy zadávat tak, aby v příslušném intervalu jedna z uvažovaných funkcí byla rostoucí a druhá klesající. Je-li totiž funkce f na intervalu I rostoucí a funkce g je na tomto intervalu klesající, pak mají jejich grafy na intervalu I nejvýše jeden průsečík. Úlohy navíc lze volit tak, aby studenti byli nuceni uvažovat na grafu funkce několik bodů, kterými prochází.
  Úlohy. V $\mathbb{R}$ řešte

$$\frac{1}{(x+3)^4}\geq\frac{1}{2}\,(x+4)^3-3\,,\quad 2\sqrt{3-x}-5=\frac{-8}{x+2}-1\,,\quad \frac{3}{2}\sqrt[5]{64-32x}-2=\frac{2}{|3-x|}\,.$$

  Výsledky. $(-\infty;-3)\cup(-3;-2\rangle$, $\{-6;2\}$, $\{1\}$.

2) Inverzní funkce

- Jak vypadá inverzní funkce k funkci $f\,:\;y=k/x$ ($k\in\mathbb{R}-\{0\}$)? Inverzní funkce f^{-1} má stejný předpis:

$$f^{-1}\,:\;x=\frac{k}{y}\;\Leftrightarrow\;y=\frac{k}{x}\,.$$

  Funkce f je tedy inverzní sama k sobě. To znamená, že křivka, která je grafem funkce f (tzv. rovnoosá hyperbola) je souměrná podle osy o rovnici $y=x$ (a dále zřejmě i podle osy o rovnici $y=-x$). To je vhodné ukázat vzhledem k pozdějšímu studiu kuželoseček, kdy uvažujeme hyperboly o rovnicích tvaru

$$\frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$$

  a hovoříme o jejích poloosách délek a a b.

- Na základě vlastnosti, že grafy funkcí f a f^{-1} jsou souměrné podle osy o rovnici $y=x$ lze vyšetřit průběhy funkcí, které obvykle přímo nestudujeme. Máme-li například načrtnout graf funkce

$$f\,:\;y=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,,$$

  stačí uvážit funkci k ní inverzní

$$f^{-1}\,:\;x=\frac{1}{\sqrt[3]{y}}\,,\ \text{tedy } y=\frac{1}{x^3}\,,$$

  jejíž graf by středoškolští studenti měli znát.

- Rozšíření definice liché odmocniny - v $\mathbb{R}$ jí lze uvažovat i ze záporných čísel. Například funkce $f: y = x^3$ má definiční obor i obor hodnot $\mathbb{R}$ a je v celém svém definičním oboru rostoucí. Proto k ní existuje funkce inverzní s předpisem

$$f^{-1}: x = y^3, \text{ tedy } y = \sqrt[3]{x},$$

která má opět definiční obor i obor hodnot $\mathbb{R}$ a je také v celém svém definičním oboru rostoucí. V $\mathbb{R}$ např. platí $\sqrt[3]{-8} = -2$, neboť $(-2)^3 = -8$. Toto pojetí není jednotné. Argumentem pro nerozšíření definice liché odmocniny i pro záporná čísla bývá to, že pak by ne každý vzorec pro počítání s odmocninami platil pro jakékoliv x, např. vztahy $\left(\sqrt[6]{x}\right)^2 = \sqrt[3]{x}$ nebo $\sqrt[6]{x^2} = \sqrt[3]{x}$ platí pouze pro $x \geq 0$. Zdůrazněme, že v prvním vztahu je důvodem to, že výraz $\left(\sqrt[6]{x}\right)^2$ je definován pouze pro nezáporná x, zatímco ve druhém vztahu je sice výraz $\sqrt[6]{x^2}$ definovaný i pro záporná x, je však pro ně kladný, ale výraz $\sqrt[3]{x}$ nabývá pro záporná x záporných hodnot, tudíž by rovnost byla porušena.
Uvědomme si, že diskusi podmínek se však zcela nevyhneme ani v případě, že jakoukoliv odmocninu budeme vždy uvažovat výhradně z nezáporného čísla! Například u rovností $\sqrt[6]{x^2} = \left(\sqrt[6]{x}\right)^2$ nebo $\sqrt[4]{x^2} = \sqrt{x}$ je jistě vhodné studenty upozornit na skutečnost, že jejich levé strany jsou definovány pro všechna reálná čísla, avšak jejich pravé strany pouze pro čísla nezáporná a tudíž pouze pro čísla nezáporná platí. Naopak výraz $\sqrt{-x}$ je definován pouze pro nekladná čísla a právě pro všechna nekladná čísla platí rovnost $\sqrt[4]{x^2} = \sqrt{-x}$. Domnívám se rovněž, že je vhodné se studenty projít vlastnosti funkcí

$$f_1(x) = \sqrt{x}, \quad f_2(x) = -\sqrt{x}, \quad f_3(x) = \sqrt{-x} \quad \text{a} \quad f_4(x) = -\sqrt{-x}$$

a jejich grafy.
V souvislosti s podmínkami a definičními obory funkcí si uvědomme, že podobný problém nastává i u jiných funkcí - např. logaritmických. Vzorec

$$\log x^2 = 2\log x \tag{1}$$

platí pouze pro $x > 0$. Jen za této podmínky je definována jeho pravá strana, strana levá je však definována pro každé $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

3) Podmínky a řešení rovnic, využití oboru hodnot funkcí

- Uvažujme rovnici $\log x^2 = 4$. Tato rovnice je definována pro všechna $x \in \mathbb{R}-\{0\}$. Správným postupem řešení je rovnici odlogaritmovat a dále dořešit následujícími úpravami

$$\log x^2 = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 10^4 \quad \Leftrightarrow \quad |x| = 10^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 100. \tag{2}$$

Protože veškeré úpravy byly za uvedené podmínky ekvivalentní, je množina všech kořenů uvažované rovnice dvojprvková, tj. $K = \{\pm 100\}$. Chybný by ovšem byl postup s využitím vzorce (1), který platí pouze pro kladná x! Záporný kořen uvažované rovnice bychom tak nenašli

$$\log x^2 = 4 \quad \not\Rightarrow \quad 2\log x = 4 \quad \Leftrightarrow \quad \log x = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 100.$$

Byla-li by však rovnice zadána ve tvaru $2\log x = 4$, pak by byla definována jen pro $x > 0$ a měla by tedy jediný kořen $x = 100$ (viz výše uvedené ekvivalentní úpravy). Poznamenejme ještě, že by při řešení rovnice $2\log x = 4$ bylo možné (avšak ne výhodné) použít důsledkovou úpravu

$$2\log x = 4 \quad \Rightarrow \quad \log x^2 = 4,$$

dále pokračovat jako v (2) a provést zkoušku, která by při tomto postupu byla nedílnou součástí řešení (případně místo zkoušky stanovit podmínky), čímž se vyloučí záporný výsledek.

- Vhodné je studentům zadat rovnici, u níž podmínky některý kořen vyloučí. Obzvlášť poučné to může být v situaci, je-li vyloučeno řešení kladné. Toto lze například demonstrovat řešením rovnice

$$\log_3(x+5) + \log_3(2-x) - \log_3(-1-x) = \log_3 2.$$

Argument každého logaritmu musí být kladný. Takto zjistíme, že uvedená rovnice má smysl pro všechna $x \in (-5;-1)$. S využitím vlastností logaritmů, pak za této podmínky platí

$$\log_3(x+5) + \log_3(2-x) - \log_3(-1-x) = \log_3 2 \quad \Leftrightarrow \quad \log_3 \frac{(x+5)(2-x)}{-1-x} \log_3 2\,.$$

Po odlogaritmování a roznásobení pak dostaneme rovnici, kterou snadno upravíme do součinového tvaru

$$-x^2 - 3x + 10 = -2 - 2x \quad \Leftrightarrow \quad 0 = x^2 + x - 12 \quad \Leftrightarrow \quad (x+4)(x-3) = 0\,.$$

Vzhledem k uvedeným podmínkám, za nichž byly veškeré popsané úpravy ekvivalentní, je množina všech kořenů řešené rovnice pouze jednoprvková, $K = \{-4\}$.

- Rovnici

$$5^{\frac{x}{2}} + 2^x + 3^{-x} = 0$$

nelze zjednodušit obvyklými úpravami používanými při řešení exponenciálních rovnic. Pokud si však všimneme, že její levá strana je tvořena součtem tří kladných sčítanců, snadno zdůvodníme, že tato rovnice nemá řešení.

- Pozorným pohledem na rovnici

$$\sqrt{2-x} + \sqrt{x^2-2x} + \sqrt{x^2-4} = 0$$

si můžeme výrazně usnadnit práci s jejím řešením. Protože její levá strana je tvořena součtem tří nezáporných sčítanců, musí být každý z nich nulový. První sčítanec je nulový právě tehdy, když $x = 2$ a pro tuto hodnotu jsou nulové i zbývající dva sčítance, takže má řešená rovnice jediný kořen $x = 2$. Dodejme, že tato rovnice je řešitelná i obvyklým způsobem. Je jí však třeba upravit, poté umocnit, abychom po dalších úpravách a vytknutí dostali součinový tvar

$$\sqrt{2-x} + \sqrt{x^2-2x} = -\sqrt{x^2-4} \quad \Rightarrow \quad \ldots \quad \Rightarrow \quad (2-x)\left(2 + 2\sqrt{-x}\right) = 0\,.$$

Zbývá zdůvodnit, že druhá závorka nemůže být rovna nule a provést zkoušku, neboť umocnění rovnice je úprava důsledková. Tento postup je tedy výrazně pracnější.

- Uvědomíme-li si, že oborem hodnot funkcí sinus a kosinus je interval $\langle -1; 1\rangle$, můžeme opět elegantně vyřešit rovnici

$$\sin 2x + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 2\,.$$

Z uvedeného vyplývá, že pro splnění rovnosti je nutné a stačí, aby každý sčítanec na levé straně rovnice byl roven jedné

$$\sin 2x = 1 \;\Leftrightarrow\; 2x = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \;\Leftrightarrow\; x = \frac{\pi}{4} + k\pi\,,\; k \in \mathbb{Z}$$

a

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \;\Leftrightarrow\; x - \frac{\pi}{4} = k \cdot 2\pi \;\Leftrightarrow\; x = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi\,,\; k \in \mathbb{Z}\,.$$

Tedy pro množinu všech kořenů dostáváme $K = \left\{\frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi\,,\; k \in \mathbb{Z}\right\}$.
Naznačme ještě způsob řešení uvažované rovnice pomocí „obvyklých“ úprav, který však rozhodně není výhodnější. Využitím součtových vzorců nejprve získáme stejný argument x

$$\sin 2x + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x + \cos x) = 2 - \sin 2x\,.$$

Po vynásobení dvěma a umocnění rovnice po důsledkové úpravě dostaneme

$$2\left(\sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x\right) = 4\left(4 - 4\sin 2x + \sin^2 2x\right)\,.$$

S využitím známých vzorců přepíšeme levou stranu do tvaru

$$2\left(\sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x\right) = 2(1 + \sin 2x)\,.$$

Po provedení substituce $y = \sin 2x$ dostáváme v pomocné proměnné y kvadratickou rovnici, takže již úlohu algoritmickým způsobem dořešíme.

4) Vlastnosti logaritmů

- Běžně ukazujeme, že vhodné odmocniny jsou čísly iracionálními. Podobně lze ukázat, že ani „většinu“ logaritmů nelze zapsat ve tvaru zlomku s celočíselným čitatelem a jmenovatelem. Dokažme např., že

  $$\log 3 \notin \mathbb{Q}\,.$$

  Vzhledem k tomu, že $\log 3 > 0$, můžeme sporem předpokládat, že $\log 3 = p/q$, kde $p, q \in \mathbb{N}$. Pak platí

  $$10^{\frac{p}{q}} = 3 \quad \Rightarrow \quad 10^p = 3^q \quad \Leftrightarrow \quad 2^p \cdot 5^p = 3^q\,,$$

  což je spor s větou o existenci a jednoznačnosti rozkladu přirozeného čísla na součin prvočísel.

- Pomocí logaritmů se dá jednoduše ukázat, že množina iracionálních čísel není uzavřená vůči operaci součtu. Jednoduše řečeno, že součtem dvou iracionálních čísel nemusí být číslo iracionální. Např. $\log 2 + \log 5 = 1$. Podobně to platí i pro operaci součinu, kde tuto skutečnost snáze ukážeme s využitím odmocnin, např. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = 4$.

5) Určení oboru hodnot funkce

I u funkcí, jejichž obor hodnot není vidět bezprostředně z jejich předpisu, jej lze zjistit bez komplexního studia průběhu funkce. Jedná se o jednoduchou aplikaci problematiky rovnic s parametrem. Na předpis uvažované funkce stačí nahlížet jako na rovnici o proměnné x s parametrem y a potřebujeme zjistit, pro jaké hodnoty parametru má tato rovnice alespoň jedno (reálné) řešení.
Úlohy. Určete obory hodnot následujících funkcí

$$f_1 : y = \frac{x^2}{x-4}\,, \qquad f_2 : y = \frac{(x-3)^2}{x^2+1}\,, \qquad f_3 : y = \frac{2x^2-6}{x^2+2}\,.$$

Výsledky a návody. Předpis funkce f_1 upravíme do tvaru $x^2 - yx + 4y = 0$. Jedná se o kvadratickou rovnici (bez ohledu na hodnoty parametru y), která má alespoň jedno řešení právě tehdy, když je její diskriminant nezáporný, tj. $y^2 - 16y = y\,(y-16) \geq 0$. Odtud vidíme, že obor hodnot funkce f_1 je $H(f_1) = (-\infty; 0\rangle \cup \langle 16; \infty)$. Podobně zjistíme, že $H(f_2) = \langle 0; 10\rangle$ (příslušná rovnice je tvaru $(y-1)\,x^2 + 6x + y - 9 = 0$ a je třeba se u ní zvlášť věnovat hodnotě $y = 1$, pro kterou je rovnice lineární) a $H(f_3) = \langle -3; 2)$ (u této funkce se nabízí také možnost úpravy jejího předpisu do tvaru $y = 2 - 10/\left(x^2+2\right)$, ze kterého je tvar oboru hodnot možné zdůvodnit rovnou).

6) Goniometrické a cyklometrické funkce

- Grafy funkcí sinus a kosinus se nazývají *sinusoida* resp. *kosinusoida* - viz. učebnice Goniometrie pro gymnázia. Jedná se však o tutéž křivku, která je pouze posunutá do jiného počátku, protože platí

  $$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\,.$$

  Podobná situace pak nastává u funkcí tangens a kotangens, jejichž grafy tvoří rovněž totožné křivky. Platí totiž

  $$\cot x = -\tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\,.$$

- Goniometrické funkce sinus, kosinus, tangens a kotangens jsou periodické, zejména tedy nejsou prosté. Přesto k nim však uvažujeme funkce inverzní. Abychom je mohli definovat, musíme zúžit jejich definiční obory.

7) Úlohy

Zadání

1. Udejte příklad funkcí následujících vlastností. Případně zdůvodněte, proč požadovaným podmínkám nelze vyhovět.

   a) Funkce f_1, která je prostá, ale není ani rostoucí ani klesající.

   b) Sudé funkce f_2, která má právě jedno ostré globální minimum a právě jedno ostré globální maximum.

   c) Funkce f_3, která má nejmenší periodu 4π a obor hodnot $\langle -2; 4\rangle$.

   d) Funkce f_4, která má obor hodnot $H(f_4) = (0; 1\rangle$.

   e) Funkce f_5, která je současně sudá i lichá.

   f) Funkce f_6, která má své globální minimum v bodě $[3; -1]$.

   g) Funkce f_7, která je rostoucí v $\mathbb{R}$ a má právě jedno lokální maximum.

   h) Funkce f_8, která je sudá a má právě tři body nespojitosti.

   i) Funkce f_9, která má definiční obor $D(f_9) = (-1; 2\rangle$.

   j) Nekonstantní funkce f_{10}, která je periodická, ale neexistuje její nejmenší perioda.

2. Najděte všechna $a \in \mathbb{R}$ taková, aby pro libovolnou funkci tvaru $f(x) = ax + 1$ a každé $x \in \langle -2; 2\rangle$ platilo, že $f(x) \in \langle -7; 9\rangle$.

3. Najděte všechna $b \in \mathbb{R}$ taková, aby pro libovolnou funkci tvaru $f(x) = 3x + b$ a každé $x \in \langle -1; 3\rangle$ platilo, že $f(x) \in \langle -5; 10\rangle$.

4. Porovnejte čísla
$$\left(-\frac{49}{16}\right)^{160} \quad \text{a} \quad \left(\frac{3}{5}\right)^{-320}.$$

5. Určete definiční obory následujících funkcí
$$f(x) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{x^2 - 2x + 1}{x + 2} \quad \text{a} \quad g(x) = \frac{2^x}{1 - \sqrt{\log_8 (x-1)^3}}.$$

6. Najděte všechny hodnoty parametru $a \in \mathbb{R}$, pro které je funkce f definovaná předpisem
$$f(x) = \left(\frac{1 - a^2}{2 + a}\right)^x$$
klesající exponenciální funkcí.

7. Určete všechna $x \in \mathbb{R}$, pro která nabývá funkce
$$f(x) = \log_{\frac{1}{7}} \frac{5}{x - 3}$$
nezáporných hodnot.

8. Zjednodušte
$$2\log_2 6 + \log_2 12 - 3\log_4 9 + \log_3 15 + \log_{\frac{1}{3}} 5.$$

9. Nechť jsou dány funkce

$$f_1 : y = \log_{\frac{1}{3}}(x-1) \quad \text{a} \quad f_2 : y = 2^{x-2} - 5\,.$$

Do jednoho obrázku načrtněte věrně jejich grafy (vyznačte v nich důležité body, případné prvky souměrnosti, průsečíky se souřadnicovými osami) a určete jejich definiční obory a obory hodnot. Na základě těchto grafů najděte všechna řešení rovnice

$$\log_{\frac{1}{3}}(x-1) = 2^{x-2} - 5\,.$$

Zdůvodněte přitom, proč má tato rovnice Vámi uváděný počet řešení.

10. V $\mathbb{R}$ vyřešte rovnice

$$3^{-5x-1} = 81\,, \quad \frac{1}{2^{y-3}} = 1\,, \quad 10^{1-3z} = 5\,, \quad 2^{u+1} + 2^{u+2} = 96\,.$$

11. V $\mathbb{R}$ vyřešte rovnice

$$2^{(x-4)\cdot\sqrt{x^2+x-6}} = 1\,, \quad 3^y - 2^y = 2^{y+1} + 3^{y-2}\,, \quad 4 \cdot 9^{\frac{1}{z}} - 9 \cdot 4^{\frac{1}{z}} = 5 \cdot 6^{\frac{1}{z}}\,.$$

12. V $\mathbb{R}$ vyřešte rovnice

$$\log_5(6x+1) = 2\,, \quad \log_{\frac{1}{2}} \log_3(1 + 20\log_2 y) = -2\,, \quad \frac{2\log 3z}{\log(2-7z)} = 1\,.$$

13. V $\mathbb{R}$ vyřešte rovnice

$$3\log 2x^2 + 2\log 3x^3 = 5\log x + 2\log 6x^3\,, \quad \log_2^2 y + 2\log_2 y = 3\,, \quad \log_2 z - \log_4 z + \log_{16} z = \frac{3}{4}\,.$$

14. V $\mathbb{R}^2$ vyřešte soustavy rovnic

$$\begin{aligned} \log x + \log y &= 2, \\ 2^{\log x} \cdot 3^{\log y} &= \sqrt{54}, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \sqrt[3]{5^u} \cdot \sqrt{3^v} &= 45, \\ uv &= 12. \end{aligned}$$

15. V $\mathbb{R}$ vyřešte nerovnice

$$2^x \cdot 4^x \le 64\,, \quad 25^y - 9 \cdot 5^y + 20 < 0\,, \quad 2^{\sqrt{z-6}} \le 8 \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{8}\right)^{4-\frac{z}{3}}}\,.$$

16. V $\mathbb{R}$ vyřešte nerovnice

$$\log_{\frac{1}{2}}(2x+4) \ge -3\,, \quad \log_y 2 > 1\,, \quad \log z \cdot \log(z+1) \le 0\,, \quad \log_{\frac{1}{3}}^2 u + \log_{\frac{1}{3}} u \ge 2\,.$$

17. S využitím definice (tj. pomocí jednotkové kružnice, nikoliv kalkulačky) vypočtěte

$$\sin\frac{41\pi}{6} - \cot\left(-\frac{17\pi}{4}\right)\,.$$

18. S využitím goniometrických vzorců, tj. aniž určíte x, vypočtěte $\sin x$, $\cos\frac{x}{2}$ a $\cot 2x$, víte-li, že

$$\tan x = -\frac{4}{3} \quad \text{a} \quad x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)\,.$$

19. Bez užití kalkulaček vypočtěte
$$\sin 11{,}25^\circ\,.$$

20. Najděte všechna $x \in \mathbb{R}$, pro něž platí
$$\frac{\cos x}{1+\cos x}\cdot\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x} = \tan\frac{x}{2}\,.$$

21. Dokažte, že v libovolném trojúhelníku ABC, kde a, b, c značí délky jeho stran, α, β, γ velikosti jeho vnitřních úhlů a S jeho obsah, platí
$$S = \frac{c^2\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}\,.$$

22. Určete velikosti všech ostatních stran a úhlů trojúhelníku ABC, v němž platí

    a)
$$b = 2\sqrt{2}\ \mathrm{cm} \qquad c = \left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)\ \mathrm{cm}, \qquad \alpha = 30^\circ,$$

    b)
$$a - c = 12{,}86\ \mathrm{cm}, \qquad \beta = 47^\circ 39', \qquad r = 32{,}84\ \mathrm{cm},$$

    kde a, b, c značí délky stran, α, β, γ velikosti vnitřních úhlů a r poloměr kružnice opsané trojúhelníku ABC.

23. V $\mathbb{R}$ vyřešte rovnice
$$\sin\left(4x-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\,, \quad \sin 2y = \cos y\,, \quad \sqrt{2\sin z} = -\sqrt{3}\tan z\,, \quad \tan 3u - \cot 3u = \frac{2}{\sqrt{3}}\,.$$

24. V $\mathbb{R}$ vyřešte nerovnice
$$\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}\,, \quad \cot\left(2y+\frac{\pi}{6}\right) \ge 1\,, \quad \sin z + \sin^2 z \ge \cos^2 z\,.$$

25. Určete definiční obory funkcí
$$f(x) = \sqrt{1-2\cos x} \quad \text{a} \quad g(x) = \sqrt{\sqrt{3}-\cot 2x}\,.$$

Návody a výsledky

1. Jednotlivé úlohy májí obvykle buď nekonečně mnoho řešení nebo nemají řešení žádné. Uvedený přehled řešení není tedy komletní.

   a) $f_1(x) = 1/x$.

   b) Neexistuje. Je-li minimum (resp. maximum) sudé funkce v bodě x_0, nastává stejný extrém i v bodě $-x_0$. Jedinou hodnotou, pro níž $x_0 = -x_0$ je $x_0 = 0$, takže extrém realizovaný v tomto bodě může být jediný, ostatní extrémy už se musí vyskytovat v sudém počtu.

   c) $f_3(x) = 3\sin\frac{x}{2} + 1$.

   d) $f_4(x) = \frac{1}{|x|+1}$.

   e) $f_5(x) = 0$.

   f) $f_6(x) = (x-3)^2 - 1$.

   g) Nelze, protože funkce f_7 má být definována na otevřeném intervalu. Neexistuje tedy největší realné číslo, v němž by funkce f_7 měla nabývat své největší hodnoty.

   h) $f_8(x) = 1/\left[x^2\left(x^2-1\right)\right]$.

   i) $f_1(x) = \sqrt{2-x}\cdot\log(x+1)$.

   j) Periodou funkce
   $$f_{10}(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{pro } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$
   je libovolné kladné racionální číslo. Protože neexistuje nejmenší kladné racionální číslo, nemá funkce f_{10} nejmenší periodu.

2. Je výhodné uvažovat grafy funkcí a vyznačit si zadáním vymezenou oblast. Graf libovolné funkce tvaru $f(x) = ax + 1$ prochází bodem $[0;1]$ - viz připravený soubor v programu Graph. Výsledek $a \in \langle -4; 4\rangle$.

3. Přímka, která je graf libovolné funkce tvaru $f(x) = 3x + b$ je rovnoběžná s přímkou o rovnici $y = 3x$ - viz připravený soubor v programu Graph. Výsledek $b \in \langle -2; 1\rangle$.

4. Neboť funkce $f:\ y = x^n$ je pro $x > 0$ rostoucí, platí
$$\left(-\frac{49}{16}\right)^{160} = \left(\frac{7}{4}\right)^{320} > \left(\frac{5}{3}\right)^{320} = \left(\frac{3}{5}\right)^{-320}.$$

5. $D(f) = (-2;\infty) - \{1\}$, $D(g) = \langle 2;\infty) - \{3\}$ (návod: $0 \le \log_8(x-1)^3 \ne 1$).

6. $a \in (-1;1)$ (návod: $0 < \frac{1-a^2}{2+a} < 1$).

7. $x \in \langle 8;\infty)$.

8. Užitím základních vzorců a pravidel pro počítání s logaritmy dostaneme výsledek 5.

9. Protože f_1 je klesající funkce a f_2 naopak rostoucí funkce v celém svém definičním oboru, mohou se jejich grafy protnout nejvýše v jednom bodě. Na základě vlastností obou funkcí snadno najdeme x-ovou souřadnici jejich průsečíku, což je kořen řešené rovnice: $x = 4$.

10. $x = -1$, $y = 3$, $z = \frac{1-\log 5}{3}$, $u = 4$,

11. $x_1 = -3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$, $y = 3$, $z = \frac{1}{2}$,

12. $x = 4$, $y = 16$, $z = \frac{2}{9}$,

13. $x = \frac{1}{2}$, $y_1 = 2$, $y_2 = \frac{1}{8}$, $z = 2$,

14. $x = \sqrt{10}$, $y = 10\sqrt{10}$, $u_1 = 3$, $v_1 = 4$, $u_2 = 6\log_5 3$, $v_2 = 2\log_3 5$,

15. $x \in (-\infty; 2\rangle$, $y \in (\log_5 4; 1)$, $z \in \{6\} \cup \langle 10; \infty)$,

16. $x \in (-2; 2\rangle$, $y \in (1; 2)$, $z \in (0; 1\rangle$, $u \in \left(0; \frac{1}{3}\right\rangle \cup \langle 9; \infty)$.

17. Platí $\sin\frac{41\pi}{6} - \cot\left(-\frac{17\pi}{4}\right) = \sin\frac{5\pi}{6} + \cot\left(\frac{17\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} + \cot\frac{\pi}{4} = \frac{3}{2}$.

18. Pro všechna $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ platí $\sin x > 0$, $\cos x < 0$ a $\cos\frac{x}{2} > 0$. Řešením rovnice $\tan x = \frac{\sin x}{-\sqrt{1-\sin^2 x}} = -\frac{4}{3}$ za uvedených podmínek dostáváme $\sin x = \frac{4}{5}$, proto $\cos x = -\sqrt{1-\sin^2 x} = -\frac{3}{5}$. Dále platí $\cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ a $\cot 2x = \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{2\sin x\cos x} = \frac{7}{24}$.

19. Platí $\sin 11{,}25° = \sin\frac{22{,}5°}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos 22{,}5°}{2}}$. Ale $\cos 22{,}5° = \sqrt{\frac{1+\cos 45°}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$, takže $\sin 11{,}25° = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$.

20. Algebraickými úpravami lze levou stranu rovnice upravit do tvaru $\tan\frac{x}{2}$, tzn. rovnice je splněna pro všechna $x \in \mathbb{R}$, pro něž je definována, tj. $x \neq \pi + 2k\pi$ a $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$ je libovolné.

21. Podle sinové věty platí $a = \frac{c\sin\alpha}{\sin\gamma}$. V libovolném trojúhelníku navíc platí $\sin\gamma = \sin\left[180° - (\alpha+\beta)\right] = \sin(\alpha+\beta)$. Uvážíme-li, že $S = \frac{1}{2}ac\sin\beta$, a dosadíme-li $a = \frac{c\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$, dostaneme dokazovaný vztah.

22. a) Podle kosinové věty vypočteme $a = 2$ cm. Pomocí sinové věty určíme úhel β, o kterém vzhledem k tomu, že nyní již známe délky všech stran trojúhelníku, víme, že je ostrý. Zjistíme, že $\beta = 45°$ a dopočteme $\gamma = 105°$.

    b) Pomocí sinové věty snadno vypočteme $b = 2r\sin\beta = 48{,}54$ cm. Na straně BC pak uvažme pomocný bod P takový, aby $|AB| = |BP|$. Vzhledem k tomu, že trojúhelník ABP je rovnoramenný se zadaným úhlem β při hlavním vrcholu, můžeme určit velikost tupého úhlu $\sphericalangle APC$. Trojúhelník APC je nyní jednoznačně určen podle věty Ssu a úlohu lze dořešit užitím sinové a kosinové věty. Výsledky $a = 64{,}71$ cm, $c = 51{,}85$ cm, $\alpha = 80°12'$ a $\gamma = 52°09'$.

23. $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{7\pi}{24} + k\frac{\pi}{2}$, $y = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $y = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $y = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $z = k\pi$, $z = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $u = \frac{\pi}{9} + k\frac{\pi}{3}$, $u = \frac{5\pi}{18} + k\frac{\pi}{3}$, $k \in \mathbb{Z}$.

24. $x \in \left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{11\pi}{6} + 2k\pi\right)$, $y \in \left(-\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{2}\right\rangle$, $z \in \left\langle\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi\right\rangle \cup \left\{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right\}$, $k \in \mathbb{Z}$.

25. $D(f) = \left\langle\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{5\pi}{3} + 2k\pi\right\rangle$, $D(g) = \left\langle\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{2}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.