

Negace výroků ¹

Základní pojmy

Negace výroku. Výrok A' utvořený z výroku A tak, že má opačnou pravdivostní hodnotu než původní výrok, nazýváme negací výroku A .

Znegujeme-li znovu výrok A' , dostaneme výrok, jehož pravdivostní hodnota je stejná jako u původního výroku A . Výroky $(A')'$ a A jsou tedy logicky ekvivalentní.

Jakýkoliv výrok znegujeme použitím obratu: *Není pravda, že...* Dostávali bychom tak krkolomné a hůře srozumitelné formulace, proto se tomuto způsobu negací výroků budeme důsledně vyhýbat.

Negace kvantifikovaných výroků.

výrok (negace) \longrightarrow	\longleftarrow negace (výrok)
Každý ... je ...	(Existuje) alespoň jeden ... (, který) není ...
(Existuje) alespoň jeden ... (, který) je ...	Žádný ... není ...
Aspoň n je ...	Nejvýše $n - 1$ je ...
Právě n je ...	Nejvýše $n - 1$ nebo alespoň $n + 1$ je ...

Obecný kvantifikátor (slovně jej vyjadřujeme některou z formulací: Každý ... je ... ; Pro všechny ... platí ... ; Libovolný ... má ... ; ...) se zneguje na existenční kvantifikátor a opačně. Obecný kvantifikátor v negativním smyslu vyjadřujeme formulací: Žádný ... není ...

Negace složených výroků.

výrok (negace) \longrightarrow	\longleftarrow negace (výrok)
$A \wedge B$	$A' \vee B'$
$A \vee B$	$A' \wedge B'$
$A \Rightarrow B$	$B' \wedge A$
$A \Leftrightarrow B$	$A' \Leftrightarrow B$ (příp. $A \Leftrightarrow B'$ nebo $(B' \wedge A) \vee (A' \wedge B)$)

Důkaz pravdivosti tvrzení uvedených v této tabulce získáte z úlohy č. 3.

¹Případné náměty k tomuto textu prosím adresujte na e-mail akob@jaroska.cz. Děkuji Aleš Kobza (autor materiálu).

Úlohy

Zadání

1. Napište negace následujících výroků a rozhodněte o jejich pravdivosti:

- (a) Číslo 84 je dělitelné třemi.
- (b) Číslo -5 je záporné.
- (c) Číslo 100 je dvojciferné.
- (d) Každé celé číslo je přirozené.
- (e) Alespoň 5 dvojciferných přirozených čísel je dělitelných deseti.
- (f) Existuje aspoň jedna kvadratická rovnice, která má právě jeden kořen.
- (g) Právě 4 prvočísla jsou jednociferná.
- (h) Žádné prvočíslu není dělitelné jedenácti.
- (i) Libovolný čtyřúhelník má nejvýše tři úhly pravé.

2. Napište negace následujících výroků:

- (a) Nejvýše pět týmů vyhrálo aspoň dvakrát extraligu.
- (b) Každý trolejbus jezdí rychlostí nejvýše 50 km/h.
- (c) Při žádné dopravní kontrole nebyla všechna auta bez závady.
- (d) Alespoň dvě televizní stanice vysílají alespoň třikrát denně zprávy.
- (e) Alespoň jedna třída má nejvýše pět vyučovacích hodin denně.

3. Dokažte, že následující formule jsou tautologie

- (a) $(A \wedge B)' \Leftrightarrow (A' \vee B')$,
- (b) $(A \vee B)' \Leftrightarrow (A' \wedge B')$,
- (c) $(A \Rightarrow B)' \Leftrightarrow (B' \wedge A)$,
- (d) $(A \Leftrightarrow B)' \Leftrightarrow (A' \Leftrightarrow B)$,
- (e) $(A \Leftrightarrow B)' \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow B')$,
- (f) $(A \Leftrightarrow B)' \Leftrightarrow [(B' \wedge A) \vee (A' \wedge B)]$.

4. Napište negace následujících výroků:

- (a) Nebude-li pršet, nezmoknem.
- (b) Matematika a fyzika jsou moje nejoblíbenější předměty.
- (c) Nakoupit půjdu až odpoledne nebo večer.
- (d) Mirka půjde do kina právě tehdy, když půjde i Helča.
- (e) Když se ráno vzbudím brzy, půjdu si zaběhat.
- (f) Číslo n je dělitelné šesti tehdy a jen tehdy, když je dělitelné dvěma a třemi.
- (g) Pokud nebude svítit sluníčko, bude nám zima.
- (h) Aleš nemá rád kávu nebo mléko.
- (i) Jestliže není výtah v provozu, musíme jít k našemu bytu po schodech.
- (j) K obědu jsem měl polévku a hlavní jídlo.

Výsledky

1. Pravdivé jsou výroky (a), (b), (e), (f), (g). Negace:
 - (a) Číslo 84 není dělitelné třemi.
 - (b) Číslo -5 není záporné. (Číslo -5 je nezáporné.)
 - (c) Číslo 100 není dvojciferné.
 - (d) Alespoň jedno celé číslo není přirozené.
 - (e) Nejvýše 4 dvojciferná přirozená čísla jsou dělitelná deseti.
 - (f) Žádná kvadratická rovnice nemá právě jeden kořen. (Každá kvadratická rovnice má alespoň dva kořeny nebo nemá kořen žádný.)
 - (g) Nejvýše 3 nebo alespoň 5 prvočísel je jednociferných. (Pozor! Výrok: „Právě 4 prvočísla nejsou jednociferná.“ není negací výroku původního.)
 - (h) Aspoň jedno prvočíslo je dělitelné jedenácti.
 - (i) Alespoň jeden čtyřúhelník nemá nejvýše tři úhly pravé. (Případně: „Alespoň jeden čtyřúhelník má alespoň čtyři úhly pravé.“) (Pozor! Výrok: „Libovolný čtyřúhelník má alespoň čtyři úhly pravé.“ není negací výroku původního.)
2. Všimněte si, že negace je třeba provádět z pohledu prvního kvantifikátoru ve větě.
 - (a) Alespoň 6 týmů vyhrálo aspoň dvakrát extraligu. (Pozor! Výrok: „Nejvýše pět týmů vyhrálo nejvýše jednou extraligu.“ není negací výroku původního.)
 - (b) Alespoň jeden trolejbus nejezdí rychlostí nejvýše 50 km/h.
 - (c) Při alespoň jedné dopravní kontrole byla všechna auta bez závady.
 - (d) Nejvýše jedna televizní stanice vysílá alespoň třikrát denně zprávy.
 - (e) Žádná třída nemá nejvýše pět vyučovacích hodin denně.
3. Důkazy provedete pomocí tabulky, která má ve všech případech 4 řádky. Skutečnost, že každá z uvedených formulí je tautologií, dokazuje pravdivost údajů uvedených v tabulce o negacích složených výroků (viz výše).
4. V závorce před každým výrokem je uveden tvar původního výroku, který byl negován.
 - (a) (implikace) Zmokneme a nebude pršet.
 - (b) (konjunkce) Matematika nebo fyzika nejsou moje nejoblíbenější předměty.
 - (c) (disjunkce) Nakoupit nepůjdu odpoledne ani večer.
 - (d) (ekvivalence) Mirka půjde do kina právě tehdy, když nepůjde Helča.
 - (e) (implikace) Ráno se vzbudím brzy a nepůjdu si zaběhat.
 - (f) (ekvivalence) Číslo n není dělitelné šesti tehdy a jen tehdy, když je dělitelné dvěma a třemi.
 - (g) (implikace) Nebude svítit sluníčko a nebude nám zima.
 - (h) (disjunkce) Aleš má rád kávu a mléko.
 - (i) (implikace) Výtah není v provozu a nemusíme jít k našemu bytu po schodech.
 - (j) (konjunkce) K obědu jsem neměl polévku nebo hlavní jídlo.