

# Výroky - slovní úlohy <sup>1</sup>

## Zadání úloh

1. Uvažujme výrokové formy:

$A$  : Součet čísel  $a$  a  $b$  je kladný.

$B$  : Alespoň jedno z čísel  $a$  a  $b$  je kladné.

(a) Napište slovní formulaci ekvivalence  $A \Leftrightarrow B$  a rozhodněte, zda tato ekvivalence platí pro libovolná reálná čísla  $a$  a  $b$ . Svě tvrzení zdůvodněte.

(b) Napište slovní formulaci negace implikace  $A \Rightarrow B$ .

2. U následujících úloh zadané podmínky přepište do výrokových forem a následně je řešte pomocí tabulky pravdivostních hodnot.

(a) V jistém městě je možné natankovat pohonné hmoty u čerpacích stanic  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . Určete všechny možnosti otevření stanic, víte-li, že

- stanice  $A$  nebo  $C$  jsou vždy v provozu,
- stanice  $C$  je mimo provoz právě tehdy, když je otevřeno v  $A$ ,
- je-li otevřeno v  $C$ , pak  $A$  není v provozu a je v provozu  $B$ .

(b) Pro funkci kontrolora obráběcích strojů jsou vyškoleni zaměstnanci  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . Víme, že pro jejich přítomnost na pracovišti platí

- není-li přítomen aspoň jeden z dvojice  $A$  a  $C$  je přítomen  $B$ ,
- jsou-li přítomni  $A$  a  $B$ , není přítomen  $C$ .

Kteří z nich mohou být v tomto okamžiku na pracovišti? Lze ze zadaných podmínek usoudit, že není-li přítomen  $B$ , je přítomen  $C$ ?

(c) Detektiv Babočka sleduje podvodníka, který vyhledává oběti v šesti kavárnách -  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $E$ ,  $F$ . Podvodník navštíví v témže dni vždy  $A$  nebo  $C$ ,  $B$  nebo  $F$  a  $D$  nebo  $E$ . V témž dni nikdy nenavštíví současně  $B$  a  $D$  a rovněž nejde do alespoň jedné z  $C$  a  $F$ . Babočka chce podvodníka dnes chytit. Ví, že dnes již navštívil podniky  $A$ ,  $E$ , a  $F$ . Proto jde do kavárny  $B$ . Míří tam podvodník taky?

3. Následující úlohy se odehrávají na ostrově, kde žijí obyvatelé právě dvou povah - pravdomluvní a lháři. Jakékoliv sdělení pravdomluvného obyvatele tohoto ostrova je vždy pravdivé, každý výrok lháře je nepravdivý. U každé z následujících úloh najděte všechna řešení.

(a) Zjistěte povahy tří obyvatel tohoto ostrova, označme je  $A$ ,  $B$  a  $C$ , kteří pronesli následující výroky.

$A$ : Všichni jsme lháři.

$B$ :  $C$  je pravdomluvný nebo  $A$  je lhář.

$C$ :  $A$  a  $B$  nemají stejnou povahu.

(b) Zjistěte povahy tří obyvatel tohoto ostrova, označme je  $A$ ,  $B$  a  $C$ , kteří pronesli následující výroky.

$A$ : Alespoň 2 z nás jsou lháři.

$B$ : Pokud  $C$  je lhář, tak já jsem pravdomluvný.

(c) Zjistěte povahy tří obyvatel tohoto ostrova, označme je  $A$ ,  $B$  a  $C$ , kteří pronesli následující výroky.

$A$ : Všichni jsme pravdomluvní.

$B$ : Jestliže  $A$  je lhář, tak i  $C$  je lhář.

(d) Zjistěte povahy tří obyvatel tohoto ostrova, označme je  $A$ ,  $B$  a  $C$ , kteří pronesli následující výroky.

$A$ :  $B$  je pravdomluvný a  $C$  je lhář.

$B$ :  $A$  je pravdomluvný nebo  $C$  je lhář.

$C$ :  $A$  je pravdomluvný právě tehdy, když i  $B$  je pravdomluvný.

---

<sup>1</sup>Případné náměty k tomuto textu prosím adresujte na e-mail akob@jaroska.cz. Děkuji Aleš Kobza (autor materiálu).

- (e) Tři umělci z tohoto ostrova vyrobili celkem tři skřínky - zlatou, stříbrnou a dřevěnou. Každý umělec zhotovil jednu z těchto skříněk a umístil na ni svůj nápis. V právě jedné z těchto skříněk je ukrytý poklad. Zjistěte, kde tento poklad je a určete povahy autorů všech skříněk, víte-li, že jsou na nich následující nápisy.

Zlatá: Jestliže tuto skřínku zhotovil pravdomluvný umělec, pak stříbrnou skřínku vyrobil lhář.

Stříbrná: Poklad je ve zlaté skřínce.

Dřevěná: Poklad je v této skřínce a autorem stříbrné skřínky je lhář.

- (f)  $A$  řekne: "Pokud jsem poctivec, pak  $P$ ." Dá se odtud určit, zda  $A$  je pravdomluvný nebo lhář? Můžeme rozhodnout o pravdivostní hodnotě výroku  $P$ ? Svě tvrzení zdůvodněte!
- (g) Předpokládejme, že každého z obyvatel našeho ostrova lze zařadit do jedné ze skupin - boháč či chudšas. Jistý obyvatel, který se dá charakterizovat jako bohatý pravdomluvec se zamiluje do děvčete, o kterém ví, že si chce vzít jedině bohatého pravdomluvce. Jakým výrokiem se jí má představit, aby z jediné jeho krátké věty (nikoliv souvětí) poznala, že on skutečně je bohatý pravdomluvec? Zdůvodněte!

4. Na výstavě psů bylo třeba umístit deset psů: dva německé ovčáky, dva pudly, jednoho buldoka a pět pinčů. K dispozici byly tři kotce. Pro umístění byly stanoveny tyto podmínky.

- Dva pudli budou umístěni v témže kotci.
- V prvním kotci bude alespoň jeden německý ovčák.
- Ve třetím kotci bude méně psů než v každém z předchozích dvou, avšak alespoň dva.
- V každém kotci bude alespoň jeden pinč.
- Pudl a buldok nesmí být spolu.
- Ve druhém kotci budou psi tří rozdílných ras.

Najděte všechna řešení úlohy (tzn. zjistěte, kolik existuje možných rozdělení podle ras psů - v patřičných počtech - do jednotlivých kotců). U každého z následujících tvrzení pak rozhodněte o jeho pravdivosti, případně vysvětlete proč se může jednat o nerozhodnutelné tvrzení. Svě tvrzení zdůvodněte.

- (a) Ve druhém kotci nebude německý ovčák.  
(b) V prvním kotci nebude buldok.  
(c) Ve třetím kotci bude pudl.  
(d) Ve třetím kotci budou tři psi.  
(e) Ve třetím kotci nebude německý ovčák.

## Výsledky úloh

1. (a) Ekvivalence: „Součet čísel  $a$  a  $b$  je kladný právě tehdy, když alespoň jedno z čísel  $a$  a  $b$  je kladné“ obecně neplatí. Ke zdůvodnění stačí uvést jakýkoliv konkrétní příklad - třeba součet  $-2+1$  není kladný. Místo podtržených slov lze použít jiné spojení, např. tehdy a jen tehdy, když a jen když.  
(b) Součet čísel  $a$  a  $b$  je kladný a žádné z čísel  $a$  a  $b$  není kladné. Případně lze použít jinou formulaci. Součet  $a + b$  je kladný a každé z čísel  $a$  a  $b$  je nekladné.
2. V závorce jsou uvedeny podmínky, které mají platit dle zadání, za závorkou pak výsledky (tj. výčet všech případů, kdy jsou uvedené podmínky splněny)
- (a)  $(A \vee C, C' \Leftrightarrow A \wedge C \Rightarrow (A' \wedge B)), A, B, C'; A, B', C'$  a  $A', B, C$ .
- (b)  $((A' \vee C') \Rightarrow B$  a  $(A \wedge B) \Rightarrow C')$ , mohou být přítomni  $A + B, A + C, B + C, B$ , ano.
- (c) (Má platit  $A \vee C, B \vee F, D \vee E, (B \wedge D)'$  a  $C' \vee F'$ .) Ze zadání víme, že  $A = E = F = 1$ , aby byla splněna poslední podmínka, je nutné, aby  $C = 0$ . Takže stačí tabulka o 4 řádcích pro proměnné  $B$  a  $D$ , v níž ověřujeme platnost  $(B \wedge D)'$ . Zjistíme tak, že pachatel jde buď do  $B$ , nebo do  $D$ , nebo dnes už nikam. Babočkovy šance na úspěch tedy nejsou nejvyšší...

3. Obecným postupem u tohoto typu úloh je předpokládat o jednom obyvatele nejprve, že je poctivec a dále vyvozovat, co z této skutečnosti a jeho výroku plyne. Bez ohledu na to, zda takto najdeme řešení či spor, je třeba dále uvažovat případ, že tento obywatel je padouch, a postupovat stejně jako v předchozím. Podrobné řešení je rozepsáno v částech (a) a (e).
- (a) Kdyby  $A$  byl pravdomluvný, lhal by o sobě, že je lhář, což by byl spor. Proto je výrok  $A$  nepravdivý, takže  $A$  je lhář. Druhá část alternativy, kterou vyslovil  $B$ , je pravdivý výrok, což znamená, že je pravdivá i celá tato alternativa, ovšem nelze z ní zjistit povahu  $C$ .  $B$  je tedy pravdomluvný. Vidíme proto, že  $C$  ve svém výroku nelže.  $C$  je tudíž také pravdomluvný. Úloha má jediné řešení.
  - (b) Úloha má 2 řešení:  $A$  je pravdomluvný,  $B$  a  $C$  lháři nebo  $A$  je lhář a  $B$  a  $C$  jsou pravdomluvní.
  - (c) Úloha má 3 řešení: všichni jsou pravdomluvní nebo jediným pravdomluvným je  $B$  nebo jediným pravdomluvným je  $C$ .
  - (d) Úloha má jediné řešení:  $A$  a  $B$  jsou lháři,  $C$  je pravdomluvný.
  - (e) Kdyby zlatou skříňku zhotovil lhář, pak by předpoklad implikace, která je na ní napsána, byl nepravdivý, což by ale znamenalo pravdivost této implikace. To by ovšem byl spor s tím, že jde o výrok lháře. Autor zlaté skříňky je tedy pravdomluvný, proto stříbrnou skříňku musel vyrobit lhář. Platí tedy, že poklad není ve zlaté skříňce. Nyní se řešení větví.
    - i. V případě, že je autor dřevěné skříňky pravdomluvný, je v ní poklad (první řešení).
    - ii. Je-li však autor dřevěné skříňky lhář, pak má platit, že poklad v dřevěné skříňce není nebo stříbrnou skříňku nevyrobil lhář. Protože však již víme, že autorem stříbrné skříňky je lhář, bude uvedená alternativa pravdivá jedinečně, platí-li její první část. To tedy znamená, že poklad je ve stříbrné skříňce (druhé řešení).
  - (f)  $A$  je pravdomluvný, proto platí předpoklad implikace, kterou vyslovil, takže i  $P$  je pravdivý výrok.
  - (g) Stačí, aby řekl: „Nejsem chudý pravdomluvec.“ Případně: „Jsem bohatý nebo padouch.“
4. Úloha má 6 řešení. V každém z nich jsou v 1. a 2. kotci německý ovčák a pinč, ve 3. kotci pak pinč. Dále je uveden způsob rozdělení zbylých pěti psů.
- (a) 1. kotec: 2 pudli, pinč; 2. kotec: buldok; 3. kotec: pinč,
  - (b) 1. kotec: 2 pudli; 2. kotec: buldok, pinč; 3. kotec: pinč,
  - (c) 1. kotec: buldok; 2. kotec: 2 pudli, pinč; 3. kotec: pinč,
  - (d) 1. kotec: buldok, pinč; 2. kotec: 2 pudli; 3. kotec: pinč,
  - (e) 1. kotec: 2 pinči; 2. kotec: 2 pudli; 3. kotec: buldok,
  - (f) 1. kotec: pinč; 2. kotec: 2 pudli, pinč; 3. kotec: buldok.

Proto jsou tvrzení (a), (c) a (d) nepravdivá, (b) nerozhodnutelné (existují řešení, pro něž je uvedené tvrzení pravdivé, ale existují jiná řešení, pro která uvedené tvrzení pravdivé není), (e) je pravdivé.