Matematika

Základní poznatky z matematiky

PRO GYMNÁZIA

PROMETHEUS®

Jč

m+f

2. ČÍSELNÉ OBORY

2.1 Druhy čísel

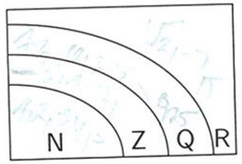
Připomeňme si, které druhy čísel již známe a k čemu se v praxi používají.

Přirozená čísla 1, 2, 3, 4, 5, ...	slouží k vyjádření počtu osob, zvířat, předmětů apod.
Celá čísla ..., −2, −1, 0, 1, 2, ...	umožňují vyjádřit změny těchto počtů a jejich porovnání (přírůstek, úbytek), změny stavů apod.
Racionální čísla např. $\frac{1}{2}$; −0,25; 0; 3,6; $-2\frac{1}{2}$; 5	se používají k vyjádření počtu dílů celku, počtu celků a jejich dílů, změn těchto počtů apod.
Reálná čísla např. $\sqrt{2}$; −5; 0,4; π; 1; sin 60°	umožňují vyjádření výsledků měření délek, obsahů, objemů, fyzikálních stavů těles a jejich změn

Pro číselné množiny se používá označení:

N ...... množina všech **přirozených** čísel
Z ...... množina všech **celých** čísel
Q ...... množina všech **racionálních** čísel
R ...... množina všech **reálných** čísel

Uvedené číselné množiny jsou ve vzájemném vztahu, který je schematicky znázorněn na obr. 2.1.



Obr. 2.1

Kromě těchto množin budeme (např. při zápisech definičních oborů proměnné) užívat i jiné číselné množiny.

V průběhu studia matematiky se setkáváme se zápisy:

N_0 ...... množina všech celých nezáporných čísel (všechna přirozená čísla a číslo nula)
Z^- ...... množina všech celých záporných čísel
R^+ ...... množina všech kladných reálných čísel
R_0^+ ...... množina všech nezáporných reálných čísel (všechna kladná reálná čísla a nula)

Jsou-li v množině čísel určitého druhu definovány operace sčítání a násobení, mluvíme o **číselném oboru**.

Poznámka. V učebnicích i odborné matematické literatuře bývá někdy mezi přirozená čísla počítána rovněž nula. Je to věcí dohody. V této učebnici nebudeme považovat nulu za přirozené číslo.

Úlohy

2.1 Překreslete schéma, které je na obr. 2.1, a do příslušných částí schématu vepište příklady čísel z jednotlivých číselných oborů.

2.2 Uveďte příklady celých čísel, která nejsou přirozenými čísly. Ukažte tu část schématu, kam byste taková čísla zakreslili. −5, −10

2.3 Rozhodněte, zda každé přirozené číslo je zároveň číslo celé. ANO

2.4 Rozhodněte, zda každé celé číslo je zároveň také číslo přirozené. NE

2.5 Ukažte tu část schématu, kam zakreslíte číslo π, o kterém víte, že není racionální. R

2.2 Obor přirozených čísel

Přesná matematická definice přirozeného čísla je poměrně složitá, proto ji nevyslovíme a spokojíme se s tím, že o libovolném čísle dovedeme rozhodnout, zda je, či není přirozeným číslem.

Přirozená čísla dovedeme jmenovat, zapisovat číslicemi a znázorňovat na číselné ose. Rozlišujeme významy slov **číslice** (**cifra**) a **číslo**. Číslice jsou grafické znaky, které slouží k zápisu čísel. Slova jednička, dvojka, trojka, ... jsou názvy číslic, zatímco slova jedna, dvě, tři, ... znamenají čísla.

Základní operace s přirozenými čísly jsou sčítání a násobení. Důležité poznatky o těchto dvou operacích s přirozenými čísly shrneme v následujících větách.

Pro každá tři přirozená čísla a, b, c **platí:**

Součet $a+b$ je přirozené číslo	Součin $a \cdot b$ je přirozené číslo	(U)
$a+(b+c)=(a+b)+c$	$a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$	(A)
$a+b=b+a$	$a\cdot b=b\cdot a$	(K)
	$1\cdot a=a$	(N)
$a(b+c)=ab+ac$		(D)

Všimněte si nápadné obdoby vlastností sčítání a násobení zapsaných v prvních třech operacích. Označení v posledním sloupci znamená:

(U) **věty o uzavřenosti** oboru vzhledem ke sčítání a násobení (součtem a stejně tak součinem libovolných přirozených čísel je vždy přirozené číslo)

(A) **věty o asociativnosti** sčítání a násobení (sčítance při součtu, resp. činitele při násobení můžeme libovolně sdružovat)

(K) **věty o komutativnosti** sčítání a násobení (pořadí sčítanců při součtu, resp. pořadí činitelů při násobení můžeme zaměnit)

(N) **věta o neutrálnosti** čísla 1 vzhledem k násobení (číslo 1 je neutrálním prvkem vzhledem k operaci násobení přirozených čísel)

(D) **věta o distributivnosti** násobení vzhledem ke sčítání (násobíme-li číslem součet dvou nebo více čísel, vynásobíme tímto číslem každého sčítance)

Ostatní operace v oboru přirozených čísel, tj. odčítání, dělení a umocňování, můžeme definovat pomocí základních operací (tj. sčítání a násobení).

Rozdíl $a-b$ dvou přirozených čísel a, b je to přirozené číslo x, pro které platí $a=b+x$.

Podíl $a:b$ dvou přirozených čísel a, b je to přirozené číslo x, pro které platí $a=b\cdot x$.

Mocnina a^b dvou přirozených čísel a, b je to přirozené číslo, které je součinem b činitelů rovnajících se číslu a.

Příklad 1

Rozdíl $7-3$ čísel 7 a 3 (v tomto pořadí) je číslo 4, protože $7=3+4$.
Podíl $15:5$ čísel 15 a 5 (v tomto pořadí) je číslo 3, protože $15=5\cdot 3$.
Mocnina 3^5 je číslo 243, protože $243=3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3$.

Uvědomme si, že výsledky rozdílu nebo podílu přirozených čísel nemusí být vždy přirozená čísla. Pro některé dvojice přirozených čísel a, b neexistuje přirozené číslo x, pro které platí $a=b+x$, resp. $a=b\cdot x$. Zapamatujeme si, že obor přirozených čísel je uzavřený vzhledem ke sčítání a násobení.

Příklad 2

Rozdíl $3-7$ čísel 3 a 7 (v tomto pořadí) je číslo -4, to však není číslo přirozené.

Podíl 5 : 15 čísel 5 a 15 (v tomto pořadí) je číslo $\frac{1}{3}$, to však není číslo přirozené.

Úlohy

2.6 Určete, za jakých podmínek je rozdíl $a - b$ dvou přirozených čísel a, b číslo přirozené. $a > b$

2.7 Využijte asociativnost a komutativnost sčítání a násobení přirozených čísel a co nejúsporněji vypočítejte:

a) $28 + 33 + 7 + 22$ $= 90$

b) $31 + 16 + 49 + 64$ $= 80 + 80 = 160$

c) $5 \cdot 327 \cdot 2$ $= 3270$

d) $4 \cdot 129 \cdot 25$ $= 100 \cdot 129 = 12900$

2.8 Využitím distributivnosti vypočítejte:

a) $3 \cdot 658 + 7 \cdot 658$ $= 10 \cdot 658 = 6580$

b) $2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^3$ $= 5 \cdot 1000 = 5000$

c) $2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^4$ $= 32 \cdot 10^3 =$ ~~5000000~~

2.3 Obor celých čísel

Jestliže jste správně vyřešili úlohu 2.6, zjistili jste, že rozdíl $a - b$ dvou přirozených čísel je přirozené číslo, právě když $a > b$. Rozdíl $a - b$ dvou celých čísel a, b je však vždy celé číslo. Vytvořením oboru celých čísel tak získáme obor, který je uzavřený i vzhledem k odčítání.

Přehled základních vět platných pro počítání s celými čísly je rozsáhlejší než pro operace s přirozenými čísly o dvě věty. Jedna vyjadřuje uzavřenost oboru celých čísel vzhledem k odčítání, druhá je věta o neutrálnosti čísla 0 vzhledem ke sčítání celých čísel (číslo 0 je neutrálním prvkem vzhledem k operaci sčítání celých čísel).

Pro každá tři celá čísla a, b, c platí:

Součet $a + b$ je celé číslo	Součin $a \cdot b$ je celé číslo	
Rozdíl $a - b$ je celé číslo		(U)
$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	(A)
$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$	(K)
$0 + a = a$	$1 \cdot a = a$	(N)
$a(b + c) = ab + ac$		(D)

Ke každému celému číslu a existuje takové celé číslo $(-a)$, že platí $a + (-a) = 0$. Čísla a a $(-a)$ se nazývají **čísla navzájem opačná**. Opačné číslo ke kladnému číslu je číslo záporné. Opačné číslo k zápornému číslu je číslo kladné. Opačné číslo k číslu nula je číslo nula.

Příklad 1

Opačné číslo k číslu 3 je -3.
Opačné číslo k číslu 0 je 0 (zápis -0 nepoužíváme, píšeme 0).
Opačné číslo k číslu -3 je $-(-3)$ a to je 3.

Při počítání s opačnými čísly postupujeme podle těchto pravidel:

$0 - a = -a$	$-(-a) = a$	$(-1) \cdot a = -a$
$-(a + b) = -a - b$	$(-a) \cdot (-b) = ab$	$a - (-b) = a + b$
$-(a \cdot b) = (-a) \cdot b$	$a \cdot (-b) = -ab$	$a + (-b) = a - b$

Úlohy

2.9 Určete čísla opačná k číslům:

a) 5 -5 b) -13 13 c) 0 0

d) $-(7 + 13)$ 20 e) $-(2 \cdot 16)$ 32 f) $(2 - 7)$ 5

2.10 Vypočítejte zpaměti:

a) $24 - 45$ -21 b) $32 + (-47)$ -19 c) $-16 + 25$ -9

d) $-19+(-21)$ e) $17-(-35)$ f) $-28-(-39)$
g) $12\cdot(-3)$ h) $(-7)\cdot(-8)$ i) $(-2)\cdot(-3)\cdot(-4)$

2.11 Vypočítejte zpaměti:

a) $8-(-7)-(7-3)$ b) $-9-(-3)-(5-17)$
c) $(14-9)\cdot(9-14)$ d) $(13+12)\cdot(12-13)$
e) $(-3)\cdot(-7)-15:3$ f) $24:6-8$
g) $3\cdot125-5\cdot125$ h) $(7-3)\cdot314+(6-11)\cdot314$

2.12 Seřaďte daná čísla od nejmenšího k největšímu:

a) 6, −3, −6, 3 b) −10, 7, 0, −3, 2

2.13 Zjistěte, zda v oboru celých čísel platí věta o asociativnosti odčítání.

2.14 Rozhodněte, zda podíl libovolných dvou celých čísel je celé číslo.

2.15 Rozhodněte, zda výraz $(-x)$ nabývá vždy záporné hodnoty, jestliže proměnná x je libovolné celé číslo.

NE

2.4 Obor racionálních čísel

Množina Q všech racionálních čísel obsahuje právě ta čísla, jež lze vyjádřit ve tvaru zlomku $\dfrac{p}{q}$, kde p je celé číslo a q je přirozené číslo. Tento zápis však není jednoznačný; každé racionální číslo lze vyjádřit ve tvaru zlomku nekonečně mnoha způsoby krácením či rozšiřováním daného zlomku. Mezi všemi těmito vyjádřeními existuje jediné, které má tu vlastnost, že čísla p, q jsou nesoudělná (jejich společným dělitelem je jenom číslo jedna). O takovém zlomku říkáme, že je vyjádřením daného racionálního čísla **v základním tvaru**. Např. ve skupině zlomků vyjadřujících totéž racionální číslo

$$\frac{100}{150},\ \frac{30}{45},\ \frac{14}{21},\ \frac{6}{9},\ \frac{2}{3},\ \frac{-8}{-12},\ \frac{-2}{-3},\ \frac{-18}{-27},\ \frac{-22}{-33}$$

je vyjádřením tohoto racionálního čísla v základním tvaru zlomek $\dfrac{2}{3}$.

Slovo racionální se zde používá ve významu poměrový, podílový, ne tedy ve významu rozumový jako ve filozofii. Každé číslo přirozené i každé číslo celé je číslem racionálním. Lze je totiž vyjádřit ve tvaru zlomku, jehož jmenovatel je roven jedné, např. čísla $3=\dfrac{3}{1}$, $0=\dfrac{0}{1}$, $-23=\dfrac{-23}{1}$.

Základní věty, které platí pro operace s racionálními čísly, shrneme v obdobném přehledu jako věty pro operace s přirozenými čísly.

Pro každá tři racionální čísla a, b, c platí:

Součet $a+b$ je racionální číslo	Součin $a\cdot b$ je racionální číslo	
Rozdíl $a-b$ je racionální číslo	Podíl $a:b$, kde $b\neq0$, je racionální číslo	(U)
$(a+b)+c=a+(b+c)$	$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$	(A)
$a+b=b+a$	$a\cdot b=b\cdot a$	(K)
$0+a=a$	$1\cdot a=a$	(N)
$a(b+c)=ab+ac$		(D)

Porovnáme-li věty (U) o uzavřenosti oboru celých čísel a racionálních čísel, vidíme, že obor celých čísel je uzavřený vzhledem ke sčítání, odčítání a násobení a obor racionálních čísel je navíc uzavřený i vzhledem k dělení (s výjimkou dělení nulou). To znamená, že ke dvěma libovolným racionálním číslům a, b, kde $b\neq0$, existuje racionální číslo x, které je jejich podílem. Můžeme tedy říci:

Obor racionálních čísel je uzavřený vzhledem ke sčítání, odčítání, násobení a dělení (s výjimkou dělení nulou).

Racionální čísla zapsaná zlomky $\dfrac{p}{q}$, $\dfrac{r}{s}$ v základním tvaru **porovnáváme na základě srovnání součinů** ps, qr:

$\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$, právě když $ps < qr$,

$\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$, právě když $ps = qr$,

$\frac{p}{q} > \frac{r}{s}$, právě když $ps > qr$.

Příklad 1

Porovnejte zlomky $\frac{11}{16}, \frac{32}{47}$.

Řešení

$11 \cdot 47 = 517$, $16 \cdot 32 = 512$

Platí $11 \cdot 47 > 16 \cdot 32$, to znamená, že $\frac{11}{16} > \frac{32}{47}$.

Zlomky $\frac{p}{q}, \frac{r}{s}$ můžeme porovnávat také tak, že vypočítáme jejich rozdíl $\frac{p}{q} - \frac{r}{s}$. Je-li tento rozdíl záporný, potom $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$; je-li tento rozdíl roven nule, potom $\frac{p}{q} = \frac{r}{s}$; je-li tento rozdíl kladný, potom $\frac{p}{q} > \frac{r}{s}$.

To už se ale dostáváme k základním početním výkonům se zlomky.

Pro libovolná dvě racionální čísla $\frac{p}{q}, \frac{r}{s}$ platí:

$$\frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{ps + rq}{qs} \qquad \frac{p}{q} - \frac{r}{s} = \frac{ps - rq}{qs}$$

$$\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = \frac{pr}{qs} \qquad \frac{p}{q} : \frac{r}{s} = \frac{p}{q} \cdot \frac{s}{r} = \frac{ps}{qr}, \quad \text{kde} \quad r \neq 0$$

Tato pravidla známe ze základní školy, kde jsme je slovně vyjadřovali takto:

Zlomky se stejnými jmenovateli sečteme (odečteme) tak, že součet (rozdíl) čitatelů lomíme společným jmenovatelem. Zlomky s různými jmenovateli rozšíříme tak, aby měly stejné jmenovatele.

Zlomky násobíme tak, že součin čitatelů lomíme součinem jmenovatelů.

Zlomky dělíme tak, že první zlomek (dělence) násobíme převrácenou hodnotou druhého zlomku (dělitele).

Příklad 1 můžeme pomocí rozdílu zlomků vyřešit takto:

$$\frac{11}{16} - \frac{32}{47} = \frac{11 \cdot 47 - 32 \cdot 16}{16 \cdot 47} = \frac{517 - 512}{752} = \frac{5}{752}$$

Rozdíl je kladný, a to znamená, že $\frac{11}{16} > \frac{32}{47}$.

Racionální čísla můžeme zapisovat ve tvaru

- **zlomku,**
- **desetinného čísla,**
- **nekonečného periodického desetinného rozvoje s vyznačenou periodou.**

Desetinným číslem se rozumí racionální číslo, které lze zapsat zlomkem $\frac{c}{10^n}$, kde c je celé číslo a n je přirozené číslo. Je to tedy číslo s konečným desetinným rozvojem.

Příklad 2

Zapište desetinným číslem zlomek $\frac{9}{250}$.

Řešení

$$\frac{9}{250} = \frac{9}{2 \cdot 5^3} = \frac{9 \cdot 2^2}{2 \cdot 5^3 \cdot 2^2} = \frac{36}{1\,000} = 0{,}036$$

Stejný výsledek získáme, dělíme-li čitatele jmenovatelem zlomku:

$9 : 250 = 0{,}036$
90
900
1500
0

Každé racionální číslo se však nedá vyjádřit desetinným číslem. Jestliže při rozkladu jmenovatele zlomku v základním tvaru na součin prvočinitelů dostaneme i jiné prvočinitele než 2 nebo 5, pak zlomek nelze vyjádřit ve tvaru konečného desetinného rozvoje. Nelze jej totiž rozšířit tak, aby v jeho jmenovateli byla jen mocnina čísla 10.

Příklad 3

Ve tvaru desetinného rozvoje zapište zlomky:

a) $\frac{10}{33}$ b) $\frac{15}{22}$

Řešení

Jmenovatel prvního zlomku se dá rozložit na součin $3 \cdot 11$, jmenovatel druhého zlomku lze rozložit na $2 \cdot 11$. V rozkladu obou jmenovatelů se vyskytuje číslo 11, tedy jiné než 2 nebo 5, proto se žádný z daných zlomků nedá vyjádřit desetinným číslem. Můžeme se o tom přesvědčit dělením:

$$\begin{array}{l} 10 : 33 = 0{,}3030\ldots \\ 100 \\ \ \ 10 \\ \ \ 100 \\ \ \ \ \ 10 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 15 : 22 = 0{,}68181\ldots \\ 150 \\ \ \ 180 \\ \ \ \ \ 40 \\ \ \ 180 \\ \ \ \ \ 40 \\ \ \ \ \ 18 \end{array}$$

V obou případech můžeme v dělení libovolně dlouho pokračovat, zbytek je stále nenulové číslo. Protože se při výpočtu začnou opakovat zbytky, opakuje se v desetinném rozvoji čísla stejná skupina číslic. Tato skupina číslic se nazývá **perioda**. Při zápise čísla vyznačíme nad periodou pruh a dále tyto číslice nepíšeme:

$$\frac{10}{33} = 0{,}\overline{30} \qquad \frac{15}{22} = 0{,}6\overline{81}$$

Periodou je u prvního čísla skupina číslic 30, v druhém čísle skupina číslic 81.

V nekonečném desetinném rozvoji racionálního čísla se může před periodou vyskytnout skupina číslic, která se neopakuje. Takový rozvoj se nazývá **neryze periodický** a skupina neopakujících se číslic se nazývá **předperioda**. Rozvoj, v němž se předperioda nevyskytuje, se nazývá **ryze periodický**. Číslo $0{,}6\overline{81}$ je příkladem neryze periodického rozvoje, číslice 6 je předperioda. Číslo $0{,}\overline{30}$ je příkladem ryze periodického rozvoje.

Také čísla zapsaná desetinnými rozvoji a čísla zapsaná zlomky dovedeme porovnávat. Např. číslo $\frac{11}{16}$ je větší než číslo $0{,}687\,4$, protože $\frac{11}{16} = 0{,}687\,5$. Při stejném počtu desetin, setin a tisícin je počet desetitisícin v čísle $\frac{11}{16}$ o 1 větší než v čísle $0{,}687\,4$.

Příklad 4

Daná desetinná čísla vyjádřete ve tvaru zlomku v základním tvaru:

a) 0,9 b) 0,75 c) 8,765

Řešení

a) $0{,}9 = \frac{9}{10}$

b) $0{,}75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$

c) $8{,}765 = \frac{8\,765}{1\,000} = \frac{1\,753}{200}$

Každé desetinné číslo můžeme zapsat jako desetinný zlomek, v jehož jmenovateli je přirozená mocnina deseti (tj. 10^n, $n \in \mathsf{N}$). Někdy jej můžeme krácením vyjádřit zlomkem s jiným jmenovatelem. Dokonce existuje postup, jak lze vyjádřit libovolné číslo s nekonečným periodickým rozvojem ve tvaru zlomku. S tímto postupem se seznámíme až v tématu Posloupnosti a řady.

Poznámka. Pokud chcete převedení periodického desetinného čísla vyzkoušet hned, promyslete si následující příklad. Označme

$$a = 0{,}\overline{3}. \tag{1}$$

Pak

$$10a = 3{,}\overline{3}. \qquad (2)$$

Odečteme-li (1) od (2), dostaneme:

$$10a - a = 3{,}\overline{3} - 0{,}\overline{3}$$
$$9a = 3$$
$$a = \frac{1}{3}$$

Vyzkoušejte si uvedený postup například pro číslo $a = 0{,}0\overline{5}$.

Příklad 5

Uspořádejte vzestupně racionální čísla $\frac{1}{3}$; $\frac{11}{32}$; 0,34.

Řešení

a) 1. způsob — daná čísla vyjádříme desetinnými rozvoji

$\frac{1}{3} = 0{,}\overline{3}$; $0{,}\overline{3} < 0{,}34$ ... rozhoduje počet setin

$\frac{11}{32} > 0{,}343$; $0{,}34 < \frac{11}{32}$ ... rozhoduje počet tisícin

Závěr: $\frac{1}{3} < 0{,}34 < \frac{11}{32}$

b) 2. způsob — daná čísla vyjádříme zlomky

$\frac{1}{3}$; $\frac{11}{32}$; $0{,}34 = \frac{34}{100} = \frac{17}{50}$

Porovnáme $\frac{1}{3}$ a $\frac{17}{50}$:

$1 \cdot 50 = 50$, $3 \cdot 17 = 51$; $50 < 51$, to znamená, že $\frac{1}{3} < \frac{17}{50}$

Porovnáme $\frac{17}{50}$ a $\frac{11}{32}$:

$17 \cdot 32 = 544$, $11 \cdot 50 = 550$; $544 < 550$, to znamená, že $\frac{17}{50} < \frac{11}{32}$

Závěr: $\frac{1}{3} < 0{,}34 < \frac{11}{32}$

Některá racionální čísla (větší než jedna nebo menší než minus jedna) zapisujeme jako **smíšená čísla**. Například číslo $\frac{29}{13}$, které je zapsáno zlomkem v základním tvaru, můžeme zapsat jako smíšené číslo $2\frac{3}{13}$ (čteme: dvě a tři třináctiny, nikoli dvě krát tři třináctiny). Se smíšenými čísly jste se naučili počítat na základní škole. Připomeňme si proto jen převedení smíšeného čísla na zlomek a obráceně.

Příklad 6

a) Zapište smíšená čísla $7\frac{3}{11}$ a $-5\frac{2}{7}$ jako zlomky.

b) Zapište zlomky $\frac{25}{6}$ a $-\frac{58}{9}$ jako smíšená čísla.

Řešení

a) $7\frac{3}{11} = 7 + \frac{3}{11} = \frac{77+3}{11} = \frac{80}{11}$

$-5\frac{2}{7} = -\left(5 + \frac{2}{7}\right) = -\frac{35+2}{7} = -\frac{37}{7}$

b) Největší násobek čísla 6 menší než 25 je 24. Proto $\frac{25}{6} = \frac{24+1}{6} = $

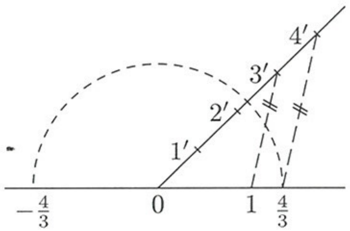
$= 4 + \frac{1}{6} = 4\frac{1}{6}$.

Největší násobek čísla 9 menší než 58 je 54. Proto $-\frac{58}{9} =$

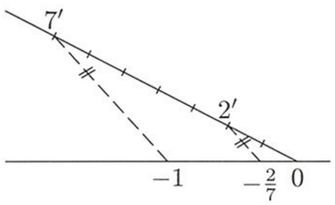
$= \frac{-54-4}{9} = -6 - \frac{4}{9} = -\left(6 + \frac{4}{9}\right) = -6\frac{4}{9}$.

V závěru článku si připomeňme a upřesněme grafické znázorňování racionálních čísel na číselné ose. **Číselná osa** je přímka, na které znázorňujeme čísla. Volíme ji zpravidla vodorovnou. Na číselné ose jsme se postupně naučili znázorňovat čísla přirozená, celá i čísla racionální.

Na přímce, která bude znázorňovat číselnou osu, nejprve zvolíme bod znázorňující číslo 0; tento bod nazýváme **počátek**. Vpravo od počátku leží obrazy kladných čísel, vlevo obrazy záporných čísel. Dále zvolíme jednotkovou úsečku a sestrojíme obraz čísla 1. Obraz čísla 1 leží vpravo od počátku; jeho vzdálenost od počátku se rovná délce jednotkové úsečky. Máme-li např. sestrojit obraz čísla $\frac{4}{3}$, sestrojíme užitím podobných trojúhelníků úsečku, jejíž délka je rovna $\frac{4}{3}$ délky jednotkové úsečky (obr. 2.2). Obraz opačného čísla $-\frac{4}{3}$ leží vlevo od počátku; vzdálenosti obrazů navzájem opačných čísel od počátku se sobě rovnají. Na obr. 2.3 je sestrojen obraz čísla $-\frac{2}{7}$. Pro uspořádání čísel na číselné ose platí, že **obraz většího čísla je vždy vpravo od obrazu čísla menšího.**



Obr. 2.2



Obr. 2.3

A nyní se naskýtá otázka: Je každý bod číselné osy obrazem určitého racionálního čísla?

Odpověď závisí na tom, zda délka každé úsečky je vyjádřena racionálním číslem. Víme např., že délka úhlopříčky čtverce, jehož strana má jednotkovou délku, je rovna $\sqrt{2}$, avšak $\sqrt{2}$ není racionální číslo. Dovedeme tedy sestrojit obraz čísla $\sqrt{2}$, přitom tento bod číselné osy není obrazem racionálního čísla. Odpověď na danou otázku je proto záporná:

Některé body číselné osy nejsou obrazy racionálních čísel.

Úlohy

2.16 Daná racionální čísla zapište zlomkem v základním tvaru:

a) $\frac{180}{252}$ b) $-\frac{108}{144}$ c) $\frac{180}{135}$ d) $-\frac{264}{440}$

2.17 Daná desetinná čísla vyjádřete zlomkem v základním tvaru:

a) 0,4 b) 0,625 c) 0,006 4 d) 0,031 25

2.18 Rozhodněte, kolik různých racionálních čísel je zapsáno v tomto seznamu a zapište je zlomkem v základním tvaru:

$\frac{63}{168}$; $\frac{120}{96}$; $1\frac{1}{4}$; 0,375; $\frac{81}{216}$; $\frac{270}{216}$; 1,25; $\frac{48}{128}$

2.19 Uspořádejte daná racionální čísla od nejmenšího k největšímu:

a) $\frac{7}{12}$, $-\frac{4}{7}$, $\frac{41}{72}$ b) $\frac{5}{8}$, 0, $-\frac{2}{3}$, $\frac{9}{14}$

c) $\frac{64}{180}$, $\frac{5}{14}$, $\frac{34}{98}$ d) $\frac{5}{18}$, $-\frac{3}{16}$, $-\frac{2}{11}$, $\frac{6}{23}$

2.20 Uspořádejte daná racionální čísla od největšího k nejmenšímu:

a) $2\frac{1}{4}$; 2,3; $\frac{12}{5}$; $2,\overline{3}$ b) $-2,7$; $-\frac{13}{5}$; $-2\frac{3}{4}$; $-2,\overline{6}$

c) $\frac{4}{7}$; 0,6; $-\frac{4}{7}$; $-0,6$ d) 0,7; $-0,\overline{6}$; $-\frac{7}{10}$; $\frac{2}{3}$

2.21 Vypočítejte a výsledek zapište desetinným číslem:

a) $\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{8}\right)\cdot\frac{2}{5}$ b) $\left(\frac{5}{9}-\frac{3}{5}\right):\frac{2}{9}$

c) $\left(\frac{1}{8}+\frac{5}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{5}-\frac{3}{7}\right)$ d) $\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{4}\right):\left(\frac{4}{5}-\frac{5}{6}\right)$

2.22 Vypočítejte:

a) $\frac{3}{10}:\left(\frac{2}{5}-\frac{5}{12}+\frac{1}{6}\right)$ b) $\left(\frac{3}{4}-\frac{5}{12}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$

c) $\frac{5}{3}-\frac{3}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^3$ d) $\frac{5}{6}:\frac{2}{5}-\left(\frac{8}{3}-\frac{7}{2}\right)^2$

2.23 Vypočítejte:

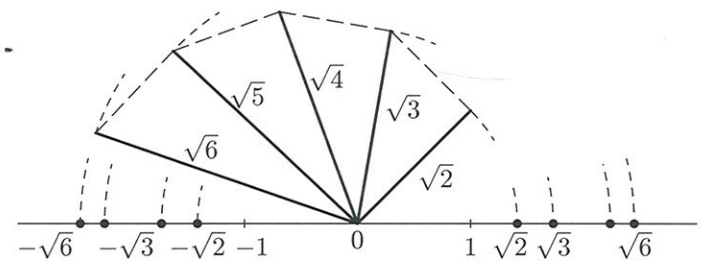
a) $\left(\frac{6}{5}-0,7\right)\cdot\frac{0,16}{0,24}$ b) $\left(\frac{2}{5}-2,6\right)\left(\frac{2}{3}-\frac{9}{11}\right)$

c) $\left(\frac{5}{3} - 1{,}5\right) : \left(\frac{8}{3} - 3\frac{1}{2}\right)$ d) $\left(3\frac{1}{7} - 2{,}25\right) : \left(\frac{3}{7} - 0{,}75\right)$

2.24 Na číselné ose znázorněte racionální čísla zapsaná zlomky $\frac{2}{3}$, $-\frac{4}{5}$, $\frac{5}{3}$, $-\frac{9}{5}$. (Některá z daných čísel je výhodné zapsat jako smíšená čísla. To vám napoví, jak můžete zjednodušit konstrukci.)

2.5 Obor reálných čísel

Při grafickém znázorňování racionálních čísel jsme zjistili, že i po znázornění všech racionálních čísel zůstanou na číselné ose „neobsazené body", neboť délky některých úseček nejsou racionální čísla. Na obr. 2.4 je naznačena konstrukce úseček, pomocí nichž lze na číselné ose vyznačit body, které neznázorňují žádné racionální číslo. Tyto body jsou zakresleny na číselné ose plnými kroužky.



Obr. 2.4

Potřeba vyjádřit délku libovolné úsečky, obsah a obvod obrazce či objem a povrch tělesa, fyzikální stavy těles a jejich změny vedla k vytvoření oboru reálných čísel.

Reálnými čísly nazýváme čísla, která vyjadřují délky úseček (při zvolené jednotkové úsečce), čísla k nim opačná a nulu. Každé reálné číslo je na číselné ose znázorněno právě jedním bodem. Každý bod číselné osy je obrazem právě jednoho reálného čísla.

Množinu všech reálných čísel tvoří čísla racionální a čísla iracionální, přitom každé reálné číslo je buď racionální, nebo iracionální. Slovo iracionální je zde ve významu „nepodílové", nikoli „nerozumné". Pokuste si vzpomenout, s kterými iracionálními čísly jste se již setkali. Jsou to mnohé odmocniny, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ atd., Ludolfovo číslo π a hodnoty některých goniometrických funkcí, např. $\sin 45°$, $\cos 30°$, $\operatorname{tg} 60°$ atd.

Iracionální čísla nelze zapsat ve tvaru $\frac{p}{q}$, kde p je číslo celé a q je číslo přirozené. Lze je charakterizovat typickou vlastností jejich zápisu v desítkové soustavě.

Iracionální čísla lze zapsat jenom takovým desetinným rozvojem, který je nekonečný a neperiodický.

Poznámka. Desetinný rozvoj iracionálního čísla π začíná takto: $\pi = 3{,}141\,592\,653\,589\,793\,238\,462\,643\,3\ldots$ Dne 13. ledna 1987 bylo Ludolfovo číslo vypočítáno na počítači NEC v Tokiu na 133 554 000 desetinných míst. Vytištěné číslo zabírá téměř 20 000 stran a podle očekávání se v tomto rozvoji nevyskytuje žádná perioda.

V praxi se iracionální čísla nahrazují desetinnými čísly, která jsou tvořena částí desetinného rozvoje zaokrouhleného na zvolený počet desetinných míst, jenž je určen požadovanou přesností výsledku. Se zaokrouhlenými čísly se rovněž setkáváme v různých údajích technického charakteru, v údajích statistických a ekonomických. Připomeňme si proto pravidlo, podle něhož čísla zaokrouhlujeme na místa určitého řádu:

Číslo zaokrouhlíme na místo daného řádu tak, že vynecháme všechny číslice, které jsou vpravo od číslice na místě daného řádu, a je-li první z vynechaných číslic

a) menší než 5, pak všechny ponechané číslice se nemění,
b) rovna nebo větší než 5, pak k číslu tvořenému ponechanými číslicemi přičteme jednu jednotku nejmenšího ponechaného řádu.

Příklad 1

Zaokrouhlete číslo π postupně na setiny, tisíciny a biliontiny.

Řešení

$\pi = 3{,}141\,592\,653\,589\,793\ldots$

Při zaokrouhlení na setiny je první z vynechaných číslic číslice 1 (na třetím desetinném místě). Protože je to číslice menší než 5, dostaneme zaokrouhlením číslo 3,14.

Při zaokrouhlení na tisíciny je první z vynechaných číslic číslice 5, proto podle uvedeného pravidla je zaokrouhlené číslo rovno 3,142.

Při zaokrouhlení na biliontiny je první z vynechaných číslic číslice 7, takže zaokrouhlením dostaneme číslo 3,141 592 653 590.

Iracionální čísla porovnáváme tak, že je nejdříve vhodně zaokrouhlíme na čísla desetinná, která již porovnávat umíme.

Příklad 2

Rozhodněte, které z čísel π a $\sqrt{9{,}87}$ je větší.

Řešení

Napíšeme desetinná čísla, kterými nahradíme daná iracionální čísla.

$$\pi \doteq 3{,}141\,592, \qquad \sqrt{9{,}87} \doteq 3{,}141\,656$$

Číslo $\sqrt{9{,}87}$ má větší počet desetitisícin než číslo π, je tedy větší.

Obor iracionálních čísel nezavádíme. Důvodem je skutečnost, že výsledky operací s iracionálními čísly, tj. součet, rozdíl, součin i podíl iracionálních čísel, nemusí být iracionální číslo. Např. pro iracionální čísla $\sqrt{2}$ a $-\sqrt{2}$ je součet, součin i podíl racionální:

$$\sqrt{2} + \left(-\sqrt{2}\right) = 0, \quad \sqrt{2} \cdot \left(-\sqrt{2}\right) = -2, \quad \sqrt{2} : \left(-\sqrt{2}\right) = -1.$$

Nemusí se však jednat o čísla navzájem opačná. I podíl $\sqrt{8} : \sqrt{2} = 2$ je číslo racionální.

Obor iracionálních čísel nezavádíme, protože množina všech iracionálních čísel není uzavřená vzhledem ke sčítání a násobení.

Zavádíme však obor reálných čísel.

Pro operace s reálnými čísly platí stejné věty jako pro operace s racionálními čísly, které jsme uvedli v článku 2.4. Zopakujte si uvedené věty s tím, že slovo racionální nahradíte slovem reálná. Jednou z důležitých vlastností množiny všech reálných čísel je to, že tato množina je uspořádaná. To znamená, že pro každá dvě reálná čísla nastane právě jedna ze tří možností: $a < b$, $a = b$, $a > b$. Při zjišťování, která z těchto možností nastala, užíváme následující vlastnosti reálných čísel.

Pro každá tři reálná čísla a, b, c **platí:**
Jestliže $a > b$ a zároveň $b > c$, pak $a > c$.
Jestliže $a > b$ a zároveň $c > 0$, pak $ac > bc$.
Jestliže $a > b$ a zároveň $c < 0$, pak $ac < bc$.
Jestliže $a > b$ a c je libovolné reálné číslo, pak $a + c > b + c$.

Pro každá čtyři reálná čísla a, b, c, d **platí:**
Jestliže $a > b$ a zároveň $c > d$, pak $a + c > b + d$.

Příklad 3

Rozhodněte, které z čísel $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$ a $1 + \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ je větší.

Řešení

Platí $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} > 1$, neboť $\sqrt{3} > \sqrt{2}$.

Zároveň platí $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} > \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, neboť $\sqrt{5} > \sqrt{2}$.

Nerovnosti $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} > 1$ a $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} > \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ můžeme podle posledního pravidla sečíst a dostaneme:

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} > 1 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

V příkladu 1 jsme si ukázali postup při zaokrouhlování racionálních čísel na místa určitého řádu. Naprosto stejně postupujeme při zaokrouhlování libovolného reálného čísla. Např. číslo 2 659 zaokrouhleno na stovky je 2 700, číslo 4,364 zaokrouhleno na setiny je 4,36.

Čísla zaokrouhlujeme na místa určitého řádu nebo na daný počet platných číslic.

Číslice zaokrouhleného čísla se nazývají **platné číslice**, přičemž se mezi ně nepočítají nuly, které stojí před první nenulovou číslicí, a také nuly na konci čísla, které vznikly zaokrouhlením.

Např.:

$345\,216 \doteq 345\,000$, $340\,216 \doteq 340\,000$; v obou případech jsou čísla zaokrouhlena na 3 platné číslice

$0{,}050\,32 \doteq 0{,}050$, $0{,}054\,32 \doteq 0{,}054$; v obou případech jsou čísla zaokrouhlena na 2 platné číslice

Příklad 4

Zaokrouhlete čísla

a) 25,5; 3,66; 374; 0,041 3; 8,012 5 na dvě platné číslice,

b) 6 666; 333,3; 5,835; 0,004 675; 4,002 138 na tři platné číslice.

Řešení

a) 26; 3,7; 370; 0,041; 8,0

b) 6 670; 333; 5,84; 0,004 68; 4,00

Úlohy

2.25 Daná reálná čísla uspořádejte od nejmenšího k největšímu:

$3{,}14$; π; $\dfrac{22}{7}$; $3{,}\overline{14}$; $\sqrt{10}$

2.26 Rozhodněte, která z reálných čísel uvedených v předcházející úloze jsou čísla iracionální.

2.27 Na obr. 2.4 jsou sestrojeny úsečky, jejichž délky se rovnají druhým odmocninám z některých přirozených čísel. Sestrojte podobným postupem úsečku délky $\sqrt{10}$.

2.28 Převráceným číslem k reálnému číslu a se nazývá reálné číslo $\overline{a}$, pro něž platí $a \cdot \overline{a} = 1$. Rozhodněte, zda existuje ke každému reálnému číslu číslo převrácené. Určete převrácená čísla k číslům:

5; -3; $\dfrac{3}{5}$; 1; 0; $-\sqrt{5}$; $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $0{,}3$; $0{,}\overline{3}$

2.29 Nechť a, b, c jsou záporná reálná čísla a d je kladné reálné číslo. Určete, která z následujících čísel jsou kladná a která záporná, jestliže platí $a < b$:

$a + b$, ab, ad, $a - b$, $c - d$, $d - c$, $c(a + b)$, $c(a - b)$, $\dfrac{a + b}{d}$, $a^2 + b^2$, $a^2 - b^2$

2.30 Zaokrouhlete čísla: 27,04; 0,023 456; 0,530 3; $\sqrt{5}$; π; 8 651

a) na tři platné číslice,

b) na dvě platné číslice.

2.31 Zaokrouhlete čísla 35,626; $\sqrt{2}$; 0,032 146; 0,007 03

a) na dvě platné číslice,

b) na setiny.

2.32 Uspořádejte podle velikosti daná reálná čísla (postupujte obdobně jako v příkladu 3):

a) $1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}} + \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$, $1 + \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$

2.6 Druhá a třetí odmocnina

V předcházejícím článku byly jako příklady iracionálních čísel uvedeny některé druhé odmocniny čísel. Připomeňme si dosavadní znalosti o druhé odmocnině reálného čísla. Začněme definicí druhé odmocniny.

Druhá odmocnina z nezáporného reálného čísla a je takové nezáporné číslo x, pro které platí $x^2 = a$. K jeho označení užíváme symbol $\sqrt{a}$.

$\sqrt{\ }$ je odmocnítko, a je základ odmocniny (odmocněnec)

Uvědomme si dvě důležité vlastnosti druhé odmocniny, které jsou obsaženy v definici, ale na které se někdy zapomíná:

1. Druhá odmocnina **je definována pouze z nezáporného reálného čísla**. Jinak řečeno, druhé odmocniny ze záporných čísel (např. $\sqrt{-5}$, $\sqrt{-3{,}26}$ apod.) nejsou definovány v oboru reálných čísel. Později tuto definici rozšíříme zavedením čísel komplexních.
2. Druhá odmocnina z nezáporného čísla **je vždy nezáporné číslo**, např. $\sqrt{4} = 2$, i když $2^2 = 4$, a rovněž $(-2)^2 = 4$. Symbol $\sqrt{4}$ musí být jednoznačný, tj. musí označovat právě jedno číslo. Stručně lze zapsat: pro každé $a \geqq 0$ je $\sqrt{a} \geqq 0$.

Užitečné vzorce pro počítání s druhými odmocninami shrnuje následující věta:

Pro každá dvě nezáporná reálná čísla a, b platí:

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}, \qquad a \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad \text{pro } b \neq 0$$

Příklad 1

Vypočítejte:

a) $\sqrt{14\,400}$ b) $\sqrt{0{,}008\,1}$ c) $\sqrt{50}$

Řešení

a) $\sqrt{14\,400} = \sqrt{144} \cdot \sqrt{100} = 12 \cdot 10 = 120$
b) $\sqrt{0{,}008\,1} = \sqrt{81 \cdot 0{,}000\,1} = \sqrt{81} \cdot \sqrt{0{,}000\,1} = 9 \cdot 0{,}01 = 0{,}09$
c) $\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

Při výpočtu jsme použili první vzorec. V příkladu 1c) jsme odmocněnce rozložili na součin dvou čísel, z nichž jedno lze odmocnit. Takové úpravě říkáme **částečné odmocňování**. Uvedený vzorec pro počítání s druhými odmocninami však můžeme použít „oběma směry“. Ukážeme si použití prvního vzorce v „opačném směru“.

Příklad 2

Vypočítejte $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$.

Řešení

$\sqrt{2} \cdot \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$

Výpočet druhé odmocniny provádíme na kalkulačce nebo pomocí tabulek. V tabulkách najdete podrobný návod pro výpočet druhé odmocniny, přímo lze vyhledat druhé odmocniny z čísel od 1 do 100.

Příklad 3

Pomocí tabulek vypočítejte:

a) $\sqrt{454{,}7}$ b) $\sqrt{4\,547}$ c) $\sqrt{0{,}004\,547}$

Řešení

a) $\sqrt{454{,}7} = \sqrt{4{,}547 \cdot 100} = \sqrt{4{,}547} \cdot \sqrt{100} \doteq 2{,}132 \cdot 10 \doteq 21{,}32$
b) $\sqrt{4\,547} = \sqrt{45{,}47 \cdot 100} = \sqrt{45{,}47} \cdot \sqrt{100} \doteq 6{,}743 \cdot 10 \doteq 67{,}43$
c) $\sqrt{0{,}004\,547} = \sqrt{45{,}47 \cdot 0{,}0001} = \sqrt{45{,}47} \cdot \sqrt{0{,}0001} \doteq 6{,}743 \cdot 0{,}01 \doteq$
$\doteq 0{,}067\,43$

Zlomky, v nichž se vyskytují odmocniny, je výhodné upravit tak, aby se ve jmenovatelích žádné odmocniny nevyskytovaly. Takový postup se nazývá **usměrňování zlomků**.

Usměrňování zlomků provádíme rozšiřováním. Rozšířit zlomek znamená vynásobit čitatele i jmenovatele zlomku týmž libovolným nenulovým číslem. Přitom se samozřejmě hodnota zlomku nezmění. Vtip řešení spočívá v nalezení vhodného nenulového čísla nebo číselného výrazu, kterým daný zlomek rozšíříme. Proto se v řešení následujícího příkladu soustřeďte na to, čím je třeba zlomky rozšířit.

Příklad 4

Usměrněte zlomky:

a) $\dfrac{6}{\sqrt{2}}$ b) $\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}$ c) $\dfrac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$

Řešení

a) $\dfrac{6}{\sqrt{2}} = \dfrac{6\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \dfrac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$

b) $\dfrac{2}{\sqrt{3}-1} = \dfrac{2}{\sqrt{3}-1}\cdot\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = \dfrac{2(\sqrt{3}+1)}{3-1} = \sqrt{3}+1$

c) $\dfrac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \dfrac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \dfrac{3(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{5-2} = \sqrt{5}-\sqrt{2}$

Poznámka. Všimněte si, že např. přibližné určení součinu $3\sqrt{2} \doteq 3\cdot 1{,}414$ je jednodušší než určení podílu $\dfrac{6}{\sqrt{2}} \doteq 6 : 1{,}414$.

Pokuste se na základě řešení příkladu 4 sami zformulovat, čím při usměrňování rozšiřujeme zlomek, je-li ve jmenovateli samotná druhá odmocnina a je-li ve jmenovateli součet nebo rozdíl.

S definicí druhé odmocniny a počítáním s druhými odmocninami jste se seznámili již na základní škole. Rozšíříme si teď naše vědomosti o třetí odmocninu. Opět začneme definicí.

Třetí odmocnina z nezáporného reálného čísla a je takové nezáporné číslo x, pro něž platí $x^3 = a$. K jeho označení užíváme symbol $\sqrt[3]{a}$.

Zajisté vidíte nápadnou podobnost s definicí druhé odmocniny. Obdobné jsou i věty pro počítání s třetími odmocninami.

Pro každá dvě nezáporná reálná čísla a, b platí:

$$\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}, \qquad a\sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a^3 b}$$

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} \quad \text{při } b \neq 0$$

Třetí odmocninu z daného nezáporného reálného čísla rovněž vypočítáme na kalkulačce nebo pomocí tabulek. V tabulkách najdete podrobný návod, přímo lze vyhledat třetí odmocninu z čísel od 1 do 1 000.

Poznámka. Upustíme-li od požadavku, že n-tou odmocninu zavádíme pouze pro **nezáporná reálná čísla**, můžeme pro lichá čísla n rozšířit definici n-té odmocniny takto:

Pro každé liché přirozené číslo n je n-tá odmocnina z reálného čísla a takové reálné číslo b, pro něž platí $b^n = a$.

To znamená, že např. $\sqrt[3]{-27} = -3$, neboť $(-3)^3 = -27$.

Příklad 5

Pomocí tabulek vypočítejte:

a) $\sqrt[3]{364{,}5}$ b) $\sqrt[3]{3\,645\,000}$ c) $\sqrt[3]{0{,}036\,45}$

Řešení

a) $\sqrt[3]{364{,}5} \doteq 7{,}143$

b) $\sqrt[3]{3\,645\,000} = \sqrt[3]{3{,}645\cdot 1\,000\,000} = \sqrt[3]{3{,}645}\cdot\sqrt[3]{1\,000\,000} \doteq$
$\doteq 1{,}539\cdot 100 = 153{,}9$

c) $\sqrt[3]{0{,}036\,45} = \sqrt[3]{36{,}45\cdot 0{,}001} = \sqrt[3]{36{,}45}\cdot\sqrt[3]{0{,}001} \doteq 3{,}316\cdot 0{,}1 =$
$= 0{,}331\,6$

Na závěr si ukážeme, jak je třeba postupovat při odstraňování třetí odmocniny ze jmenovatele zlomku. Opět si povšimněte, jakými čísly je třeba zlomky rozšířit.

Příklad 6

Usměrněte zlomky:

a) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ b) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{9}}$ c) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{50}}$

Řešení

a) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} = \dfrac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2^3}} = \dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}$

b) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{9}} = \dfrac{2}{\sqrt[3]{3^2}} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3}} = \dfrac{2 \cdot \sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3^3}} = \dfrac{2\sqrt[3]{3}}{3}$

c) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{50}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2 \cdot 5^2}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2 \cdot 5^2}} \cdot \dfrac{\sqrt[3]{2^2 \cdot 5}}{\sqrt[3]{2^2 \cdot 5}} = \dfrac{\sqrt[3]{20}}{\sqrt[3]{2^3 \cdot 5^3}} = \dfrac{\sqrt[3]{20}}{2 \cdot 5} = \dfrac{\sqrt[3]{20}}{10}$

Úlohy

2.33 Vypočítejte zpaměti druhé odmocniny z čísel:
a) 49 b) 2 500 c) 640 000
d) 0,81 e) 0,04 f) 0,000 9

2.34 Rozhodněte, zda platí následující rovnosti. Své rozhodnutí zdůvodněte:
a) $\sqrt{0} = 0$ b) $\sqrt{-100} = 10$ c) $\sqrt{1} = -1$
d) $\sqrt{(-5)^2} = -5$ e) $\sqrt{5^2} = 5$ f) $\sqrt{(-5)^2} = 5$

2.35 Pokuste se na základě předcházející úlohy vyslovit větu o tom, čemu se rovná $\sqrt{a^2}$.

2.36 Vypočítejte zpaměti třetí odmocniny z čísel:
a) 27 b) 1 000 c) 125 000
d) 1 e) 0,008 f) 0,064

2.37 Za předpokladu, že třetí odmocnina je zavedena jen pro nezáporná čísla, rozhodněte, zda platí (své rozhodnutí zdůvodněte):
a) $\sqrt[3]{0} = 0$ b) $\sqrt[3]{8} = -2$ c) $\sqrt[3]{-1} = 1$
d) $\sqrt[3]{(-5)^3} = -5$ e) $\sqrt[3]{5^3} = -5$ f) $\sqrt[3]{5^3} = 5$

2.38 Řešte předcházející úlohu za předpokladu, že třetí odmocnina je zavedena pro libovolná reálná čísla (viz poznámku před příkladem 5).

2.39 Pomocí kalkulačky určete druhé odmocniny z daných čísel a výsledek zaokrouhlete na setiny:
a) 5; 29; 314; 6 256; 72 037; 576 081
b) 0,47; 0,80; 3,26; 35,6; 312,1; 6 703,55

2.40 Pomocí kalkulačky určete třetí odmocniny z daných čísel a výsledek zaokrouhlete na tisíciny:
a) 7; 75; 648; 4 444; 75 824; 300 125
b) 0,749; 0,250; 8,26; 30,534; 626,23; 1 953,12

2.41 Upravte výrazy:
a) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$ b) $\dfrac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}$ c) $\sqrt{\dfrac{81}{36}}$
d) $\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{16}$ e) $\dfrac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}}$ f) $\sqrt[3]{\dfrac{216}{125}}$

2.42 Částečně odmocněte:
a) $\sqrt{8}$ b) $\sqrt{75}$ c) $\sqrt{1\,875}$
d) $\sqrt[3]{81}$ e) $\sqrt[3]{250}$ f) $\sqrt[3]{4\,000}$

2.43 Usměrněte zlomky:
a) $\dfrac{12}{\sqrt{3}}$ b) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$ c) $\dfrac{6}{3-\sqrt{3}}$
d) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ e) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{3}}$ f) $\dfrac{12}{\sqrt[3]{18}}$

2.7 Absolutní hodnota reálného čísla

Absolutní hodnotu $|a|$ reálného čísla a definujeme takto:

> Je-li $a \geqq 0$, pak $|a| = a$,
>
> je-li $a < 0$, pak $|a| = -a$.

To znamená, že absolutní hodnota nezáporného čísla a je rovna číslu a, absolutní hodnota záporného čísla a je rovna opačnému číslu $-a$, přitom $-a$ je kladné číslo. Tedy pro každé reálné číslo a platí $|a| \geqq 0$.

Příklad 1

Vypočítejte:

a) $|3|$ b) $|-1{,}5|$ c) $|9-2| - |-15-(-3)|$ d) $\big|7 - |4-11|\big|$
e) $|2-\sqrt{3}|$ f) $|1-\sqrt{2}|$

Řešení

a) $3 > 0$, proto $|3| = 3$
b) $-1{,}5 < 0$, proto $|-1{,}5| = -(-1{,}5) = 1{,}5$
c) $|9-2| - |-15-(-3)| = |7| - |-15+3| = 7 - |-12| = 7 - 12 = -5$
d) $\big|7 - |4-11|\big| = \big|7 - |-7|\big| = |7-7| = |0| = 0$
e) $2 - \sqrt{3} > 0$, proto $|2-\sqrt{3}| = 2 - \sqrt{3}$
f) $1 - \sqrt{2} < 0$, proto $|1-\sqrt{2}| = -(1-\sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1$

Pokud jste správně vyřešili úlohu 2.35, dospěli jste k závěru, že pro každé $a \geqq 0$ platí $\sqrt{a^2} = a$ a pro každé $a < 0$ platí $\sqrt{a^2} = -a$. Užitím absolutní hodnoty můžeme tuto důležitou větu, kterou je dobré si zapamatovat, zapsat takto:

> Pro každé reálné číslo a platí $\sqrt{a^2} = |a|$.

Absolutní hodnota $|a|$ reálného čísla a souvisí se vzdáleností d obrazu čísla a na číselné ose od počátku.

Je-li $a \geqq 0$, je $d = a = |a|$,
je-li $a < 0$, je $d = -a = |a|$.
Můžeme tedy říci:

> Absolutní hodnota každého reálného čísla je rovna vzdálenosti obrazu tohoto čísla na číselné ose od počátku.

Tato vlastnost se zpravidla nazývá geometrický význam absolutní hodnoty reálného čísla a.

Z uvedené vlastnosti vyplývá:

1. Pro všechna reálná čísla a je $|a| \geqq 0$, protože vzdálenost je vždy nezáporné číslo.
2. Pro všechna reálná čísla a platí $|a| = |-a|$, neboť opačné číslo $-a$ má od počátku stejnou vzdálenost jako číslo a.

Poznámka. Body číselné osy zpravidla ztotožňujeme s reálnými čísly a místo o vzdálenosti obrazu čísla od počátku hovoříme stručněji o vzdálenosti čísla od počátku.

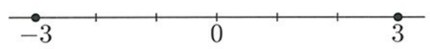
Příklad 2

Na číselné ose znázorněte všechna reálná čísla, pro něž platí:

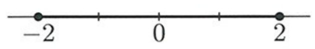
a) $|x| = 3$ b) $|x| \leqq 2$ c) $|x| > 1$

Řešení

a) Protože absolutní hodnota reálného čísla je rovna vzdálenosti tohoto čísla na reálné ose od počátku, hledáme všechna reálná čísla x, jejichž vzdálenost od počátku je rovna 3. Jsou to čísla 3 a -3 (obr. 2.5). Tímto způsobem jsme vlastně snadno vyřešili lineární rovnici s absolutní hodnotou.



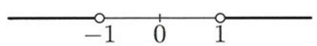
Obr. 2.5



Obr. 2.6

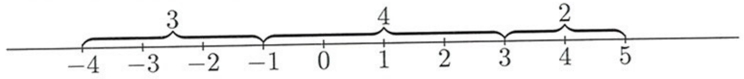
b) Tuto lineární nerovnici s absolutní hodnotou vyřešíme tak, že najdeme všechna reálná čísla, která mají od počátku vzdálenost menší nebo rovnou 2. Tato čísla vyplní tlustě vytaženou úsečku na obr. 2.6 včetně jejích krajních bodů (vyznačeno plnými kroužky).

c) V tomto případě hledáme všechna reálná čísla x, jejichž vzdálenost od počátku je větší než jedna. Tato čísla vyplňují dvě tlustě vytažené polopřímky na obr. 2.7 bez počátečních bodů (vyznačeno prázdnými kroužky).



Obr. 2.7

Znázorněme na číselné ose čísla 5 a 3 (obr. 2.8).



Obr. 2.8

Je zřejmé, že vzdálenost těchto čísel je rovna 2. Tuto vzdálenost můžeme pomocí absolutní hodnoty vyjádřit jako $|5-3| = |2| = 2$ nebo $|3-5| = |-2| = 2$. Podobně pro vzdálenost kladného čísla 3 a záporného čísla -1 platí $|3-(-1)| = |4| = 4$ nebo $|(-1)-3| = |-4| = 4$. Pro vzdálenost dvou záporných reálných čísel -4 a -1 dostaneme $|-4-(-1)| = |-3| = 3$ nebo $|-1-(-4)| = |3| = 3$.

Obecně lze říci:

Vzdálenost obrazů reálných čísel a, b na číselné ose je rovna $|a-b|$, resp. $|b-a|$.

Příklad 3

Na číselné ose znázorněte obrazy všech reálných čísel x, pro která platí:

a) $|x-3| = 2$ b) $|x-3| \leqq 2$ c) $|x-3| > 2$

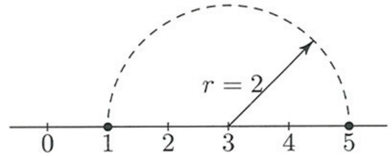
d) $|x+3| < 2$

Řešení

a) V podstatě jde o řešení lineární rovnice s absolutní hodnotou, kterou snadno vyřešíme užitím geometrického významu absolutní hodnoty rozdílu dvou reálných čísel. Vzdálenost neznámého čísla x a čísla 3 je rovna 2. Hledáme tedy všechna reálná čísla x, jejichž vzdálenost od čísla 3 je rovna 2. Jsou to čísla 1 a 5 (obr. 2.9).

b) V této úloze se jedná o řešení lineární nerovnice s absolutní hodnotou. Postupujeme obdobně; všechna čísla, která jsou řešením, vyplní úsečku s krajními body 1 a 5 (obr. 2.10)

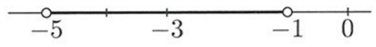
c) Nyní hledáme všechna reálná čísla x, která mají od čísla 3 vzdálenost větší než 2. Tato čísla vyplní dvě polopřímky bez počátečních bodů (obr. 2.11).



Obr. 2.9

Obr. 2.10

Obr. 2.11



Obr. 2.12

d) V této úloze se místo absolutní hodnoty rozdílu čísel vyskytuje absolutní hodnota součtu čísel. To snadno napravíme tím, že místo $|x+3|$ zapíšeme $|x-(-3)|$. Hledáme nyní všechna reálná čísla x, která mají od čísla -3 vzdálenost menší než 2. Na obr. 2.12 jsou tato čísla znázorněna úsečkou bez krajních bodů -5 a -1.

Úlohy

2.44 Vypočítejte:

a) $|3| + |-3|$ 6 b) $|5| - |-5|$ 0

c) $|5-3| + |2-7|$ 7 d) $|8-4| - |1-13|$ −8

e) $|-4+6| - |3-(-2)|$ −3 f) $|-3-7| - |-5-(-1)|$ 6

g) $|-8-|6-15||$ 17 h) $|-|4-9|-2|$ 7

2.45 Na číselné ose znázorněte všechna reálná čísla, pro něž platí:

a) $|x| = 5$ b) $|x| = 0$ c) $|x| = -7$

d) $|x| \leqq 4$ e) $|x| < 3$ f) $|x| \geqq 1$

g) $|x| < 0$ h) $|x| > 0$

2.46 Na číselné ose znázorněte všechna reálná čísla, pro něž platí:

a) $|x-2| = 5$ b) $|x+3| = 6$ c) $|x-1{,}5| = 0{,}5$

d) $|x+1| > \sqrt{2}$ e) $|x-\sqrt{3}| < 2$ f) $|x+\pi| > 0$

g) $|x-1| < -3$ h) $|x+4| > -1$

3. MNOŽINY

3.1 Základní množinové pojmy

Množinové představy intuitivně užívali již starořečtí matematici ve 3. století před n. l., když zkoumali geometrická místa bodů, tj. množiny všech bodů dané vlastnosti. K vytvoření teorie množin přispěl pražský matematik, filozof a teolog *Bernard Bolzano* (1781–1848), zejména svým dílem Paradoxy nekonečna. Jeho pamětní desku najdete v Celetné ulici nedaleko Prašné brány. Pojem množiny však zavedl kolem roku 1870 německý matematik *Georg Cantor* (1845–1918), který studoval problémy týkající se nekonečných množin reálných čísel. V současné době dává teorie množin mnohým oblastem matematiky společný jazyk a pomáhá z nich vytvářet systém.

Se základními pojmy elementární teorie množin jste se postupně seznamovali v základní škole. Nyní si tyto pojmy připomeneme, zpřesníme a doplníme.

Pojem množina je značně složitý. Ani na gymnáziu nebudeme tento pojem definovat; pro jeho přesné vymezení nemáme zatím potřebné matematické vědomosti. Spokojíme se s přibližným vysvětlením tohoto pojmu, které však pro naše účely bude zcela postačující.

Množinou budeme rozumět souhrn nějakých předmětů (objektů). Předměty (objekty), jejichž souhrn vytváří danou množinu, nazýváme **prvky** (elementy) uvedené množiny.

K vyjádření skutečnosti, že x je prvkem množiny A, používáme zápis $x \in \mathsf{A}$; x není prvkem množiny A zapisujeme $x \notin \mathsf{A}$.

Množinu určujeme obvykle výčtem jejích prvků nebo uvedením charakteristické vlastnosti jejích prvků.

Při určení množiny **výčtem** všech jejích prvků nezáleží na pořadí prvků a každý z těchto prvků musí být ve výčtu zastoupen právě jednou. Například množinu A, jejímiž prvky jsou právě čísla 1, 2, 3, můžeme zapsat $\mathsf{A} = \{1, 2, 3\}$, ale také $\mathsf{A} = \{2, 3, 1\}$ nebo $\mathsf{A} = \{3, 2, 1\}$ apod. Přitom vyjádření, že prvky množiny A jsou **právě** čísla 1, 2, 3, znamená to, že čísla 1, 2, 3 jsou prvky množiny A a že množina A už jiné prvky nemá.

Zápis množiny $\mathsf{B} = \{0; \frac{3}{4}; 2; 0{,}75; \sqrt{4}\}$ je nesprávný zápis množiny, protože $\sqrt{4} = 2$ a $\frac{3}{4} = 0{,}75$. Správný zápis je např. $\mathsf{B} = \{0; 0{,}75; 2\}$.

Důležitou množinou, bez níž se v matematice neobejdeme, je množina, která nemá žádný prvek. Nazýváme ji **prázdná množina** a značíme symbolem $\emptyset$. Prázdnou množinou je například množina všech přirozených čísel menších než 1. Zjištění, že množina je prázdná, považujeme též za její určení výčtem.

Určujeme-li množinu uvedením **charakteristické vlastnosti** prvků množiny, znamená to, že uvedeme takovou vlastnost, kterou mají všechny prvky množiny a kromě prvků této množiny žádný jiný prvek tuto vlastnost nemá. Například množinu $\mathsf{A} = \{1, 2, 3\}$ můžeme uvedením charakteristické vlastnosti určit tak, že je to množina všech přirozených čísel menších než čtyři, což zapíšeme takto:

$$\mathsf{A} = \{x \in \mathsf{N};\quad x < 4\}$$

Ve všech uvedených příkladech měly množiny konečný počet prvků. Existují však množiny, které mají nekonečný počet prvků, například $\mathsf{C} = \{x \in \mathsf{N};\ x > 3\}$. Množina s konečným počtem prvků se nazývá **konečná**, množina, která nemá konečný počet prvků, se nazývá **nekonečná**. Mezi nekonečné množiny patří množiny všech přirozených čísel, racionálních čísel, reálných čísel, ale nekonečnou množinou je i množina všech reálných čísel x, pro něž platí $1 \leqq x \leqq 2$, tj. množina $\{x \in \mathsf{R};\ 1 \leqq x \leqq 2\}$.

V matematice často pracujeme s čísly kladnými, zápornými, nezápornými a nekladnými. Například v oboru reálných čísel je
$\{x \in \mathsf{R};\ x > 0\} = \mathsf{R}^+$ množina všech kladných reálných čísel,
$\{x \in \mathsf{R};\ x < 0\} = \mathsf{R}^-$ množina všech záporných reálných čísel,
$\{x \in \mathsf{R};\ x \geqq 0\} = \mathsf{R}_0^+$ množina všech nezáporných reálných čísel,
$\{x \in \mathsf{R};\ x \leqq 0\} = \mathsf{R}_0^-$ množina všech nekladných reálných čísel.
Všechny uvedené množiny jsou příklady nekonečných množin.

Dalším důležitým pojmem, s nímž jste se již také setkali, je pojem **podmnožina**. Říkáme, že množina B **je podmnožinou množiny** A (zapisujeme $\mathsf{B} \subset \mathsf{A}$) právě tehdy, když každý prvek množiny B je zároveň prvkem množiny A. Jinými slovy: neexistuje prvek množiny B, který není prvkem množiny A.

Na obr. 2.1 na str. 12 je znázorněn vztah mezi číselnými obory N, Z, Q, R. Uvedený vztah můžeme pomocí podmnožin zapsat takto:

$$\mathsf{N} \subset \mathsf{Z} \subset \mathsf{Q} \subset \mathsf{R}.$$

Všimněme si ještě dvou krajních případů vztahujících se k podmnožině.

1. Protože každý prvek libovolné množiny A je prvkem množiny A, je každá množina A podmnožinou sebe sama, tj. platí $\mathsf{A} \subset \mathsf{A}$.
2. Protože každý prvek prázdné množiny je prvkem libovolné množiny A (prázdná množina totiž žádné prvky nemá), je prázdná množina podmnožinou každé množiny A, tj. platí $\emptyset \subset \mathsf{A}$. Jinými slovy: neexistuje prvek množiny $\emptyset$, který není prvkem množiny A; proto je $\emptyset \subset \mathsf{A}$.

V této souvislosti je třeba si uvědomit rozdíl mezi pojmy být prvkem a být podmnožinou. Například číslo 1 je prvkem množiny $\{1, 2, 3\}$, není však její podmnožinou; množina $\{1\}$ je podmnožinou množiny $\{1, 2, 3\}$, není však jejím prvkem.

Příklad 1

Zapište všechny podmnožiny množiny $\{1, 2, 3\}$.

Řešení

$\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$, $\{1, 2, 3\}$.

Podmnožinou dané množiny je prázdná množina, všechny jednoprvkové množiny, které lze utvořit z prvků 1, 2, 3, všechny dvouprvkové množiny, které lze utvořit z prvků 1, 2, 3, a daná množina.

Rovnost množin definujeme takto: Množiny A, B se rovnají (zapisujeme $\mathsf{A} = \mathsf{B}$) právě tehdy, když každý prvek množiny A je prvkem množiny B a zároveň každý prvek množiny B je prvkem množiny A.

Užitím pojmu podmnožina můžeme rovnost $\mathsf{A} = \mathsf{B}$ množin A, B vyjádřit tak, že platí $\mathsf{A} \subset \mathsf{B}$ a zároveň $\mathsf{B} \subset \mathsf{A}$. Této vlastnosti se využívá při důkazu rovnosti množin.

Příklad 2

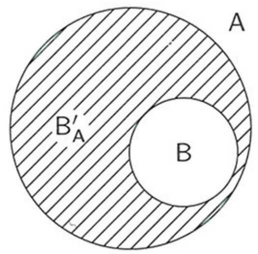
Určete, které z následujících množin se rovnají:

$$\{x \in \mathsf{N};\ x < 0\}, \{0\},\ \{x \in \mathsf{R};\ -2 \leqq x \leqq 2\},\ \{-2, -1, 0, 1, 2\},$$
$$\{x \in \mathsf{R};\ |x| \leqq 2\},\ \emptyset,\ \{x \in \mathsf{Z};\ -3 < x < 3\},\ \{x \in \mathsf{R};\ |x| \leqq 0\}$$

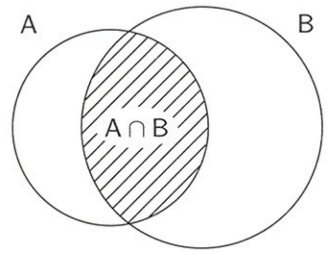
Řešení

$\{x \in \mathsf{N};\ x < 0\} = \emptyset$
$\{x \in \mathsf{R};\ -2 \leqq x \leqq 2\} = \{x \in \mathsf{R};\ |x| \leqq 2\}$
$\{-2, -1, 0, 1, 2\} = \{x \in \mathsf{Z};\ -3 < x < 3\}$
$\{0\} = \{x \in \mathsf{R};\ |x| \leqq 0\}$

V případě, že množina B je podmnožinou množiny A, zavádíme dále pojem **doplněk množiny** B **v množině** A (zapisujeme B'_{A}), a to jako množinu všech prvků z A, které nepatří do B. Doplněk množiny B v množině A je znázorněn šrafováním na obr. 3.1.



Obr. 3.1



Obr. 3.2

Je-li zřejmé, v jaké množině A tvoříme doplněk množiny B, pak mluvíme jen o doplňku množiny B, který značíme B'.

Příklad 3

Určete doplňky množin $\mathsf{A} = \{x \in \mathsf{Z};\ x < 1\}$, $\mathsf{B} = \mathsf{N}$, $\mathsf{C} = \{x \in \mathsf{Z};\ \sqrt{x^2} = |x|\}$, $\mathsf{D} = \{x \in \mathsf{Z};\ |x| > 0\}$ v množině Z.

Řešení

$A' = \{x \in Z;\ x \geqq 1\} = N$
$B' = \{x \in Z;\ x \notin N\} = \{x \in Z;\ x \leqq 0\} = Z_0^-$
Pro každé $x \in Z$ platí $\sqrt{x^2} = |x|$, proto $C' = \emptyset$
$D' = \{x \in Z;\ |x| \leqq 0\} = \{0\}$

> **Průnik množin** A, B (zapisujeme $A \cap B$) je množina všech prvků, které patří zároveň do obou množin.

Průnik množin A, B je znázorněn šrafováním na obr. 3.2.

Z definice průniku vyplývá, že průnik každé množiny s prázdnou množinou je prázdná množina, tj. $A \cap \emptyset = \emptyset$. Průnikem každých dvou množin, které nemají žádné společné prvky, je prázdná množina. Množiny A, B, pro něž platí $A \cap B = \emptyset$, nazýváme **disjunktní**.

Příklad 4

Určete průnik množin A, B, jestliže:

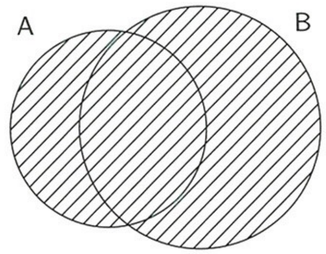
a) $A = \{1, 2, 5, 8\}$, $B = \{1, 3, 5, 7\}$
b) $A = \{x \in N;\ x > 2\}$, $B = \{x \in N;\ x < 7\}$
c) $A = \{x \in Z;\ x > -3\}$, $B = \{x \in Z;\ x > -5\}$
d) $A = N$, $B = Z$
e) $A = \{x \in Z;\ x < 0\}$, $B = \{x \in Z;\ \sqrt{x^2} = x\}$

Řešení

a) $A \cap B = \{1; 5\}$
b) $A \cap B = \{x \in N;\ 2 < x < 7\} = \{3, 4, 5, 6\}$
c) $A \cap B = \{x \in Z;\ x > -3\}$
d) $A \cap B = N$
e) A je množina všech záporných celých čísel, B je množina všech nezáporných celých čísel, proto $A \cap B = \emptyset$.

> **Sjednocení množin** A, B (zapisujeme $A \cup B$) je množina všech prvků, které patří aspoň do jedné z množin A, B.

Sjednocení množin A, B je graficky znázorněno vyšrafováním na obr. 3.3.



Obr. 3.3

Z definice vyplývá, že sjednocení libovolné množiny A s prázdnou množinou je množina A, tj. $A \cup \emptyset = A$.

Příklad 5

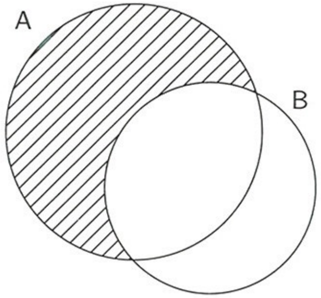
Určete sjednocení množin A, B z příkladu 4.

Řešení

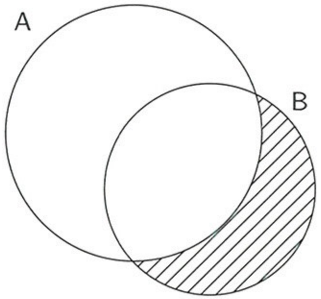
a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 5, 7, 8\}$
b) $A \cup B = N$
c) $A \cup B = \{x \in Z;\ x > -5\}$
d) $A \cup B = Z$
e) $A \cup B = Z$

> **Rozdíl množin** A, B (zapisujeme $A \setminus B$) je množina všech prvků množiny A, které nejsou prvky množiny B.

Na obr. 3.4 je vyšrafován rozdíl $A \setminus B$ množin A, B, na obr. 3.5 je vyšrafován rozdíl $B \setminus A$.



Obr. 3.4



Obr. 3.5

Příklad 6

Najděte $A \setminus B$ a $B \setminus A$ pro množiny A, B určené v příkladu 4.

Řešení

a) $A \setminus B = \{2, 8\}$, $B \setminus A = \{3, 7\}$
b) $A \setminus B = \{x \in N;\ x > 6\}$, $B \setminus A = \{x \in N;\ x < 3\} = \{1, 2\}$
c) $A \setminus B = \emptyset$, $B \setminus A = \{-4, -3\}$
d) $A \setminus B = \emptyset$, $B \setminus A = \{x \in Z;\ x \leqq 0\} = Z_0^-$
e) $A \setminus B = Z^-$, $B \setminus A = Z_0^+$

Úlohy

3.1 Zapište všechny podmnožiny množin:
a) $\{2, 7\}$ b) $\{5, 7, 9\}$ c) $\emptyset$ d) $\{0\}$

3.2 Zapište všechny podmnožiny množiny $A = \{-3; 0; 0{,}5; 1\}$, které jsou současně podmnožinou
a) množiny N, b) množiny Z, c) $\{x \in R;\ |x| < 1\}$.

3.3 Zjistěte, které z následujících množin se rovnají:
$\{x \in Z;\ x > 0\}$, $\{x \in R;\ |x| \leqq 0\}$, $\{x \in N;\ |x - 2| < 2\}$, N, $\{0\}$, $\{1, 2, 3\}$, $\{x \in R;\ \sqrt[3]{x^3} = x\}$, $\{x \in R;\ x \geqq 0\}$

3.4 Určete doplněk množiny B v množině A, jestliže:

a) $A = \{-2; -0{,}5; 0; 1; 3\}$, $B = \{-0{,}5; 0; 3\}$
b) $A = Z$; $B = \{x \in Z;\ x \leqq 0\}$
c) $A = \{x \in Z;\ x > 5\}$, $B = \{x \in Z;\ x \geqq 7\}$
d) $A = N$, $B = \{x \in N;\ |x| > 2\}$
e) $A = Z$, $B = \{x \in Z;\ |x| > 2\}$
f) $A = R$, $B = \{x \in R;\ \sqrt{x^2} = -x\}$
g) $A = R$, $B = \{x \in R;\ |x - 1| < 0\}$
h) $A = R$, $B = \{x \in R;\ |x - 2| \geqq 0\}$

3.5 Určete průnik a sjednocení množin A, B, jestliže:
a) $A = \{-2; 0, 5, 7\}$, $B = \{-3, -1, 0, 4, 7, 9\}$
b) $A = \{x \in Z;\ x < -5\}$, $B = \{x \in Z;\ x \leqq -1\}$
c) $A = N$, $B = \{x \in Z;\ |x| < 3\}$
d) $A = N$, $B = \{x \in Z;\ x < 1\}$

3.6 Stanovte podmínky, které musí být splněny, aby platilo:
a) $A \cap B = A$ b) $A \cup B = A$ c) $B'_A = A$
d) $B'_A = \emptyset$ e) $A \cup B = A \cap B$

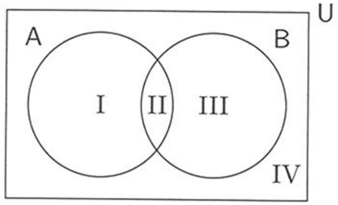
3.7 Najděte všechny množiny X, pro něž je $A \cup X = B$, jestliže:
a) $A = \{x \in N;\ x \leqq 2\}$, $B = \{x \in N;\ x < 4\}$
b) $A = \emptyset$, $B = \{1, 2\}$
c) $A = \{1\}$, $B = \{2, 3\}$

3.8 Najděte všechny podmnožiny X množiny $\{1, 2, 3, 4\}$, pro něž platí:
a) $\{1, 2\} \cap X = \{1\}$ b) $\{1, 3, 5\} \cap X = \{1, 3\}$
c) $\{2\} \cap X = \emptyset$ d) $\{1, 2\} \cap X = \{3, 4\}$

3.9 Určete rozdíly $A \setminus B$ a $B \setminus A$ množin A, B, jestliže:
a) $A = \{-3, -1, 0, 5\}$, $B = \{-1, 0, 1\}$
b) $A = \{x \in Z;\ x \leqq -2\}$, $B = \{x \in Z;\ x < -7\}$
c) $A = Z$, $B = N$
d) $A = N$, $B = \{x \in Z;\ |x| \leqq 2\}$
e) $A = Z^-$, $B = \{x \in Z;\ |x - 1| < 3\}$

3.2 Vennovy diagramy

Pro větší názornost zobrazujeme někdy množinové situace pomocí tzv. **Vennových diagramů**. Na obr. 3.6 je Vennův diagram pro dvě podmnožiny A, B základní množiny U. Základní množina U je tak rozdělena na 4 pole, která jsou očíslována I, II, III, IV.



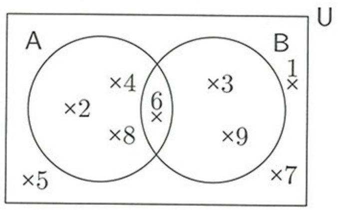
Obr. 3.6

Pole I je množina všech prvků základní množiny U, které patří do množiny A a zároveň nepatří do množiny B. Pole II je množina všech prvků základní množiny U, které patří do množiny A a zároveň do množiny B. Toto pole je tedy průnikem množin A, B. Pole III je množina všech prvků ze základní množiny U, které patří do B a nepatří do A. Pole IV je množina všech prvků ze základní množiny U, které nepatří do A ani do B.

Příklad 1

Základní množina U je množina všech přirozených čísel menších než 10. A je množina všech sudých čísel z množiny U, B je množina všech čísel z množiny U, která jsou dělitelná třemi. Zakreslete Vennův diagram pro uvedené množiny a vyznačte v něm všechny prvky množiny U.

Řešení je na obr. 3.7.

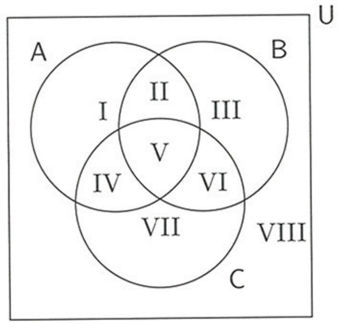


Obr. 3.7

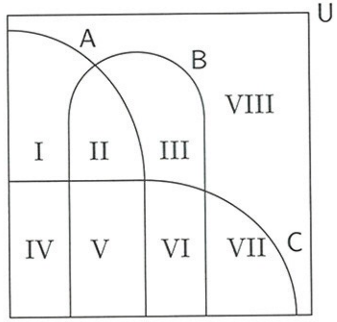
Podobně můžeme zakreslit Vennův diagram pro tři podmnožiny A, B, C základní množiny U — (obr. 3.8, resp. 3.9). V tomto případě je množina U rozdělena na 8 polí.

Příklad 2

Základní množina U a podmnožiny A, B jsou dány stejně jako v příkladu 1, C je množina všech přirozených čísel menších než 6. Zakreslete Vennův diagram pro uvedené množiny a vyznačte v něm všechny prvky množiny U.

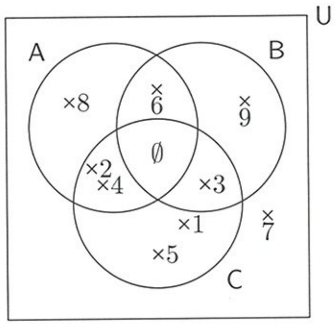


Obr. 3.8



Obr. 3.9

Řešení je na obr. 3.10.

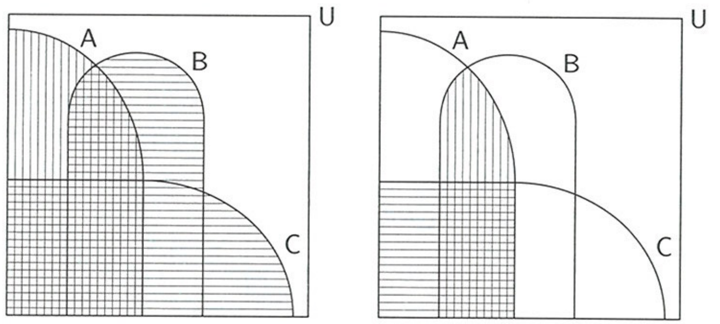


Obr. 3.10

Protože v množině $A \cap B \cap C$ není žádný prvek množiny U (neexistuje přirozené číslo, které je zároveň sudé, dělitelné třemi a menší než 6), je v příslušném poli znak prázdné množiny.

Příklad 3

Užitím Vennova diagramu zjistěte, zda platí
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.



a) b)

Obr. 3.11

Řešení

Na obr. 3.11a je svislým šrafováním vyznačena množina A a vodorovným šrafováním sjednocení $B \cup C$. To znamená, že průnik $A \cap (B \cup C)$ je ta oblast Vennova diagramu, která je šrafována vodorovně i svisle.

Na obr. 3.11b je svislým šrafováním vyznačen průnik $A \cap B$ a vodorovným šrafováním průnik $A \cap C$. Sjednocení $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ je tedy ta oblast Vennova diagramu, která je šrafována aspoň jednou.

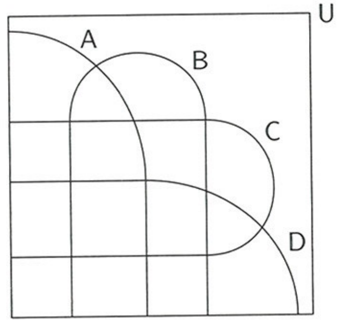
Vidíme, že oblast, která je na obr. 3.11a vyšrafována vodorovně i svisle, je stejná jako oblast, která je na obr. 3.11b vyšrafována aspoň jednou, tj. svisle nebo vodorovně. Daná rovnost tedy platí.

Obsahuje-li diagram n podmnožin, je základní množina rozdělena na 2^n polí. Vennův diagram pro čtyři množiny obsahuje tedy 2^4, tj. 16 polí, jak ukazuje obr. 3.12.

Některé **slovní úlohy požadující určení počtu prvků konečných množin** můžeme výhodně řešit množinově — logickou analýzou textu a užitím Vennových diagramů.

Příklad 4

Z 30 dotázaných studentů hovoří anglicky nebo německy 28 studentů. 20 studentů ovládá nejvýše jeden z těchto jazyků. Anglicky mluví o 6 studentů více než německy. Kolik studentů mluví

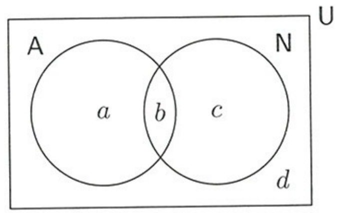


Obr. 3.12

a) jenom anglicky,
b) anglicky i německy?

Řešení

Označme písmenem U množinu všech dotázaných studentů, písmeny A, N množiny všech studentů hovořících anglicky, německy. Nakreslíme Vennův diagram pro dvě množiny A, N (obr. 3.13). Písmeny a, b, c, d označíme počty studentů patřících do jednotlivých polí diagramu.



Obr. 3.13

Počet prvků množiny U označíme $|U|$, počet prvků množiny $A \cup N$ označíme $|A \cup N|$ atp. Nyní pozorně čteme text úlohy a postupně vyjádříme všechny údaje pomocí proměnných a, b, c, d.

Počet všech dotázaných studentů, tj. $|U|$, je

$$a + b + c + d = 30. \qquad (1)$$

Anglicky nebo německy, tj. $|A \cup N|$, hovoří 28 studentů, tedy

$$a + b + c = 28. \qquad (2)$$

Nejvýše jeden jazyk, tj. $|U| - |A \cap N|$, ovládá 20 studentů, čili

$$a + c + d = 20. \qquad (3)$$

Anglicky mluví o 6 studentů více než německy, tj. $|A| = |N| + 6$, tedy

$$a + b = b + c + 6. \qquad (4)$$

Získali jsme soustavu 4 lineárních rovnic o 4 neznámých. Odečteme-li (1) – (2), dostaneme

$$d = 2,$$

odečtením (1) – (3) vypočteme

$$b = 10.$$

Dosadíme-li $b = 10$ do (2), obdržíme

$$a + c = 18 \qquad (2')$$

a z (4) získáme

$$a - c = 6. \qquad (4')$$

Sečtením $(2') + (4')$ dostaneme

$$2a = 24,$$

odkud

$$a = 12.$$

Dosadíme-li $a = 12$ např. do $(2')$, dostaneme

$$c = 6.$$

Vypočítali jsme, že $a = 12$, $b = 10$, $c = 6$, $d = 2$. Nyní zbývá jen odpovědět na položené otázky.

Jenom anglicky mluví a studentů, tj. 12 studentů. Anglicky i německy mluví b studentů, tj. 10 studentů.

Příklad 5

Pražské metro má tři trasy, které jsou označeny A, B, C. Se všemi pracovníky jednoho pražského podniku byl proveden průzkum týkající se využití metra při dojíždění do zaměstnání. Petr, jehož otec pracuje v tomto podniku, přinesl do školy následující dílčí informace z průzkumu:

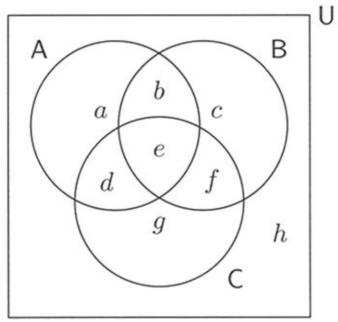
Trasou A jezdí 65, trasou B 135 a trasou C 55 pracovníků. Metrem vůbec nejezdí 80 pracovníků a všechny tři trasy metra současně nepoužívá žádný pracovník. Trasou A a současně trasou B jezdí 40 osob, trasou A i C jezdí 5 osob. Trasami B nebo C cestuje 155 pracovníků.

Určete z těchto informací, kolik pracovníků

a) jezdí pouze trasou B,
b) jezdí trasami A nebo B,
c) používá právě dvě trasy metra,
d) je v tomto podniku.

Řešení

Označme písmeny A, B, C po řadě množiny všech pracovníků, kteří jezdí do zaměstnání trasou A, B, C, písmenem U množinu všech pracovníků podniku. Vennův diagram pro tři množiny (obr. 3.14) rozdělí množinu U



Obr. 3.14

na 8 polí. Do těchto polí jsou vepsány proměnné a až h udávající počet prvků příslušné podmnožiny. Např. písmenem a je označen počet pracovníků podniku, kteří jezdí do zaměstnání pouze trasou A (tj. jezdí trasou A a přitom nejezdí trasou B ani C). Pro počet prvků množiny A použijeme označení $|\mathsf{A}|$, pro počet prvků množiny $\mathsf{A}\cap\mathsf{B}$ označení $|\mathsf{A}\cap\mathsf{B}|$ atp.

Vyjádříme údaje z textu úlohy pomocí proměnných a, b, c, d, e, f, g, h:

$$
\begin{array}{llr}
|\mathsf{A}| = & a+b\quad +d+e & = 65 \qquad (1)\\
|\mathsf{B}| = & b+c\quad +e+f & = 135 \qquad (2)\\
|\mathsf{C}| = & d+e+f+g & = 55 \qquad (3)\\
|(\mathsf{A}\cup\mathsf{B}\cup\mathsf{C})'| = & h & = 80 \qquad (4)\\
|\mathsf{A}\cap\mathsf{B}\cap\mathsf{C}| = & e & = 0 \qquad (5)\\
|\mathsf{A}\cap\mathsf{B}| = & b\quad +e & = 40 \qquad (6)\\
|\mathsf{A}\cap\mathsf{C}| = & d+e & = 5 \qquad (7)\\
|\mathsf{B}\cup\mathsf{C}| = & b+c+d+e+f+g & = 155 \qquad (8)
\end{array}
$$

Získali jsme soustavu 8 lineárních rovnic o 8 neznámých. Z (4) a (5) známe

$$h = 80, \quad e = 0.$$

Dosadíme-li $e = 0$ do (6) a do (7), dostaneme

$$b = 40, \quad d = 5.$$

Známe tedy již čtyři neznámé. Dosadíme za $e = 0$, $b = 40$, $d = 5$ do rovnic (1), (2), (3) a (8) a po úpravě dostaneme:

$$
\begin{array}{rcll}
a & = & 20 & \qquad (1')\\
c+f & = & 95 & \qquad (2')\\
f+g & = & 50 & \qquad (3')\\
c+f+g & = & 110 & \qquad (8')
\end{array}
$$

Z (1′) jsme dostali $a = 20$. Odečtením (8′) − (3′) dostaneme $c = 60$. Odečtením (8′) − (2′) dostaneme $g = 15$. Dosadíme $g = 15$ do (3′) a získáme $f = 35$.

Nyní již můžeme odpovědět na položené otázky.

a) Počet pracovníků, kteří jezdí pouze trasou B, je $|\mathsf{B}\cap(\mathsf{A}'\cup\mathsf{C}')|$, tj. $c = 60$.

b) Počet pracovníků, kteří jezdí trasami A nebo B, je $|\mathsf{A}\cup\mathsf{B}| = a+b+c+d+e+f = 20+40+60+5+0+35 = 160$.

c) Počet pracovníků, kteří používají právě dvě trasy metra, je

$$|(\mathsf{A}\cap\mathsf{B})\cap\mathsf{C}'| + |(\mathsf{A}\cap\mathsf{C})\cap\mathsf{B}'| + |(\mathsf{B}\cap\mathsf{C})\cap\mathsf{A}'| = b+d+f = 40+5+35 = 80.$$

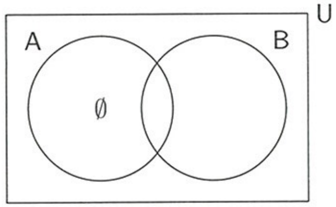
d) Počet všech pracovníků podniku je

$$|\mathsf{U}| = a+b+c+d+e+f+g+h = 20+40+60+5+0+35+15+80 = 255.$$

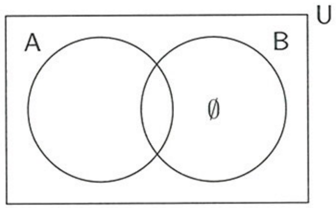
Úlohy

3.10 Napište vztahy mezi množinami A, B, které jsou znázorněny na obrázku

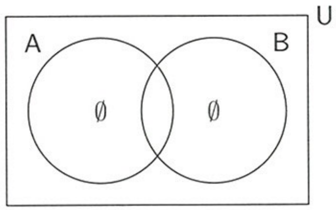
a) 3.15 b) 3.16 c) 3.17.



Obr. 3.15



Obr. 3.16



Obr. 3.17

3.11 Nakreslete Vennův diagram pro dvě podmnožiny A, B základní množiny U. Jednotlivá pole diagramu očíslujte podle obr. 3.6 a pak zapište čísla všech těch polí, která znázorňují uvedenou množinu (příslušné doplňky množin jsou vždy uvedeny v základní množině U, tedy např. $\mathsf{A}' = \mathsf{A}'_{\mathsf{U}}$):

a) $\mathsf{A} \cap \mathsf{B}$ b) $\mathsf{A} \cup \mathsf{B}$ c) $\mathsf{A} \cap \mathsf{B}'$
d) $\mathsf{A}' \cup \mathsf{B}$ e) $\mathsf{A}' \cap \mathsf{B}'$ f) $\mathsf{A}' \cup \mathsf{B}'$

3.12 Nakreslete Vennův diagram pro tři podmnožiny A, B, C základní množiny U. Jednotlivá pole diagramu očíslujte podle obr. 3.8 (resp. 3.9) a pak zapište čísla všech těch polí, která znázorňují uvedenou množinu (příslušné doplňky množin jsou vždy v základní množině U, např. $\mathsf{A}' = \mathsf{A}'_{\mathsf{U}}$):

a) $\mathsf{A} \cap \mathsf{B} \cap \mathsf{C}$ b) $\mathsf{A} \cap \mathsf{B} \cap \mathsf{C}'$ c) $\mathsf{A} \cap \mathsf{B}' \cap \mathsf{C}'$
d) $(\mathsf{A} \cup \mathsf{B}) \cap \mathsf{C}$ e) $(\mathsf{A} \cap \mathsf{B}) \cup \mathsf{C}$ f) $\mathsf{A}' \cap \mathsf{B}' \cap \mathsf{C}'$
g) $\mathsf{A} \cup (\mathsf{B} \cap \mathsf{C})$ h) $\mathsf{A} \cap (\mathsf{B} \cup \mathsf{C})$ i) $(\mathsf{A} \cup \mathsf{B}) \cap \mathsf{C}'$

3.13 Do příslušných polí Vennova diagramu pro dvě podmnožiny A, B základní množiny U zakreslete všechny prvky množiny U, je-li:

a) $\mathsf{U} = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, $\mathsf{A} = \{1; 4; 5\}$, $\mathsf{B} = \{2; 3; 4; 5\}$
b) $\mathsf{U} = \{x \in \mathsf{N};\ x < 10\}$, $\mathsf{A} = \{x \in \mathsf{N};\ 2 < x \leqq 5\}$,
$\mathsf{B} = \{x \in \mathsf{N};\ |x - 6| < 3\}$

3.14 Do příslušných polí Vennova diagramu pro tři podmnožiny A, B, C základní množiny U zakreslete všechny prvky množiny U, je-li

$$\mathsf{U} = \{x \in \mathsf{Z};\ |x| < 5\}, \quad \mathsf{A} = \{x \in \mathsf{N};\ |x| < 5\},$$
$$\mathsf{B} = \{x \in \mathsf{Z};\ -2 \leqq x < 3\}, \quad \mathsf{C} = \{-3; -1; 1; 3\}.$$

3.15 Užitím Vennových diagramů zjistěte, zda platí:

a) $(\mathsf{A} \cup \mathsf{B})' = \mathsf{A}' \cap \mathsf{B}'$
b) $(\mathsf{A} \cap \mathsf{B})' = \mathsf{A}' \cup \mathsf{B}'$
c) $\mathsf{A} \cap (\mathsf{B}' \cup \mathsf{C}) = (\mathsf{A} \cap \mathsf{B}') \cup \mathsf{C}$
d) $\mathsf{A} \cap (\mathsf{B}' \cup \mathsf{C}) = (\mathsf{A} \cap \mathsf{B}') \cup (\mathsf{A} \cap \mathsf{C})$

3.16 Během jednoho roku vystoupila dvakrát v jednom městě známá rocková skupina. Z 450 studentů gymnázia se koncertu této skupiny aspoň jednou zúčastnilo 290 studentů, právě jednou 200 studentů.

Počet studentů, kteří byli pouze na 1. koncertu, je třikrát větší než počet studentů, kteří byli pouze na 2. koncertu. Kolik studentů bylo

a) na 1. koncertu,
b) na 2. koncertu?

3.17 Z 825 oslovených osob 380 uvedlo, že používá počítač doma nebo v zaměstnání. Počet osob, které používají počítač doma, je dvakrát větší než počet těch, kteří používají počítač doma i v zaměstnání, a je o 40 menší než počet těch, kteří používají počítač pouze v zaměstnání. Kolik oslovených osob používá počítač

a) pouze v zaměstnání,
b) doma?

3.18 Písemná práce z matematiky, které se zúčastnilo 35 studentů, obsahovala tři úlohy. Dva studenti vyřešili jenom první úlohu a tři studenti jenom druhou úlohu. První a druhou úlohu vyřešilo 16 studentů, druhou a třetí 14 studentů. Všechny úlohy vyřešilo 10 studentů, první nebo třetí 31 studentů a 3 studenti nevyřešili ani první, ani druhou úlohu. Kolik studentů vyřešilo

a) aspoň dvě úlohy,
b) aspoň jednu úlohu?

3.19 Delegátka nabídla 45 účastníkům zahraničního pobytového zájezdu tři fakultativní výlety. První výlet si vybralo 23 rekreantů, první i druhý 7 rekreantů. 15 účastníků jelo na první výlet a přitom nejelo na třetí výlet, 10 jelo pouze na první výlet a 3 pouze na třetí výlet. Právě jeden z výletů si zvolilo 17 osob. Jedna třetina z počtu účastníků se nezúčastnila žádného výletu. Kolik účastníků si vybralo

a) jenom druhý výlet,
b) druhý výlet,
c) právě dva výlety,
d) druhý a třetí výlet a přitom si nevybralo první výlet?

3.20 Při dopravní kontrole bylo zkontrolováno 800 řidičů. Mezi nejčastější přestupky patřilo překročení stanovené rychlosti, nesprávná jízda v jízdních pruzích a špatný technický stav vozidla. Žádného z uvedených přestupků se nedopustilo 500 řidičů, všechny tři přestupky byly zjištěny u 2 řidičů a u 43 řidičů byly zjištěny právě dva z těchto přestupků. Rychlost překročilo 187 řidičů a špatný technický stav byl zjištěn v 110 případech. 75 řidičů mělo vozidlo ve špatném technickém stavu a přitom se nedopustilo žádného dalšího přestupku. Přestože 27 řidičů mělo vozidlo ve špatném technickém stavu, překročilo stanovenou rychlost.

a) U kolika řidičů byla zjištěna nesprávná jízda v jízdních pruzích?

b) Kolik řidičů se dopustilo právě jednoho z uvedených přestupků?

3.3 Intervaly

Některé množiny reálných čísel je možné na číselné ose zobrazit úsečkou, polopřímkou nebo přímkou; přitom krajní body úsečky či počáteční bod polopřímky k ní mohou, ale nemusí patřit. Takové podmnožiny množiny všech reálných čísel se nazývají **intervaly**. Intervaly lze charakterizovat zápisy $a \leqq x \leqq b$, $a < x \leqq b$, $a \leqq x < b$, $a < x < b$, $x \geqq a$, $x > a$, $x \leqq a$, $x < a$, kde a, b jsou reálná čísla, pro něž platí $a < b$, čísla a, b jsou meze intervalů, a je dolní mez, b je horní mez.

Seznamme se nejprve s **omezenými intervaly**, tj. s takovými podmnožinami množiny všech reálných čísel, které lze na číselné ose znázornit úsečkou. Podle toho, zda k úsečce patří oba krajní body nebo jen jeden nebo žádný, rozdělujeme omezené intervaly na **uzavřené, polouzavřené a otevřené**.

Přehled omezených intervalů s krajními body a, b $(a < b)$ je uveden v následující tabulce.

V článku 2.7 pojednávajícím o absolutní hodnotě reálného čísla jsme se seznámili s tím, že pro každé kladné číslo k a každé reálné číslo a je $|x - a| \leqq k$ množina všech reálných čísel, pro něž platí $a - k \leqq x \leqq a + k$, což je ovšem uzavřený interval $\langle a - k, a + k\rangle$.
Pro $k > 0$ a libovolné a tedy platí:

$$\{x \in \mathsf{R};\ |x - a| \leqq k\} = \{x \in \mathsf{R};\ a - k \leqq x \leqq a + k\} = \langle a - k, a + k\rangle$$

Zápis charakteristické vlastnosti	Zápis intervalu	Znázornění na reálné ose	Název intervalu
$a \leqq x \leqq b$	$\langle a, b\rangle$	a b	uzavřený interval
$a < x \leqq b$	$(a, b\rangle$	a b	polouzavřený interval (zleva otevřený a zprava uzavřený)
$a \leqq x < b$	$\langle a, b)$	a b	polouzavřený interval (zleva uzavřený a zprava otevřený)
$a < x < b$	(a, b)	a b	otevřený interval

Zřejmě také platí:

$$\{x \in \mathsf{R};\ |x - a| < k\} = \{x \in \mathsf{R};\ a - k < x < a + k\} = (a - k, a + k)$$

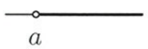
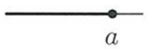
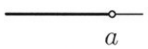
Rovněž jsme se seznámili s případem, kdy $a = 0$, v tom případě dostáváme

$$\{x \in \mathsf{R};\ |x| \leqq k\} = \{x \in \mathsf{R};\ -k \leqq x \leqq k\} = \langle -k, k\rangle\,,$$
$$\{x \in \mathsf{R};\ |x| < k\} = \{x \in \mathsf{R};\ -k < x < k\} = (-k, k).$$

K zápisu **neomezených intervalů** zavádíme navíc znak $+\infty$ (čteme: plus nekonečno) a znak $-\infty$ (čteme: mínus nekonečno). Tyto znaky nepředstavují žádná čísla, proto zápisy typu $3 + \infty$, $-\infty - 5$ apod. nemají žádný smysl.

Přehled neomezených intervalů s krajním bodem a uvádí následující tabulka.

V přehledu není zahrnut ještě jeden interval, a to ten, který je na číselné ose znázorněn přímkou. Tato přímka samozřejmě splývá s číselnou osou a příslušný interval, který zapisujeme $(-\infty, +\infty)$, se nazývá

Zápis charakteristické vlastnosti	Zápis intervalu	Znázornění na reálné ose	Název intervalu
$x \geqq a$	$\langle a, +\infty)$		intervaly neomezené zprava
$x > a$	$(a, +\infty)$		
$x \leqq a$	$(-\infty, a\rangle$		intervaly neomezené zleva
$x < a$	$(-\infty, a)$		

oboustranně neomezený a rovná se množině všech reálných čísel. Zápis $x \in (-\infty, +\infty)$ je ekvivalentní se zápisem $x \in \mathsf{R}$.

Ještě jednou si připomeňme, že intervaly jsou podmnožiny množiny všech **reálných** čísel. V jiných číselných oborech intervaly neexistují. Množina $\{x \in \mathsf{R};\ 1 \leqq x < 3\}$ je interval $\langle 1, 3)$, kdežto množina $\{x \in \mathsf{N};\ 1 \leqq x < 3\}$ není interval, je to množina $\{1, 2\}$.

Vzhledem k tomu, že každý interval je množina, má smysl určovat sjednocení nebo průnik intervalů.

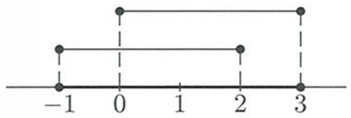
Příklad 1

Určete sjednocení a průnik intervalů:

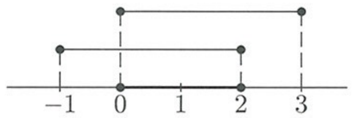
a) $\langle -1, 2\rangle$, $\langle 0, 3\rangle$ b) $\langle -1, 2\rangle$, $\langle 2, 3\rangle$
c) $\langle -1, 2\rangle$, $(2, 3)$ d) $\langle -1, 0\rangle$, $(1, +\infty)$

Řešení

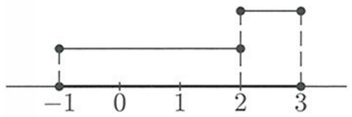
Dané intervaly zobrazíme nad číselnou osou a na ní znázorníme jejich sjednocení nebo průnik:



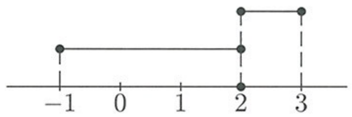
a) $\langle -1, 2\rangle \cup \langle 0, 3\rangle = \langle -1, 3\rangle$



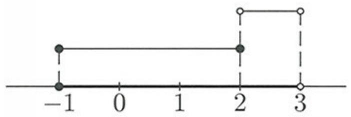
$\langle -1, 2\rangle \cap \langle 0, 3\rangle = \langle 0, 2\rangle$



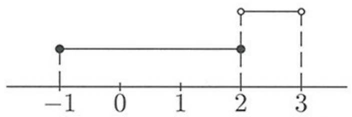
b) $\langle -1, 2\rangle \cup \langle 2, 3\rangle = \langle -1, 3\rangle$



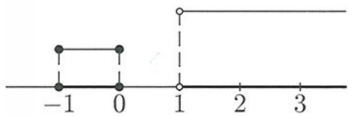
$\langle -1, 2\rangle \cap \langle 2, 3\rangle = \{2\}$



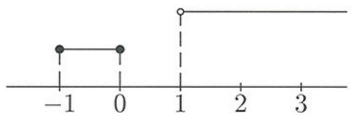
c) $\langle -1, 2\rangle \cup (2, 3) = \langle -1, 3)$



$\langle -1, 2\rangle \cap (2, 3) = \emptyset$



d) $\langle -1, 0\rangle \cup (1, +\infty)$



$\langle -1, 0\rangle \cap (1, +\infty) = \emptyset$

Z řešení předcházejícího příkladu vyplývá, že průnik nebo sjednocení intervalů nemusí být interval. Sjednocení intervalů v příkladu 1d) nelze zapsat jako jediný interval.

Úlohy

3.21 Na číselné ose znázorněte a jako interval zapište tyto množiny:

a) $\{x \in \mathsf{R};\ -2 \leqq x \leqq 3\}$ b) $\{x \in \mathsf{R};\ -7 < x \leqq -1\}$
c) $\{x \in \mathsf{R};\ 5 \leqq x < 9\}$ d) $\{x \in \mathsf{R};\ -1 < x < 0\}$
e) $\{x \in \mathsf{R};\ x > 3\}$ f) $\{x \in \mathsf{R};\ x \leqq -2\}$

3.22 Zapište jako interval množinu všech:

a) reálných čísel b) záporných reálných čísel
c) nezáporných reálných čísel d) reálných čísel větších než -7
e) reálných čísel, jež jsou menší nebo rovna 1

3.23 Rozhodněte, která z následujících množin je interval, a pak příslušný interval zapište:

a) $\{2\}$ b) $\{x \in \mathsf{Z};\, x > 0\}$ c) $\{x \in \mathsf{N};\, x < 8\}$
d) R e) $\{x \in \mathsf{R};\, x \geqq 3\}$ f) $\{x \in \mathsf{Q};\, x < 0\}$
g) $\emptyset$ h) $\{x \in \mathsf{R};\, 1 \leqq x < 2\}$ i) $\{x \in \mathsf{R};\, 2 \leqq x < 1\}$

3.24 Rozhodněte, která z následujících množin je interval, a pak příslušný interval zapište:

a) $\{x \in \mathsf{R};\, |x| \leqq 1\}$ b) $\{x \in \mathsf{R};\, |x| > 2\}$
c) $\{x \in \mathsf{R};\, |x| < 3\}$ d) $\{x \in \mathsf{R};\, |x| \geqq 0\}$
e) $\{x \in \mathsf{R};\, |x - 2| \leqq 5\}$ f) $\{x \in \mathsf{R};\, |x + 2| < 5\}$

3.25 Určete sjednocení a průnik intervalů:

a) $\langle -2, 1\rangle$, $\langle 0, 3\rangle$ b) $\langle -2, 3)$, $\langle 3, 5)$
c) $(-3, -1)$, $(-1, 4\rangle$ d) $\langle -4, 0\rangle$, $\langle 0, 2)$
e) $(1, +\infty)$, $\langle 3, +\infty)$ f) $(-\infty, -1)$, $\langle -2, +\infty)$
g) $(3, 5)$, $\langle 3, 5\rangle$ h) $(-\infty, 2\rangle$, $\langle 2, +\infty)$

4. ZÁKLADNÍ POUČENÍ O VÝROCÍCH

S touto kapitolou je možné se seznámit nejdříve jen informativně. Považujeme však za užitečné, abyste do ní nahlédli vždy, když vám nebude jasná formulace nějaké matematické věty nebo když neporozumíte způsobu jejího důkazu.

4.1 Výrok a jeho negace

> **Výrokem** se rozumí sdělení, u něhož má smysl otázka, zda je, či není pravdivé.

Příklady výroků:

v_1: Úhlopříčky čtverce jsou navzájem kolmé.
v_2: Číslo 8 je liché.
v_3: Paříž je hlavní město Španělska.
v_4: Pro všechna reálná čísla a, b platí: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
v_5: Ve vesmíru existují inteligentní bytosti i mimo sluneční soustavu.

Výroky v_1 a v_4 jsou pravdivé, výroky v_2 a v_3 jsou nepravdivé; o pravdivosti výroku v_5 dosud rozhodnout neumíme, přesto však jde o výrok — na otázku o jeho pravdivosti existuje jednoznačná odpověď.

Příklady výpovědí, které nejsou výroky:

Kolik je hodin?
Jdi domů!
Ó palmy, přeneste svůj rovník nad Vltavu!
Má myšlenka je voskovicí světla mdlého.
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
České Budějovice jsou číslo přirozené.

Výroky tedy nejsou otázky, příkazy, básnické obrazy, nesmysly apod. Možná je pro vás překvapením, že v_4 výrok je, zatímco tatáž rovnost, ale beze slov „pro všechna reálná čísla a, b platí" už výrokem není. Vynecháme-li totiž tato slova, pak tvrzení $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

není výrok, neboť nevíme, co znamenají proměnné a, b a pro které jejich hodnoty tato rovnost nastává; otázka po její pravdivosti nemá proto smysl.

Negace výroku v je výrok „Není pravda, že v“; negaci výroku v budeme značit $\neg v$. Zřejmě platí:

Je-li výrok v pravdivý, je výrok $\neg v$ nepravdivý;
je-li výrok v nepravdivý, je výrok $\neg v$ pravdivý.

Zamysleme se ještě krátce nad negací výroku $\neg v$, tj. nad výrokem $\neg(\neg v)$. Snadno jistě přijdete na to, že tento výrok říká totéž co původní výrok v, neboť výrok „Není pravda, že není pravda, že v“ znamená totéž, co výrok v.

Negaci výroku lze často utvořit i jinak než tak, že mu předřadíme slova „není pravda, že“. Tak např. negaci výroku v_2 nemusíme vyslovit ve tvaru „Není pravda, že číslo 8 je liché“ nebo zkráceně „Číslo 8 není liché“, ale i takto: „Číslo 8 je sudé“. Je však nutno dát pozor na to, abychom vzali v úvahu všechny možnosti! Negací výroku „Číslo 8 je záporné“ není výrok „Číslo 8 je kladné“, neboť kromě čísel kladných a záporných máme ještě nulu. Negací výroku „Číslo 8 je záporné“ je výrok „Číslo 8 je nezáporné“.

Příklad 1

Zakryjte pravý sloupec následující tabulky a utvořte negace výroků v levém sloupci bez použití záporu; svůj výsledek pak porovnejte s výrokem v pravém sloupci.

v	$\neg v$
Daný trojúhelník ABC je ostroúhlý.	Daný trojúhelník ABC je tupoúhlý nebo pravoúhlý.

v	$\neg v$
Daný trojúhelník KLM nemá všechny vnitřní úhly shodné.	Daný trojúhelník KLM je rovnostranný.
Přímka t je tečnou dané kružnice k.	Přímka t je sečnou dané kružnice k nebo s ní nemá žádný společný bod.
$\sqrt{2}+\sqrt{3} \geqq \sqrt{5}$	$\sqrt{2}+\sqrt{3} < \sqrt{5}$
Kořen rovnice $2x-1=5$ je kladné číslo.	Kořen rovnice $2x-1=5$ je číslo záporné nebo nula.

Je užitečné umět negovat výroky, ve kterých je číselný údaj vyjádřen slovy **aspoň**, resp. **nejvýše**. Vysvětleme si nejprve, co tyto údaje znamenají.

Řekneme-li, že nějaká množina má **aspoň** k **prvků**, znamená to, že počet jejích prvků je **větší nebo roven číslu** k.
Řekneme-li, že nějaká množina má **nejvýše** k **prvků**, znamená to, že počet jejích prvků je **menší nebo roven číslu** k.

Negaci výroků tohoto typu dostaneme, když si uvědomíme, že platí:

Neobsahuje-li nějaká množina aspoň k prvků, je počet jejích prvků menší než k, neboli menší nebo roven $k-1$; to však znamená, že počet prvků této množiny je nejvýše $k-1$.

Neobsahuje-li nějaká množina nejvýše k prvků, je počet jejích prvků větší než k, neboli větší nebo roven $k+1$; to však znamená, že počet prvků této množiny je aspoň $k+1$.

Odtud vyplývá:

Výrok	Negace výroku
„Množina M má aspoň k prvků.“	„Množina M má nejvýše $k-1$ prvků.“
„Množina M má nejvýše k prvků.“	„Množina M má aspoň $k+1$ prvků.“

Poznámka. Řekneme-li o nějaké množině, že má k prvků, nemusí být někdy jasné, zda jich má aspoň k nebo nejvýše k nebo právě k. Chceme-li se těmto nejasnostem vyhnout, musíme údaj o počtu prvků této množiny doplnit jedním ze slov „aspoň, nejvýše, právě“. Uveďme dále pro zajímavost, že negací výroku „Množina M má právě k prvků“ je kromě výroku „Množina M nemá právě k prvků“ také výrok „Množina M má nejvýše $k-1$ nebo aspoň $k+1$ prvků“. Jistě to umíte zdůvodnit sami.

Příklad 2

Zakryjte pravý sloupec následující tabulky a určete negace výroků v levém sloupci bez použití záporu; svůj výsledek pak porovnejte s výrokem v pravém sloupci.

v	$\neg v$
Rovnice $x^8 - 1 = 0$ má aspoň dva reálné kořeny.	Rovnice $x^8 - 1 = 0$ má nejvýše jeden reálný kořen.
Mezi všemi jednocifernými čísly jsou nejvýše tři prvočísla.	Mezi všemi jednocifernými čísly jsou aspoň čtyři prvočísla.
Pravidelný dvanáctistěn má aspoň 20 vrcholů.	Pravidelný dvanáctistěn má nejvýše 19 vrcholů.
Číslo 30 je dělitelné aspoň třemi prvočísly.	Číslo 30 je dělitelné nejvýše dvěma prvočísly.

v	$\neg v$
V této přihrádce je nejvýše $n+1$ předmětů.	V této přihrádce je aspoň $n+2$ předmětů.
Daná množina má právě $n+1$ prvků.	Daná množina má nejvýše n nebo aspoň $n+2$ prvků.

Úlohy

4.1 Posuďte pravdivost následujících výroků a utvořte jejich negace:
u_1: Číslo 5 je nezáporné.
u_2: $\sqrt{5} > 2$ u_3: Číslo $6-9$ není kladné.
u_4: $5 - 8 \geqq 4 - 6$ u_5: $\sqrt{49} \neq 7$

4.2 Negujte výroky:
v_1: Česká republika má více než 10 milionů obyvatel.
v_2: Praha má méně než 1,5 milionu obyvatel.
v_3: Poloměr Země není menší než 6 000 km.
v_4: Vzdálenost Měsíce od Země není větší než 400 000 km.
v_5: Rychlost světla ve vakuu je 300 000 km·h^{-1}.

4.3 Negujte výroky:
w_1: Na Petřínskou rozhlednu vede aspoň 300 schodů.
w_2: Tato učebnice má nejvýše 200 stránek.
w_3: Pravidelný dvacetiúhelník má aspoň 100 úhlopříček.
w_4: Prvočísel menších než sto je nejvýše 25.
w_5: Dvojciferných čísel je 90.

4.4 Určete, který z následujících výroků je pravdivý:
u_1: Rovnici $2(3x-1) = 6x - 2$ vyhovuje každé přirozené číslo.
u_2: Absolutní hodnota každého čísla je číslo kladné.
u_3: Vzdálenost libovolných dvou bodů je číslo nezáporné.
u_4: Pro každé přirozené číslo x je číslo $x+1$ kladné.
u_5: Pro každé celé číslo x je číslo $x+1$ kladné.

4.5 Jsou dány kružnice k_1, k_2 a výroky:
v_1: Kružnice k_1, k_2 nemají žádný společný bod.
v_2: Kružnice k_1, k_2 se protínají.

v_3: Kružnice k_1, k_2 mají vnitřní dotyk.
Určete, který z těchto výroků je negací výroku
v: Kružnice k_1, k_2 mají vnější dotyk.

4.2 Složené výroky — konjunkce a disjunkce

Budeme se nyní zabývat **složenými výroky**, tj. výroky, které jsou tvořeny dvěma nebo více výroky jednoduššími. Bude nás zajímat zejména to, jak závisí pravdivost složeného výroku na pravdivosti výroků, z nichž je utvořen. Omezíme se přitom jen na nejdůležitější typy složených výroků, kterými jsou **konjunkce**, **disjunkce**, **implikace** a **ekvivalence**. V tomto článku probereme konjunkci a disjunkci.

Konjunkce libovolných výroků a, b je výrok, který vznikne jejich spojením spojkou **a**. Konjunkci výroků a, b zapisujeme $a \wedge b$ a tento zápis čteme „a a b" nebo také „a a zároveň b".

Pro ilustraci utvořme některé konjunkce z výroků a, b, c, d:

a: Číslo 5 je prvočíslo.
b: Číslo 5 je sudé.
c: Číslo 5 je liché.
d: Číslo 5 je záporné.

$a \wedge d$: Číslo 5 je prvočíslo a zároveň číslo záporné.
$a \wedge c$: Číslo 5 je prvočíslo a číslo liché.
$b \wedge c$: Číslo 5 je sudé a zároveň liché.
$b \wedge d$: Číslo 5 je sudé a záporné.

Tento ilustrační příklad použijeme k tomu, abychom posoudili, jak závisí pravdivost konjunkce na pravdivostech výroků, které ji tvoří. Asi se shodneme na tom, že ze všech čtyř uvedených konjunkcí je pravdivá pouze jediná, a to $a \wedge c$. O všech ostatních nám „logický cit" říká, že pravdivé nejsou. Všimněme si dále, že v konjunkci $a \wedge c$ jsou oba výroky, které ji tvoří, pravdivé, zatímco v ostatních je vždy aspoň jeden nepravdivý. U těchto čtyř konjunkcí tedy můžeme říci, že je pravdivá

pouze ta, která je složena z pravdivých výroků. V souladu s těmito intuitivními představami, které jsme si touto ukázkou měli ujasnit, je definována pravdivost konjunkce každých dvou výroků takto:

Konjunkce libovolných výroků a, b **je pravdivá** pouze tehdy, když jsou pravdivé oba výroky a, b.

Konjunkce libovolných výroků a, b je tedy nepravdivá, je-li nepravdivý aspoň jeden z obou výroků a, b.

Poznámka. Konjunkce některých výroků se obvykle zkracují následujícím způsobem. Konjunkci výroku „Číslo 5 je přirozené" a výroku „Číslo 10 je přirozené" nemusíme vyslovit ve tvaru „Číslo 5 je přirozené a číslo 10 je přirozené", ale můžeme říci kratčeji: „Čísla 5 a 10 jsou přirozená."

Disjunkce libovolných výroků a, b je výrok, který vznikne jejich spojením spojkou **nebo**. Disjunkci výroků a, b zapisujeme $a \vee b$ a tento zápis čteme „a nebo b".

Utvořme pro ilustraci disjunkce z těch výroků a, b, c, d, ze kterých jsme v předcházejícím textu tvořili konjunkce:

$a \vee d$: Číslo 5 je prvočíslo nebo číslo záporné.
$a \vee c$: Číslo 5 je prvočíslo nebo číslo liché.
$b \vee c$: Číslo 5 je sudé nebo liché.
$b \vee d$: Číslo 5 je sudé nebo je záporné.

Intuitivně cítíme, že první tři z těchto disjunkcí (v nichž je pravdivý aspoň jeden z výroků, ze kterých jsou složeny) jsou pravdivé, zatímco poslední (která je složena z výroků nepravdivých) je nepravdivá. V souladu s tímto „pocitem" je pravdivost disjunkce dvou výroků definována:

Disjunkce libovolných výroků a, b **je pravdivá** pouze tehdy, je-li pravdivý aspoň jeden z výroků a, b.

Disjunkce libovolných výroků a, b je tedy nepravdivá, jsou-li nepravdivé oba výroky a, b.

Konjunkce a disjunkce výroků těsně souvisí s průnikem a sjednocením množin. Patří-li nějaký prvek x do množiny A **a zároveň** do množiny B, patří do **průniku** těchto množin. Patří-li nějaký prvek x do množiny A **nebo** do množiny B, patří do **sjednocení** těchto množin. Proto také znak $\wedge$ pro konjunkci výroků připomíná znak $\cap$ pro průnik množin a znak $\vee$ pro disjunkci výroků je podobný znaku $\cup$ pro sjednocení množin.

Pravdivost složeného výroku v závislosti na pravdivostech výroků, ze kterých je složen, ukazuje **tabulka pravdivostních hodnot**. V této tabulce se pravdivost výroku označuje jedničkou (říkáme, že jeho pravdivostní hodnota je rovna jedné) a nepravdivost nulou (říkáme, že jeho pravdivostní hodnota je rovna nule). Jednička a nula tedy v této souvislosti neznamenají čísla, ale vyjádření toho, že příslušný výrok je pravdivý nebo nepravdivý. Ukažme si tabulku pravdivostních hodnot pro negaci výroku a pro konjunkci a disjunkci dvou výroků:

a	$\neg a$
1	0
0	1

a	b	$a \wedge b$	$a \vee b$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	0

V těchto tabulkách jsou v prvním, resp. ve dvou prvních sloupcích vypsány všechny možnosti, které pro výrok a, resp. pro výroky a, b mohou s ohledem na jejich pravdivost nastat; následující sloupce jsou pak vyplněny podle toho, jak jsou negace výroku, resp. konjunkce a disjunkce dvou výroků definovány. Např. z druhého řádku pod záhlavím těchto tabulek vidíme, že negace nepravdivého výroku je pravdivá a že v případě, kdy výrok a je pravdivý a výrok b nepravdivý, je jejich konjunkce nepravdivá a jejich disjunkce pravdivá.

Příklad 1

Vyšetřete pravdivost výroku $(\neg a \vee b) \wedge a$. (Zápis $\neg a \vee b$ znamená $(\neg a) \vee b$, nikoli $\neg(a \vee b)$; tímto způsobem budeme používat znak negace vždycky.)

Řešení

V tabulce pravdivostních hodnot v závislosti na pravdivosti výroků a, b vyplníme postupně sloupce pro výrok $\neg a$, pro výrok $\neg a \vee b$ a konečně pro výrok $(\neg a \vee b) \wedge a$, a to podle známých definic pro negaci, disjunkci a konjunkci. Její poslední sloupec udává, jak závisí pravdivost daného výroku na pravdivosti výroků a, b.

a	b	$\neg a$	$\neg a \vee b$	$(\neg a \vee b) \wedge a$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	0
0	0	1	1	0

Vidíme tak, že výrok $(\neg a \vee b) \wedge a$ je pravdivý pouze v případě, že jsou pravdivé oba výroky a, b.

Úlohy

4.6 Posuďte pravdivost výroků $u_1 \wedge u_2$, $u_1 \wedge u_4$, $u_4 \wedge u_5$, $u_1 \vee u_2$, $u_1 \vee u_4$, $u_4 \vee u_5$, kde u_1, u_2, u_4, u_5 jsou výroky z úlohy 4.1.

4.7 Zdůvodněte, proč výrok „Praha a Tokio jsou evropská města" je nepravdivý a proč výrok „Praha nebo Tokio jsou evropská města" je pravdivý.

4.8 Je dán pravdivý výrok a, nepravdivý výrok b a pravdivý výrok c. Určete, který z výroků

$$(a \vee b) \wedge c, \quad (a \wedge b) \vee c, \quad (a \wedge c) \vee b, \quad (a \vee c) \wedge b$$

je pravdivý a který nepravdivý.

4.9 Posuďte pravdivost výroků

$$a \vee a, \ a \wedge a, \ \neg a \wedge a, \ \neg a \vee a, \ \neg a \wedge \neg a, \ \neg a \vee \neg a$$

v závislosti na pravdivosti výroku a.

4.10 Určete, jak závisí pravdivost výroků

$$(\neg a \wedge b) \vee a, \quad (\neg a \wedge b) \vee b, \quad (\neg a \vee b) \vee b$$

na pravdivostech výroků a, b.

4.3 Složené výroky — implikace a ekvivalence

Matematické věty mají obvykle tvar implikace nebo ekvivalence, takže už z tohoto důvodu je užitečné, abyste složeným výrokům tohoto typu rozuměli.

Implikace libovolných výroků a, b je výrok, který vznikne jejich spojením slovním obratem **jestliže, pak**. Takto vzniklý výrok „jestliže a, pak b“ zapisujeme $a \Rightarrow b$.

Zápis $a \Rightarrow b$ čteme také „z a plyne b“ nebo „a implikuje b“ nebo také „platí-li a, platí b“. Výrok a v implikaci $a \Rightarrow b$ se nazývá **předpoklad**, výrok b je **závěr**. (Poznamenejme ještě, že místo „jestliže a, pak b“ se někdy říká, že „a je postačující podmínka pro b“ nebo také „b je nutná podmínka pro a“.)

Pravdivost implikace $a \Rightarrow b$ je v závislosti na pravdivostech výroků a, b definována pomocí následující tabulky:

a	b	$a \Rightarrow b$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Odtud vidíme:

Implikace $a \Rightarrow b$, kde a, b jsou libovolné výroky, **je pravdivá** pouze tehdy, když jsou pravdivé oba výroky a, b nebo když je výrok a nepravdivý a výrok b jakýkoli.

Implikace $a \Rightarrow b$ je tedy nepravdivá, je-li výrok a pravdivý a výrok b nepravdivý, tj. když pravdivý předpoklad implikuje nepravdivý závěr.

Poznámka. V běžném hovoru je v implikaci $a \Rightarrow b$ výrok a obvykle pravdivý; přesto však existují slovní obraty, v nichž předpoklad implikace pravdivý není. Ví-li např. Vašek, že Tonda nemá domácí úkol, a řekne-li mu: „Jestliže máš domácí úkol, pak jsem papež!“, je předpoklad této implikace nepravdivý (a závěr samozřejmě také). Všimněte si však, že tuto implikaci považuje hovorový jazyk — v souladu s naší definicí — za pravdivou.

Utvořme pro ilustraci následující implikace z výroků a, b, c, d uvedených na začátku článku 4.2:

$a \Rightarrow d$: Je-li číslo 5 prvočíslo, pak číslo 5 je záporné.
$a \Rightarrow c$: Je-li číslo 5 prvočíslo, pak číslo 5 je liché.
$b \Rightarrow c$: Je-li 5 číslo sudé, pak číslo 5 je liché.
$b \Rightarrow d$: Je-li 5 číslo sudé, pak číslo 5 je záporné.

Vzhledem k tomu, že výroky a, c jsou pravdivé a výroky b, d nepravdivé, jsou pravdivé implikace $a \Rightarrow c$, $b \Rightarrow c$, $b \Rightarrow d$ a jen implikace $a \Rightarrow d$ je nepravdivá.

Poznámka. Uvědomte si, že složený výrok lze utvořit ze zcela libovolných výroků, tj. i takových, které po obsahové stránce spolu vůbec nesouvisejí! Zajímáme se totiž pouze o pravdivost složeného výroku v závislosti na pravdivostech výroků, z nichž je utvořen, takže tuto okolnost musíme připustit. V matematice se však s výroky typu „Je-li velryba savec, pak J. A. Komenský se narodil v roce 1592“ naštěstí nesetkáváme. (Jen tak mimochodem: Je tato implikace pravdivá?)

Všimněme si ještě této okolnosti: zatímco v konjunkci $a \wedge b$ i disjunkci $a \vee b$ lze pořadí obou výroků zaměnit, aniž se tím změní pravdivost těchto složených výroků, pro implikaci to vždycky neplatí. Je-li např. výrok a nepravdivý a výrok b pravdivý, je implikace $a \Rightarrow b$ pravdivá, ale implikace $b \Rightarrow a$ je nepravdivá. Implikace $b \Rightarrow a$ se nazývá **obrácená implikace** k implikaci $a \Rightarrow b$. Platí přitom:

Z pravdivosti implikace $a \Rightarrow b$ nevyplývá pravdivost obrácené implikace $b \Rightarrow a$.

Například implikace „Je-li trojúhelník rovnostranný, pak je rovnoramenný“ je pravdivá, kdežto implikace obrácená „Je-li trojúhelník rovnoramenný, pak je rovnostranný“ pravdivá není.

Příklad 1

Vyšetřete pravdivost implikací $a \Rightarrow (a \vee b)$, $(a \vee b) \Rightarrow a$, $(a \vee b) \Rightarrow (a \wedge b)$, kde a, b jsou libovolné výroky.

Řešení

Podle pravidel pro konjunkci, disjunkci a implikaci vyplníme tabulku pravdivostních hodnot:

a	b	$a \wedge b$	$a \vee b$	$a \Rightarrow (a \vee b)$	$(a \vee b) \Rightarrow a$	$(a \vee b) \Rightarrow (a \wedge b)$
1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	0
0	1	0	1	1	0	0
0	0	0	0	1	1	1

Z této tabulky vidíme:

Implikace $a \Rightarrow (a \vee b)$ je pravdivá vždycky, tj. nezávisle na pravdivostních hodnotách výroků a, b; takovéto výroky se nazývají **tautologie**.

Implikace $(a \vee b) \Rightarrow a$ není pravdivá pouze v případě, že výrok a je nepravdivý a výrok b pravdivý.

Implikace $(a \vee b) \Rightarrow (a \wedge b)$ je pravdivá pouze tehdy, když oba výroky jsou pravdivé nebo oba nepravdivé.

Také v tomto příkladu jsme viděli, že implikace $a \Rightarrow (a \vee b)$ a obrácená implikace $(a \vee b) \Rightarrow a$ nemají stejné pravdivostní hodnoty. Nastane-li pro některé výroky a, b případ, že obě implikace $a \Rightarrow b$, $b \Rightarrow a$ jsou pravdivé, říkáme o výrocích a, b, že jsou ekvivalentní.

Ekvivalence libovolných výroků a, b je konjunkce implikace $a \Rightarrow b$ a obrácené implikace $b \Rightarrow a$, tj. výrok $(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)$.

Zapisujeme ji $a \Leftrightarrow b$ a čteme „a je ekvivalentní s b“ nebo „a platí právě tehdy, když platí b“; někdy se také říká, že „a je nutná a postačující podmínka pro b“. (Všimněte si toho, že zápis $a \Leftrightarrow b$ napovídá, že jde o implikace $a \Rightarrow b$ a $b \Rightarrow a$.)

Pravdivost ekvivalence $a \Leftrightarrow b$ v závislosti na pravdivostech výroků a, b určíme snadno na základě toho, že se jedná o konjunkci implikací $a \Rightarrow b$ a $b \Rightarrow a$:

a	b	$a \Rightarrow b$	$b \Rightarrow a$	$(a \Rightarrow b) \wedge (b \Rightarrow a)$ neboli $a \Leftrightarrow b$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

Odtud vidíme:

Ekvivalence $a \Leftrightarrow b$, kde a, b jsou libovolné výroky, je **pravdivá** pouze tehdy, když výroky a, b jsou oba pravdivé nebo oba nepravdivé.

Příkladem pravdivé ekvivalence je výrok „Druhá mocnina délky nejdelší strany trojúhelníku ABC je rovna součtu druhých mocnin délek jeho zbývajících stran právě tehdy, když trojúhelník ABC je pravoúhlý“; oba výroky, z nichž je tato ekvivalence složena, jsou totiž buď pravdivé (když trojúhelník ABC je pravoúhlý), nebo nepravdivé (když tento trojúhelník pravoúhlý není).

Příklad 2 (důležitý)

Rozhodněte, zda výroky $a \Rightarrow b$, $\neg b \Rightarrow \neg a$, kde a, b jsou libovolné výroky, jsou ekvivalentní.

Řešení

Jsou-li dané výroky ekvivalentní, zjistíme podle tabulky pravdivostních hodnot:

a	b	$\neg b$	$\neg a$	$a \Rightarrow b$	$\neg b \Rightarrow \neg a$	$(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (\neg b \Rightarrow \neg a)$
1	1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0	1
0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

V posledním sloupci této tabulky jsou samé jedničky, což znamená, že příslušná ekvivalence je pravdivá pro všechny možnosti pravdivostních hodnot výroků a, b. Obě implikace $a \Rightarrow b$, $\neg b \Rightarrow \neg a$ jsou tedy ekvivalentní; je to zřejmé i z toho, *že* mají stejné sloupce svých pravdivostních hodnot.

Implikace $\neg b \Rightarrow \neg a$ se nazývá **obměněná implikace** k implikaci $a \Rightarrow b$; nepleťte si ji s implikací obrácenou!

Implikace $a \Rightarrow b$ a obměněná implikace $\neg b \Rightarrow \neg a$ jsou ekvivalentní.

Úlohy

4.11 Vašek, který není náčelníkem Siouxů, prohlásil: „Je-li druhá odmocnina z deseti menší než tři, pak jsem náčelník Siouxů.“ Posuďte pravdivost této implikace, implikace obrácené a obměněné.

4.12 Jsou dány výroky
a: Úhel ACB je pravý.
b: Bod C leží na kružnici o průměru AB.
Posuďte pravdivost výroků: $a \Rightarrow b$, $b \Rightarrow a$, $a \Leftrightarrow b$, $\neg a \Leftrightarrow \neg b$.

4.13 Určete, které z následujících výroků jsou tautologie:

$$(a \wedge b) \Leftrightarrow (\neg a \vee \neg b), \quad (a \Leftrightarrow b) \Leftrightarrow (\neg a \Leftrightarrow \neg b),$$
$$(a \Rightarrow b) \Rightarrow (\neg a \Rightarrow \neg b).$$

4.14 Určete, jak závisí pravdivost výroků

$$a \Rightarrow (a \wedge b), \quad (a \wedge b) \Rightarrow b, \quad (a \wedge b) \Rightarrow (a \vee b)$$

na pravdivostech výroků a, b.

4.15 Vyšetřete pravdivost výroků

$$a \Leftrightarrow (a \wedge b), \quad a \Leftrightarrow (a \vee b), \quad (a \vee b) \Leftrightarrow (a \wedge b)$$

v závislosti na pravdivostech výroků a, b.

4.4 Negace složených výroků

O negaci jakéhokoli výroku v víme, že je pravdivá právě tehdy, když výrok v je nepravdivý. Tento fakt se v tabulce pravdivostních hodnot projeví tak, že sloupce příslušné výrokům v a $\neg v$ se liší tím, že v řádcích, kde v jednom sloupci jsou nuly, jsou ve druhém jedničky a naopak. Na základě této úvahy určíme negace složených výroků, jimiž jsme se zabývali v předcházejících dvou článcích.

Začneme negací konjunkce výroků a, b; platí pro ni následující tabulka doplněná o negace $\neg a$, $\neg b$ výroků a, b.

a	b	$a \wedge b$	$\neg(a \wedge b)$	$\neg a$	$\neg b$
1	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1
0	1	0	1	1	0
0	0	0	1	1	1

Pomocí této tabulky chceme najít výrok, který je ekvivalentní s výrokem $\neg(a \wedge b)$, takže se ptáme: Jaký výrok složený z výroků a, b, $\neg a$, $\neg b$ má stejný sloupec pravdivostních hodnot jako výrok $\neg(a \wedge b)$? Uvědomme si, že v tomto sloupci jsou tři jedničky, což odpovídá pravdivostním hodnotám disjunkce nebo implikace nějakých dvou výroků; prohlédneme-li si sloupce pro výroky $\neg a$, $\neg b$, brzy zjistíme, že hledaným výrokem je výrok $\neg a \vee \neg b$.

Pro libovolné výroky a, b platí $\neg(a \wedge b) \Leftrightarrow (\neg a \vee \neg b)$.

K určení negace disjunkce výroků a, b použijeme tabulku:

a	b	$a \vee b$	$\neg(a \vee b)$	$\neg a$	$\neg b$
1	1	1	0	0	0
1	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0
0	0	0	1	1	1

Protože ve sloupci pravdivostních hodnot výroku $\neg(a \vee b)$ jsou tři nuly a jednička, může negací disjunkce být konjunkce nějakých výroků; snadno se přesvědčíme, že to je konjunkce výroků $\neg a$, $\neg b$. Tímto způsobem jsme zjistili:

Pro libovolné výroky a, b platí

$$\neg(a \vee b) \Leftrightarrow (\neg a \wedge \neg b).$$

Všimněte si podobnosti těchto výsledků se známými vztahy pro doplněk průniku a doplněk sjednocení podmnožin A, B dané množiny:

$$(A \cap B)' = A' \cup B' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \neg(a \wedge b) \Leftrightarrow (\neg a \vee \neg b)$$
$$(A \cup B)' = A' \cap B' \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \neg(a \vee b) \Leftrightarrow (\neg a \wedge \neg b)$$

Příklad 1

Utvořte negace výroků:
u: Číslo 72 je dělitelné dvěma a třemi.
v: Mozart ani Beethoven nejsou čeští skladatelé.
w: Válku s mloky napsal K. Čapek nebo A. Jirásek.

Řešení

Výrok u je konjunkce výroků „Číslo 72 je dělitelné dvěma“ a „Číslo 72 je dělitelné třemi“; jeho negace je výrok „Číslo 72 není dělitelné dvěma nebo není dělitelné třemi“, což můžeme říci i takto: „Dvěma nebo třemi není číslo 72 dělitelné.“ Výrok v je konjunkce výroků „Mozart není český skladatel“ a „Beethoven není český skladatel“; jeho negace je výrok „Mozart je český skladatel nebo Beethoven je český skladatel“. Výrok w je disjunkce výroků „Válku s mloky napsal K. Čapek“ a „Válku s mloky napsal A. Jirásek“; jeho negace je výrok „Ani K. Čapek, ani A. Jirásek nenapsal Válku s mloky“. Naučíme se nyní negovat implikaci a ekvivalenci dvou výroků. K určení negace implikace výroků a, b utvoříme známou tabulku:

a	b	$a \Rightarrow b$	$\neg(a \Rightarrow b)$	$\neg a$	$\neg b$
1	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	1	0
0	0	1	0	1	1

Je z ní patrné, že negace implikace by mohla být konjunkce nějakých výroků, neboť v jejím sloupci jsou tři nuly a jedna jednička; snadno zjistíme, že to je konjunkce výroků a, $\neg b$.

Pro libovolné výroky a, b platí $\neg(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (a \wedge \neg b)$.

Poznámka. Uvědomte si, že negace implikace není implikace!

Příklad 2

Utvořte negace výroků:
u: Je-li $\sqrt{2}$ číslo iracionální, je iracionální i číslo $1 + \sqrt{2}$.
v: Je-li trojúhelník ABC rovnostranný, je rovnoramenný.
w: Není-li číslo 5 přirozené, není přirozené ani číslo 1.

Řešení

Negace výroku u je výrok „$\sqrt{2}$ je číslo iracionální a číslo $1+\sqrt{2}$ iracionální není“. Negace výroku v je výrok „Trojúhelník ABC je rovnostranný a není rovnoramenný“. Negace výroku w je výrok „Číslo 5 není přirozené a číslo 1 je přirozené“.

Negaci ekvivalence dostaneme opět z tabulky:

a	b	$a \Leftrightarrow b$	$\neg(a \Leftrightarrow b)$	$\neg a$	$\neg b$
1	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1
0	1	0	1	1	0
0	0	1	0	1	1

Stačí si uvědomit, že negací ekvivalence bude patrně opět ekvivalence, neboť v příslušném sloupci jsou dvě nuly a dvě jedničky; přesvědčíme se o tom, že to je ekvivalence $\neg a \Leftrightarrow b$ nebo ekvivalence $a \Leftrightarrow \neg b$.

Pro libovolné výroky a, b platí

$$\neg(a \Leftrightarrow b) \Leftrightarrow (\neg a \Leftrightarrow b),$$
$$\neg(a \Leftrightarrow b) \Leftrightarrow (a \Leftrightarrow \neg b).$$

Příklad 3

Určete negaci výroku „Číslo 158 je dělitelné šesti právě tehdy, když je dělitelné dvěma a třemi“.

Řešení

Výrok, jehož negaci máme určit, je ekvivalence $a \Leftrightarrow (b \wedge c)$, kde a je výrok „Číslo 158 je dělitelné šesti“, b je výrok „Číslo 158 je dělitelné dvěma“ a c je výrok „Číslo 158 je dělitelné třemi“. Negace této ekvivalence je výrok $a \Leftrightarrow \neg(b \wedge c)$, tj. výrok $a \Leftrightarrow (\neg b \vee \neg c)$, který můžeme vyslovit takto: „Číslo 158 je dělitelné šesti právě tehdy, když není dělitelné dvěma nebo není dělitelné třemi.“

Úlohy

4.16 Negujte výroky:
u: Bod B leží na kružnici k nebo na přímce p.
v: Poslední cifra dekadického zápisu čísla 37^7 není nula ani pětka.
w: Je-li ciferný součet čísla 37^7 dělitelný třemi, je toto číslo dělitelné třemi.

4.17 Považujte následující rčení za výroky a negujte je:
Přišel jsem, viděl jsem, zvítězil jsem.
Nebude-li pršet, nezmoknem.
Já to platit nebudu, radši se dám na vojnu.
Bude-li každý z nás z křemene, bude celý národ z kvádrů.

4.18 Utvořte negace výroků

$$a \vee \neg b,\ a \Rightarrow \neg b,\ \neg a \Leftrightarrow \neg b,\ \neg a \wedge b,\ \neg a \Rightarrow b,\ \neg a \wedge \neg b,\ \neg a \vee \neg b,$$

kde a, b jsou libovolné výroky.

4.19 Jsou dány libovolné výroky a, b, c. Utvořte negace výroků:

$$(a \wedge b) \Rightarrow c,\ a \Rightarrow (b \vee c),\ (a \wedge c) \Leftrightarrow b,\ a \Leftrightarrow (b \Rightarrow c)$$

4.20 Určete, které z následujících výroků jsou tautologie, tj. jsou pravdivé pro všechny pravdivostní hodnoty výroků a, b:

$$(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (\neg a \vee b),\ (a \Leftrightarrow b) \Leftrightarrow (\neg a \Leftrightarrow \neg b),\ (b \Rightarrow a) \Leftrightarrow (\neg b \Rightarrow \neg a)$$

4.5 Kvantifikované výroky a jejich negace

V úvodu této kapitoly bylo uvedeno, že rovnost $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ není výrok; tušíme sice, že proměnné a, b jsou nějaká čísla, ale není to jisté: v matematice existují objekty, které lze sčítat, násobit a umocňovat a čísla to přitom nejsou. Kromě toho — když připustíme, že jde o čísla — však ani nevíme, pro která čísla to platí: pro všechna čísla přirozená, nebo pro některá čísla celá, nebo pro několik čísel racionálních? Vzhledem k těmto nejasnostem nemá otázka po pravdivosti tohoto sdělení smysl, a nejedná se proto o výrok. Podobně nemá také smysl ptát se, zda je pravda, že „Čísla jsou kladná“, když nevíme, kterých a kolika čísel se to týká: všech přirozených čísel, nebo některých celých, nebo jen čísel na několika domech v ulici, kde bydlíte?

K tomu, aby se sdělení tohoto typu stala výroky, je nutno je **kvantifikovat**, tj. vymezit nějakým způsobem prvky, které mají danou vlastnost. Výrazy, které vymezují počty těchto prvků, se nazývají **kvantifikátory**; patří mezi ně např. slova: všichni, každý, některý, žádný, právě dva, aspoň jeden, nejvýše tři apod. Výroky, které obsahují kvantifikátory, se nazývají **kvantifikované výroky**; setkali jsme se s nimi už v článku 4.1, kde jsme se zabývali výroky, ve kterých byl číselný údaj vyjádřen slovy „aspoň“ nebo „nejvýše“.

V matematice se obvykle používá kvantifikátor obecný a existenční. **Obecný** (neboli velký) **kvantifikátor** říká, že daná vlastnost platí **pro všechny** prvky nebo také **pro každý** prvek nebo též **pro libovolný** prvek. **Existenční** (neboli malý) **kvantifikátor** vyjadřuje, že **existuje aspoň jeden** prvek dané vlastnosti nebo že daná vlastnost platí **aspoň pro jeden** prvek. Výroky, které obsahují obecný kvantifikátor, se nazývají **obecné výroky**, výroky, které obsahují kvantifikátor existenční, se nazývají **existenční výroky**.

Sdělení uvedená na začátku tohoto článku můžeme přetvořit ve výroky užitím obecného, resp. existenčního kvantifikátoru např. takto:

Pro všechna reálná čísla a, b platí $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Existuje aspoň jedno přirozené číslo, které je kladné.

Existuje aspoň jedno reálné číslo a a aspoň jedno reálné číslo b, pro něž platí $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Každé přirozené číslo je kladné.

Kvantifikátory se zkráceně zapisují takto:

obecný kvantifikátor… $\forall$, existenční kvantifikátor… $\exists$.

Pomocí těchto symbolů se výroky, které předcházejí této poznámce, zapisují následovně:

$\forall a, b \in \mathsf{R};\ (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;

$\exists n \in \mathsf{N};\ n > 0$;

$\exists a, b \in \mathsf{R};\ (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;

$\forall n \in \mathsf{N};\ n > 0$.

Příklad 1

Pomocí kvantifikátorů utvořte z následujících vět pravdivé výroky:

a) Pro čísla x, y platí $x^2 + y^2 = 0$.

b) Pro číslo x platí $x^2 + 1 > 0$.

Řešení

a) Protože druhá mocnina každého reálného čísla je číslo nezáporné, je součet druhých mocnin každých dvou reálných čísel nezáporné číslo; roven nule je pouze pro $x = y = 0$. Z dané věty dostaneme kvantifikací tento pravdivý výrok:

Existuje aspoň jedno $x \in \mathsf{R}$ a aspoň jedno $y \in \mathsf{R}$ tak, že $x^2 + y^2 = 0$.

(Výrok „Pro všechna $x, y \in \mathsf{R}$ platí $x^2 + y^2 = 0$“ je nepravdivý.)

b) Kvantifikací dostaneme dva pravdivé výroky:

Existuje aspoň jedno reálné číslo x tak, že $x^2 + 1 > 0$.

Pro každé reálné číslo x platí $x^2 + 1 > 0$.

(Všimněte si, že tento druhý výrok vypovídá o reálných číslech podstatně více než první.)

Tento příklad ukazuje, že mezi výroky s obecným a existenčním kvantifikátorem existuje určitá souvislost. Má-li každý prvek množiny M určitou vlastnost, znamená to, že v této množině existuje aspoň jeden prvek s touto vlastností. Existuje-li však v množině M aspoň jeden prvek jisté vlastnosti, nemusí mít tuto vlastnost všechny její prvky! Na tuto samozřejmost se někdy — a to i úmyslně — zapomíná: z ojedinělého případu se vytváří pravidlo, z vlastností jednoho člověka se dělají závěry o vlastnostech celého etnika atd.

Naučíme se nyní negovat kvantifikované výroky. Vezměme nejprve výrok „**Pro každý prvek množiny** M **platí, že má danou vlastnost**“. Jeho negace „Není pravda, že každý prvek množiny M má danou vlastnost“ říká totéž co výrok „**Aspoň jeden prvek množiny** M **nemá danou vlastnost**“. Vezměme dále výrok „**Existuje aspoň jeden prvek množiny** M**, který má danou vlastnost**“. Jeho negace „Není pravda, že aspoň jeden prvek množiny M má danou vlastnost“ říká totéž co výrok „**Pro každý prvek množiny** M **platí, že nemá danou vlastnost**“, neboli „**Žádný prvek množiny** M **nemá danou vlastnost**“.

Všimněte si, že při negaci kvantifikovaného výroku se velký kvantifikátor nahradí malým, resp. malý velkým a zároveň se slovo „má“ nahradí slovem „nemá“.

Negace výroku „Každý prvek množiny M má danou vlastnost“ je výrok „Aspoň jeden prvek množiny M nemá danou vlastnost“.	Negace výroku „Aspoň jeden prvek množiny M má danou vlastnost“ je výrok „Žádný prvek množiny M nemá danou vlastnost“.

Uvědomte si, že negací výroku „Každý člověk je smrtelný“ není výrok „Všichni lidé jsou nesmrtelní“, ale výrok „Existuje aspoň jeden člověk, který je nesmrtelný“, neboli zkráceně „Aspoň jeden člověk je nesmrtelný“; negací výroku „Ve třídě je aspoň jedno okno otevřené“ není výrok „Ve třídě jsou otevřená všechna okna“, ale výrok „Ve třídě jsou všechna okna zavřená“.

Příklad 2

Utvořte negace následujících pravdivých výroků:

t: Průnik libovolné množiny s množinou prázdnou je prázdná množina.
u: Existuje aspoň jeden trojúhelník, který je pravoúhlý.
v: Existuje aspoň jedno reálné číslo, jehož absolutní hodnota je rovna nule.
w: Druhá mocnina každého reálného čísla je číslo nezáporné.

Řešení

Negace daných výroků jsou tyto nepravdivé výroky:

t: Existuje aspoň jedna množina, jejíž průnik s množinou prázdnou je neprázdný.
u: Žádný trojúhelník není pravoúhlý.
v: Absolutní hodnota každého reálného čísla je číslo různé od nuly.
w: Existuje aspoň jedno reálné číslo, jehož druhá mocnina je číslo záporné.

Úlohy

4.21 Posuďte pravdivost následujících výroků a utvořte jejich negace:

a: Úhlopříčky každého čtyřúhelníku jsou navzájem kolmé.
b: Každé celé číslo je racionální.
c: Existuje trojúhelník, ve kterém součet všech jeho vnitřních úhlů není roven 180°.
d: Existuje aspoň jedno reálné číslo, jehož součin s nulou je číslo nenulové.

4.22 Následující tvrzení považujte za výroky a negujte je:
Nic nového pod sluncem.
Bez práce nejsou koláče.
Žádný učený z nebe nespadl.
Kdo jinému jámu kopá, sám do ní spadne.

4.23 Určete, který z níže uvedených výroků je negací výroku „Každá kočka je černá“:
„Každá kočka je bílá“, „Každá kočka není černá“, „Aspoň jedna kočka je bílá“, „Aspoň jedna kočka není černá“.

4.24 Negujte pravdivé výroky:

a: Existuje aspoň jedno reálné číslo x, pro něž $\sqrt{x^2} = x$.
b: Pro všechna reálná čísla $x > 1$ platí $\sqrt{x^2} > x$.
c: Každé přirozené číslo, které je dělitelné deseti, je dělitelné pěti.
d: Žádné přirozené číslo není menší než -10.

4.25 Negujte nepravdivé výroky:

a: Existuje aspoň jedno přirozené číslo, které není sudé ani liché.
b: Každé dvě přímky v rovině jsou rovnoběžné.
c: Existuje aspoň jeden trojúhelník, ve kterém se všechny jeho výšky neprotínají v jediném bodě.
d: Součet žádných dvou celých čísel není roven nule.

4.6 Definice, věty, důkazy

V matematice — na rozdíl od některých jiných oborů lidské činnosti — nelze vést plané řeči a hovořit v pojmech, jejichž smysl není jasně stanoven a pod nimiž si každý může představovat něco jiného. Každý matematický pojem musí proto být přesně definován.

Definice je vymezení matematického pojmu pomocí pojmů základních nebo pojmů definovaných už dříve. Tak např. v definici *Kružnice je množina všech bodů roviny, které mají od daného bodu stejnou nenulovou vzdálenost* jsou použity tyto základní, resp. dříve definované pojmy: množina, bod, rovina, vzdálenost dvou bodů. Pojmy množina, bod, rovina patří mezi základní; jsou to pojmy, které se nedefinují — omezujeme se pouze na jejich vysvětlení pomocí představ a příkladů. Bez základních pojmů se žádná teorie neobejde, neboť „z něčeho se vyjít musí".

Matematická věta je výrok, jehož pravdivost je dokázána. Při jejím důkazu se vychází z vět dokázaných již dříve nebo z **axiomů**, což jsou tvrzení, která se přijímají za pravdivá bez důkazu. Příkladem jednoho z axiomů, na nichž je vybudována planimetrie, je axiom: *Každým bodem lze k dané přímce vést jedinou rovnoběžku.*

Důkaz je úvaha, která zdůvodňuje platnost matematické věty. S hlavními typy důkazů matematických vět se nyní seznámíme; omezíme se však jenom na věty, které jsou v matematice nejčastější. Jsou to:

a) Věty, které mají tvar elementárního výroku, tj. věty typu: Druhá odmocnina ze dvou je číslo iracionální. V každém trojúhelníku je součet všech velikostí jeho vnitřních úhlů roven $180°$.

b) Věty, které mají tvar implikace, tj. věty typu: Rozmístíme-li do deseti přihrádek jedenáct předmětů, pak aspoň v jedné přihrádce jsou aspoň dva předměty. Pro všechna reálná čísla a, b, c platí: je-li $a = b$, pak $a + c = b + c$.

c) Věty, které mají tvar ekvivalence, tj. věty typu: Počet prvočísel je nekonečný právě tehdy, když neexistuje největší prvočíslo. Pro všechna reálná čísla a, b je součet jejich druhých mocnin roven nule právě tehdy, když $a = 0$ a zároveň $b = 0$.

1. Důkazy vět, které mají tvar elementárního výroku

K důkazu těchto vět se obvykle používá přímý důkaz nebo důkaz sporem.

Přímý důkaz je založen na této vlastnosti implikace:
Platí-li výrok a a implikace $a \Rightarrow b$, platí i výrok b.

Chceme-li tímto způsobem dokázat výrok b, postupujeme takto: Vyjdeme od výroku a, o kterém víme, že platí; může to být axiom, obvykle to však je matematická věta dokázaná již dříve. Z výroku a pak odvodíme výrok b, tj. ukážeme, že platí implikace $a \Rightarrow b$; tím je výrok b dokázán. Tento postup lze přehledně zapsat takto:

Přímý důkaz výroku b:

Víme:	a	platí
Ukážeme:	$a \Rightarrow b$	platí
Závěr:	b	platí

(To, že platí $a \Rightarrow b$, se obyčejně nedá ukázat přímo, ale postupně, řetězcem implikací: $a \Rightarrow b_1$, $b_1 \Rightarrow b_2$, ..., $b_n \Rightarrow b$.)

Otázkou zůstává, který z nepřeberného množství pravdivých výroků máme vybrat, aby z něho bylo možné danou větu odvodit. Způsob, kterým se dá tento výrok najít, si ukážete během studia na konkrétních příkladech. Je důležité, abyste si uvědomili, že žádnou větu nelze dokázat tak, že z ní odvodíte pravdivý výrok! Z toho, že platí implikace $a \Rightarrow b$ a její závěr b, neplyne, že platí její předpoklad a.

Důkaz sporem je založen na této vlastnosti implikace:
Platí-li implikace $a \Rightarrow b$ a neplatí-li výrok b, neplatí ani výrok a.

Chceme-li tímto způsobem dokázat výrok a, postupujeme takto: Předpokládáme, že platí negace výroku a, a odvodíme z ní výrok b, o kterém víme, že je nepravdivý. Protože implikace $\neg a \Rightarrow b$ platí, ale výrok b neplatí, neplatí ani výrok $\neg a$; to však znamená, že výrok a platí. Tím je platnost výroku a dokázána. Tento postup můžeme přehledně zapsat následovně:

Důkaz výroku a sporem:

Ukážeme: $\neg a \Rightarrow b$ .... platí
Víme: b .... neplatí
Závěr: $\neg a$ neplatí, tj. a platí

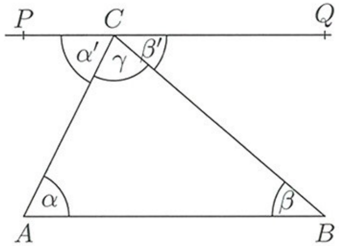
(Stejně jako v předcházejícím případě nedá se platnost implikace $\neg a \Rightarrow b$ obvykle dokázat přímo, ale postupně.)

Příklad 1

Dokažte, že v každém trojúhelníku je součet všech jeho vnitřních úhlů roven $180°$.

Řešení

Přímý důkaz této věty spočívá v tom, že si zvolíme libovolný trojúhelník ABC na obr. 4.1 a vyjdeme z pravdivého výroku, že bodem mimo danou



Obr. 4.1

přímku lze vést jedinou přímku, která je s ní rovnoběžná. K přímce AB existuje tedy jediná rovnoběžka procházející bodem C; na obr. 4.1 je to přímka PQ. Podle známé věty o rovnoběžkách proťatých příčkou platí $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \beta$ (úhly střídavé), a protože úhel PCQ je přímý, dostáváme

$$\alpha' + \beta' + \gamma = \alpha + \beta + \gamma = 180°.$$

Vzhledem k tomu, že trojúhelník ABC byl zvolen libovolně, platí, že součet vnitřních úhlů je roven $180°$ v každém trojúhelníku.

Příklad 2

Dokažte, že šachovnici 8×8, ze které je odstřiženo levé dolní a pravé horní políčko, nelze pokrýt 31 obdélníky 2×1. (Pokrytím přitom rozumíme takový způsob umístění daných obdélníků na tuto šachovnici, že každé políčko šachovnice je zakryto právě jedním ze dvou čtverců, z nichž je složen každý obdélník 2×1.)

Řešení

Dané tvrzení dokážeme sporem. Vyjdeme z jeho negace, takže předpokládáme, že šachovnici se dvěma odstřiženými políčky je možné 31 obdélníky 2×1 pokrýt. Při tomto pokrytí leží pod **každým** z těchto obdélníků jedno bílé a jedno černé políčko šachovnice. Pod všemi 31 obdélníky, tj. na celé šachovnici, leží tedy 31 bílých a 31 černých políček. Tento výrok, že na dané šachovnici se dvěma odstřiženými políčky je stejný počet bílých a černých políček, je však nepravdivý, neboť políčka, která byla odstraněna, měla stejnou barvu. Znamená to, že na takto upravené šachovnici není 31 bílých a 31 černých políček, ale 30 políček jedné a 32 políček druhé barvy. Tím je tvrzení, že tuto šachovnici nelze pokrýt danými obrazci, dokázáno.

2. Důkazy vět, které mají tvar implikace

K důkazu těchto vět se používá důkaz přímý, důkaz sporem a důkaz nepřímý.

Přímý důkaz věty typu $a \Rightarrow b$ spočívá v tom, že z předpokladu, že platí a, odvodíme postupně, že platí $a \Rightarrow b_1$, $b_1 \Rightarrow b_2$, ..., $b_n \Rightarrow b$; tím je platnost věty $a \Rightarrow b$ dokázána. (Jestliže výrok a neplatí, je implikace

$a \Rightarrow b$ splněna „automaticky“ a nemusíme nic dokazovat.) Všimněte si, že u přímého důkazu vět tohoto typu jsme ušetřeni nutnosti hledat pravdivý výrok, ze kterého je nutno vyjít při důkazu vět předešlého typu.

Přímý důkaz věty $a \Rightarrow b$:

Předpokládáme:	a	platí
Ukážeme:	$(a \Rightarrow c) \wedge (c \Rightarrow b)$	platí
Závěr:	$a \Rightarrow b$	platí

(Implikace $a \Rightarrow c$, $c \Rightarrow b$ opět zastupují celý řetězec implikací.)

Důkaz sporem věty typu $a \Rightarrow b$ probíhá způsobem, který už známe; připomeňme si jen, že negace implikace $a \Rightarrow b$ je konjunkce $a \wedge \neg b$ (takže negace konjunkce $a \wedge \neg b$ je implikace $a \Rightarrow b$). Při důkazu věty tohoto typu tedy předpokládáme, že platí její negace, tj. věta $a \wedge \neg b$, a odvodíme z ní výrok c, o kterém víme, že je nepravdivý. Protože platí implikace $(a \wedge \neg b) \Rightarrow c$, ale výrok c neplatí, neplatí ani výrok $a \wedge \neg b$, což znamená, že platí $a \Rightarrow b$. Tím je daná věta dokázána.

Důkaz věty $a \Rightarrow b$ sporem:

Ukážeme:	$(a \wedge \neg b) \Rightarrow c$	platí
Víme:	c	neplatí
Závěr:	$a \wedge \neg b$ neplatí, tj. $a \Rightarrow b$ platí	

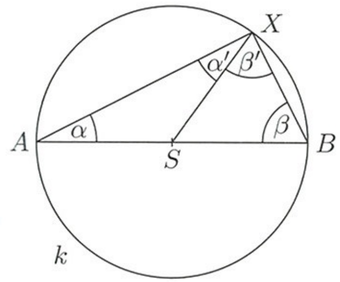
Nepřímý důkaz věty $a \Rightarrow b$ spočívá v tom, že dokážeme obměněnou implikaci $\neg b \Rightarrow \neg a$, která je s implikací $a \Rightarrow b$ ekvivalentní. Nepřímý důkaz věty $a \Rightarrow b$ je vlastně přímý důkaz věty $\neg b \Rightarrow \neg a$, takže to pro nás není nic nového.

Příklad 3

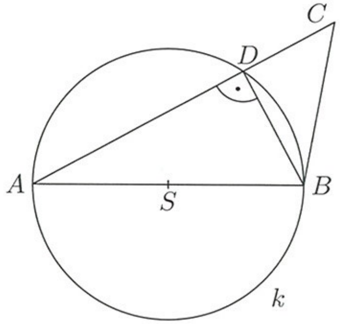
Je dána kružnice k s průměrem AB. Dokažte, že platí: Je-li X libovolný bod kružnice k, který je různý od bodů A, B, potom úhel AXB je pravý.

Řešení

Větu dokážeme přímým důkazem. Zvolme na kružnici k na obr. 4.2 bod X tak, že je různý od bodů A, B, a označme S střed této kružnice. Potom trojúhelníky SAX a SBX jsou rovnoramenné s hlavním vrcholem v bodě S, takže podle obr. 4.2 platí $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$. Protože však v trojúhelníku ABX platí $\alpha + \beta + (\alpha' + \beta') = 180°$, plyne z této rovnosti $\alpha' + \beta' = 90°$, takže úhel AXB je pravý.



Obr. 4.2



Obr. 4.3

Příklad 4

Je dán trojúhelník ABC. Dokažte, že platí: Je-li úhel ACB pravý, pak bod C leží na kružnici s průměrem AB.

Řešení

Nepřímý důkaz této věty spočívá v tom, že dokážeme obměněnou implikaci, tj. že platí: Neleží-li bod C na kružnici s průměrem AB, pak úhel ACB není pravý. Předpokládejme nejprve, že bod C leží ve vnější oblasti kružnice k podle obr. 4.3. Průsečík strany AC trojúhelníku ABC s kružnicí k označme D a uvědomme si, že podle věty dokázané v předcházejícím příkladu je úhel ADB pravý. To však znamená, že vedlejší úhel CDB je rovněž pravý, a protože v trojúhelníku BCD nemohou být dva pravé úhly, není úhel DCB, tj. úhel ACB, pravý. Tím je věta dokázána pro případ, že bod C leží ve vnější oblasti kružnice k. Případ, že bod C leží ve vnitřní oblasti této kružnice, už jistě zvládnete sami.

Příklad 5

Dokažte, že pro všechna přirozená čísla n platí: jestliže je číslo n^2 sudé, je sudé i číslo n.

Řešení

Větu dokážeme sporem. Předpokládejme, že platí negace této věty, tj. věta: Existuje aspoň jedno přirozené číslo n takové, že číslo n^2 je sudé a zároveň n je liché. Z toho, že číslo n je liché, plyne, že se dá vyjádřit ve tvaru $n = 2k + 1$, kde k je celé číslo; odtud dále vyplývá, že platí

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1,$$

což znamená, že číslo n^2 je liché. Tento výsledek je ve sporu s naším předpokladem, čímž je daná věta dokázána.

3. Důkazy vět, které mají tvar ekvivalence

Platnost věty typu $a \Leftrightarrow b$ se nejčastěji dokazuje tak, že se dokážou implikace $a \Rightarrow b$ a implikace $b \Rightarrow a$.

Příklad 6

Dokažte, že pro všechna reálná čísla x platí:

$$x \geqq 0 \Leftrightarrow |x| - x = 0.$$

Řešení

Zvolme libovolné číslo x a předpokládejme nejprve, že je nezáporné, takže $|x| = x$. Platí proto:

$$x \geqq 0 \Rightarrow |x| - x = x - x = 0.$$

Předpokládejme dále, že pro zvolené číslo x platí $|x| - x = 0$. Odtud plyne $|x| = x$, což platí jedině pro $x \geqq 0$. Tím je daná věta dokázána.

Poznámka. Velmi důležitým typem důkazu je důkaz matematickou indukcí. S tímto důkazem se seznámíte později.

Úlohy

4.26 V rovině je dána úsečka AB. Dokažte, že pro libovolný bod X této roviny platí: Bod X leží na ose úsečky AB právě tehdy, když se jeho vzdálenosti od bodů A, B rovnají.

4.27 Dokažte Pythagorovu větu: V každém pravoúhlém trojúhelníku s odvěsnami a, b a s přeponou c platí

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

4.28 Je dána kružnice k se středem S a v jejím bodě A je sestrojena přímka p kolmá k přímce SA. Dokažte, že přímka p má s kružnicí k jediný společný bod A.

4.29 Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí: je-li n^2 dělitelné třemi, pak je třemi dělitelné i číslo n. (Použijte nepřímý důkaz a rozlište případy: $n = 3k + 1$, $n = 3k + 2$.)

4.30 Dokažte sporem (a bez numerických výpočtů), že platí:

$$3 + \sqrt{2} > \sqrt{19}.$$

5. ELEMENTÁRNÍ TEORIE ČÍSEL

V elementární teorii čísel se studují základní vlastnosti celých čísel. My se však v této kapitole omezíme jen na čísla přirozená a budeme se zabývat těmi vlastnostmi přirozených čísel, které souvisejí s jejich dělitelností. Navážeme přitom na poznatky ze základní školy; nejdůležitější poznatky dokážeme nebo zdůvodníme.

5.1 Zápisy přirozených čísel, násobek a dělitel čísla

Číslicový (ciferný) zápis čísla 27 035 v desítkové soustavě je úsporný záznam součtu

$$\mathbf{2}\cdot 10^4+\mathbf{7}\cdot 10^3+\mathbf{0}\cdot 10^2+\mathbf{3}\cdot 10+\mathbf{5},$$

který se nazývá **rozvinutý zápis** čísla.

Máme-li zapsat v desítkové soustavě libovolné trojciferné přirozené číslo, budeme postupovat tak, že číslici na místě stovek označíme x, číslici na místě desítek označíme y a číslici na místě jednotek označíme z. Aby číslo bylo trojciferné, musí být $x \neq 0$ (023 je dvojciferné číslo 23). Pak libovolné trojciferné přirozené číslo zapíšeme v desítkové soustavě takto:

$$(xyz)_{10}=x\cdot 10^2+y\cdot 10+z=100x+10y+z$$

Zápis $35=7\cdot 5$ můžeme pomocí termínů **násobek** a **dělitel** vyjádřit čtyřmi způsoby:

1. Číslo 35 je násobkem čísla 5. **2.** Číslo 5 je dělitelem čísla 35.
3. Číslo 35 je násobkem čísla 7. **4.** Číslo 7 je dělitelem čísla 35.

Pojmy násobek a dělitel pro přirozená čísla a, b definujeme takto:

> Číslo a je **násobkem** čísla b (číslo b je **dělitelem** čísla a), právě když existuje přirozené číslo k takové, že $a=kb$.

Skutečnost, že b je dělitelem a vyjadřujeme slovy „a je dělitelné b“ nebo „b dělí a“, což stručně zapisujeme $b \mid a$. Tedy zápis $5 \mid 35$ čteme „5 dělí 35“ nebo „5 je dělitelem 35“. Každé přirozené číslo n lze zapsat ve tvaru $n=1\cdot n$. Proto číslo 1 je dělitelem každého přirozeného čísla.

Přirozená čísla nazýváme **nesoudělná**, je-li jejich společným dělitelem pouze číslo jedna. Přirozená čísla nazýváme **soudělná**, mají-li společného dělitele většího než jedna.

S pojmy nesoudělná a soudělná čísla jsme se již setkali při vyjádření racionálního čísla v základním tvaru.

Příklad 1

Zapište zlomek $\dfrac{120}{210}$ v základním tvaru.

Řešení

$$\frac{120}{210}=\frac{12\cdot 10}{21\cdot 10}=\frac{12}{21}=\frac{3\cdot 4}{3\cdot 7}=\frac{4}{7}$$

Rozšiřme své dovednosti v zápisech přirozených čísel pomocí proměnných. Využijme násobky čísel a zbytky při dělení všech přirozených čísel zvoleným číslem. Dělíme-li přirozená čísla dvěma (třemi, čtyřmi), dostaneme:

$1=2\cdot 0+1$	$1=3\cdot 0+1$	$1=4\cdot 0+1$
$2=2\cdot 1+0$	$2=3\cdot 0+2$	$2=4\cdot 0+2$
$3=2\cdot 1+1$	$3=3\cdot 1+0$	$3=4\cdot 0+3$
$4=2\cdot 2+0$	$4=3\cdot 1+1$	$4=4\cdot 1+0$
$5=2\cdot 2+1$	$5=3\cdot 1+2$	$5=4\cdot 1+1$
$6=2\cdot 3+0$	$6=3\cdot 2+0$	$6=4\cdot 1+2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Obecně: Ke každému přirozenému číslu n existují celá nezáporná čísla k_1, k_2, k_3 tak, že

$n=2k_1+z_1$,	$n=3k_2+z_2$,	$n=4k_3+z_3$,
kde $z_1\in\{0,1\}$;	kde $z_2\in\{0,1,2\}$;	kde $z_3\in\{0,1,2,3\}$.

Z prvního sloupce je zřejmé, že při dělení přirozeného čísla dvěma vyjde zbytek buď 0, nebo 1. V prvním případě je číslo n sudé ($n = 2k$), v druhém případě je liché ($n = 2k+1$). To znamená, že každé přirozené číslo lze zapsat jedním z výrazů

$$2k, \quad 2k+1, \quad \text{kde } k \in \mathsf{N}_0.$$

Při dělení třemi dostáváme zbytky 0, 1, 2. Přirozené číslo, které je násobkem tří, můžeme zapsat výrazem $3k$, kde $k \in \mathsf{N}$. Každé přirozené číslo lze zapsat jedním z výrazů

$$3k, \quad 3k+1, \quad 3k+2, \quad \text{kde } k \in \mathsf{N}_0.$$

Ve třetím sloupci vidíme, že při dělení čtyřmi dostáváme zbytky 0, 1, 2, 3. Přirozené číslo, které je násobkem čtyř, zapíšeme výrazem $4k$, kde $k \in \mathsf{N}$. Každé přirozené číslo můžeme zapsat jedním z výrazů

$$4k, \quad 4k+1, \quad 4k+2, \quad 4k+3, \quad \text{kde } k \in \mathsf{N}_0.$$

Dá se ověřit, že zkušenosti získané s násobky čísel 2, 3, 4 a se zbytky můžeme zobecnit pro libovolné přirozené číslo $b > 1$. Platí:

Každé přirozené číslo n lze pomocí přirozeného čísla $b > 1$ vyjádřit jedním z výrazů

$$bk, \; bk+1, \; bk+2, \; \ldots, \; bk+(b-1), \quad \text{kde } k \in \mathsf{N}_0;$$

stručněji $n = bk + z$, kde $k \in \mathsf{N}_0$, $z \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$.

Z předcházejících úvah rovněž vyplývá, že ze dvou za sebou následujících přirozených čísel je právě jedno číslo dělitelné dvěma. To znamená, že součin každých dvou za sebou následujících čísel je dělitelný dvěma. Zapisujeme $2 \mid n(n+1)$. Součin každých tří za sebou následujících přirozených čísel je dělitelný třemi, protože právě jedno z nich je dělitelné třemi. Zapisujeme $3 \mid n(n+1)(n+2)$. Součin tří za sebou

následujících přirozených čísel můžeme zapsat i jinými způsoby, např. $(n-1)n(n+1)$. Součin každých tří za sebou následujících přirozených čísel je dělitelný třemi, proto i v tomto případě platí $3 \mid (n-1)n(n+1)$.

Zobecněním dostaneme hypotézu, že součin každých b ($b \in \mathsf{N}$) za sebou následujících přirozených čísel je dělitelný číslem b. Dá se dokázat, že tato hypotéza skutečně platí. Zapisujeme

$$b \mid n(n+1)\ldots(n+b-1).$$

Uvedená tvrzení budeme používat v některých důkazových úlohách, v nichž budeme upravovat výrazy na součin za sebou následujících přirozených čísel.

Příklad 2

Dokažte, že pro každé přirozené číslo n je číslo $n^3 - n$ dělitelné šesti.

Řešení

Výraz $n^3 - n$ vytknutím a užitím vzorce pro rozdíl druhých mocnin rozložíme na součin:

$$n^3 - n = n(n^2-1) = n(n+1)(n-1) = (n-1)n(n+1).$$

Dostali jsme součin tří za sebou následujících přirozených čísel. Aspoň jedno z těchto čísel je dělitelné dvěma, právě jedno z nich je dělitelné třemi, proto jejich součin je dělitelný šesti.

Ne vždy se nám podaří rozložit výraz na součin několika za sebou následujících přirozených čísel. V takových případech zpravidla použijeme zápis přirozeného čísla ve tvaru $n = bk + z$, kde $k \in \mathsf{N}_0$, $z \in \{0, 1, \ldots, b-1\}$.

Příklad 3

Dokažte, že pro každé přirozené číslo n je číslo $n^3 + 2n$ dělitelné třemi.

Řešení

Z daného výrazu vytkneme n:

$$n^3 + 2n = n(n^2 + 2).$$

Do upraveného výrazu postupně dosadíme $n = 3k$, $n = 3k + 1$, $n = 3k + 2$:

a) $n(n^2 + 2) = 3k(9k^2 + 2)$

b) $n(n^2 + 2) = (3k + 1)[(3k + 1)^2 + 2] = (3k + 1)(9k^2 + 6k + 3) = 3(3k + 1)(3k^2 + 2k + 1)$

c) $n(n^2 + 2) = (3k + 2)[(3k + 2)^2 + 2] = (3k + 2)(9k^2 + 12k + 4 + 2) = (3k + 2)(9k^2 + 12k + 6) = 3(3k + 2)(3k^2 + 4k + 2)$

V případě a) ihned po dosazení vidíme, že $n^3 + 2n$ je dělitelné třemi. V případech b) a c) se nám podařilo vytknout dělitele 3. Tím jsme dokázali, že pro každé přirozené číslo n je $n^3 + 2n$ dělitelné třemi.

Uvedli jsme, že součin každých b za sebou následujících přirozených čísel je dělitelný číslem b. Pokusme se nyní zjistit, zda podobná věta platí také pro součet každých b za sebou následujících přirozených čísel.

Příklad 4

Zjistěte, zda platí, že součet každých tří (čtyř) za sebou následujících přirozených čísel je dělitelný třemi (čtyřmi).

Řešení

$$s(3) = n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3 = 3(n + 1)$$

Součet každých tří za sebou následujících přirozených čísel je dělitelný třemi.

$$s(4) = n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) = 4n + 6 = 4n + 4 + 2 = 4(n + 1) + 2$$

Tím jsme zjistili, že součet žádných čtyř za sebou následujících přirozených čísel není dělitelný čtyřmi; je však dělitelný dvěma.

Řešení příkladu 4 dokazuje, že věta „součet každých b za sebou následujících přirozených čísel je dělitelný číslem b" neplatí. Pro $b = 4$ věta neplatí.

Úlohy

5.1 Napište rozvinutý zápis čísel:
a) 327 b) 6 305 c) 74 068

5.2 Upravte dané zlomky na základní tvar:
a) $\frac{360}{504}$ b) $\frac{520}{1\,880}$ c) $\frac{1\,188}{2\,484}$ d) $\frac{1\,080}{2\,700}$
e) $\frac{675}{2\,925}$ f) $\frac{1\,250}{4\,375}$ g) $\frac{8\,640}{15\,552}$ h) $\frac{192\,375}{415\,125}$

5.3 První z dvou čísel vyjádřete jako součet co největšího násobku druhého čísla a zbytku:
a) 11; 3 b) 29; 4 c) 105; 7 d) 75; 12

5.4 Pomocí proměnné k, kde $k \in \mathsf{N}_0$, vyjádřete
a) libovolné přirozené číslo, které je násobkem šesti,
b) libovolné přirozené číslo, které při dělení třemi dá zbytek 2,
c) libovolné liché přirozené číslo,
d) libovolné přirozené číslo, které při dělení osmi dá zbytek 4.

5.5 Vyjádřete slovy význam zápisů, kde $k \in \mathsf{N}_0$:
a) $3k + 1$ b) $7k + 3$ c) $25k + 22$
Dále uveďte aspoň tři čísla, která mají uvedenou vlastnost.

5.6 Uveďte všechny zápisy, které využívají násobky šesti a slouží k vyjádření libovolného přirozeného čísla.

5.7 Určete, které ze zápisů z řešení předcházející úlohy označují čísla dělitelná a) dvěma, b) třemi.

5.8 Dokažte, že součin pěti libovolných za sebou následujících přirozených čísel je dělitelný 120.

5.9 Dokažte, že součet každých pěti (sedmi) za sebou následujících přirozených čísel je dělitelný pěti (sedmi).

5.10 Od libovolného trojciferného přirozeného čísla odečteme poslední číslici, dvojnásobek předposlední číslice a čtyřnásobek první číslice. Dokažte, že takto vzniklé číslo je dělitelné osmi.

5.11 Dokažte, že rozdíl druhých mocnin každých dvou za sebou následujících lichých přirozených čísel je dělitelný číslem 8. Rozdíl utvořte tak, že od většího čísla odečtete číslo menší.

5.12 Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí:
a) 4 dělí $n^4 - n^2$ b) 12 dělí $n^4 - n^2$
c) 4 dělí $n^4 + 3n^2$ d) 12 dělí $n^5 - n^3$

5.2 Znaky dělitelnosti

Některé dělitele přirozených čísel poznáme přímo ze zápisu těchto čísel v desítkové soustavě. Například dělitelnost daného čísla deseti, pěti nebo dvěma okamžitě poznáme podle jeho poslední číslice. Odvoďme si znaky dělitelnosti pro uvedená čísla. V předcházejícím článku jsme poznali, že každé přirozené číslo n lze pomocí přirozeného čísla $b > 1$ vyjádřit ve tvaru $n = bk + z$, kde k je přirozené číslo nebo nula a $z \in \{0, 1, \dots, b-1\}$.

Zvolíme-li $b = 10$, dostaneme $n = 10k + z$, kde $k \in \mathsf{N}_0$ a $z \in \{0, 1, \dots, 8, 9\}$. To znamená, že např. číslo 7 můžeme zapsat ve tvaru $0 \cdot 10 + 7$, číslo 620 můžeme zapsat ve tvaru $62 \cdot 10 + 0$, číslo 2 378 ve tvaru $237 \cdot 10 + 8$ apod. Dále víme, že $n = 10k + z$ je dělitelné deseti právě tehdy, když $z = 0$. Protože z je poslední číslice v zápisu přirozeného čísla, odvodili jsme, že přirozené číslo je dělitelné deseti, právě když jeho zápis končí nulou.

Zkoumejme nyní dělitelnost přirozeného čísla n pěti. Vyjděme opět ze zápisu $n = 10k + z$, kde $k \in \mathsf{N}_0$ a $z \in \{0, 1, \dots, 9\}$. Výraz $10k$ je dělitelný pěti pro libovolné $k \in \mathsf{N}_0$. Výraz $10k + z$ je dělitelný pěti právě tehdy, když z je dělitelné pěti, tj. právě když $z = 0$ nebo $z = 5$. Dospěli jsme k závěru, že přirozené číslo je dělitelné pěti, právě když jeho zápis končí číslicí 0 nebo 5.

Podobně postupujeme při zkoumání dělitelnosti přirozeného čísla dvěma a zjistíme, že přirozené číslo je dělitelné dvěma, právě když jeho zápis končí některou z číslic 0, 2, 4, 6, 8.

Zapišme přehledně odvozené **znaky dělitelnosti deseti, pěti a dvěma**:

Přirozené číslo je dělitelné
a) **deseti**, právě když jeho zápis končí nulou,
b) **pěti**, právě když jeho zápis končí číslicí 0 nebo 5,
c) **dvěma**, právě když jeho zápis končí některou z číslic 0, 2, 4, 6, 8.

Poznámka. Znaky dělitelnosti deseti, pěti a dvěma jste na základní škole uváděli ve tvaru dvou implikací, které platí současně. Nyní jsme je vyjádřili ve tvaru ekvivalence.

Odvození znaků dělitelnosti přirozeného čísla n deseti, pěti a dvěma vycházelo ze zápisu $n = 10k + z$. Výraz $10k$ je vždy dělitelný deseti, a je tedy dělitelný i libovolným dělitelem čísla 10. Proto stačilo zkoumat dělitelnost čísla z, které je poslední číslicí daného čísla n a je zároveň zbytkem při dělení čísla n deseti.

Oddělme nyní od zápisu přirozeného čísla n poslední dvě číslice. To znamená, že např. číslo 620 zapíšeme ve tvaru $6 \cdot 100 + 20$, číslo 2 378 ve tvaru $23 \cdot 100 + 78$, obecně číslo n zapíšeme ve tvaru $n = 100k + z$, kde k je přirozené číslo nebo nula a $z \in \{1, 2, \dots, 99\}$. Číslo z je v tomto případě zbytek při dělení čísla n stem. Číslo 100 má dělitele 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100. Vyloučíme-li z těchto dělitelů samozřejmé dělitele 1 a 100 a dále čísla 2, 5, 10, jejichž znaky dělitelnosti již známe, dostaneme pro zbývající dělitele obdobné znaky dělitelnosti.

Znaky dělitelnosti čtyřmi, dvaceti, dvaceti pěti a padesáti
Přirozené číslo je dělitelné čtyřmi (dvaceti, dvaceti pěti, padesáti), právě když jeho poslední dvojčíslí (číslo vyjádřené jeho posledními dvěma ciframi) je dělitelné čtyřmi (dvaceti, dvaceti pěti, padesáti).

Příklad 1

Rozhodněte, zda čísla 25 316 a 138 675 jsou dělitelná čtyřmi či dvaceti pěti.

Řešení

Číslo 25 316 je dělitelné čtyřmi, protože poslední dvojčíslí 16 je dělitelné čtyřmi; není dělitelné 25, protože 16 není dělitelné dvaceti pěti.
Číslo 138 675 není dělitelné čtyřmi, protože poslední dvojčíslí 75 není dělitelné čtyřmi; je dělitelné dvaceti pěti, protože 75 je dělitelné 25.

Dělitelnost přirozených čísel třemi a devíti se pozná z dělitelnosti jejich ciferných součtů třemi a devíti.

Znaky dělitelnosti třemi a devíti
Přirozené číslo je dělitelné třemi (devíti), právě když jeho ciferný součet je dělitelný třemi (devíti).

Příklad 2

Rozhodněte, zda čísla 1 032 a 672 534 jsou dělitelná třemi či devíti.

Řešení

Ciferný součet čísla 1 032 je číslo 6. Číslo 6 je dělitelné třemi, proto číslo 1 032 je dělitelné třemi. Číslo 6 není dělitelné devíti, proto číslo 1 032 není dělitelné devíti.

Ciferný součet čísla 672 534 je 27, což je číslo dělitelné třemi i devíti. Proto číslo 672 534 je dělitelné třemi i devíti.

Objasněme si znaky dělitelnosti třemi a devíti například úvahou o čísle 7 038.

$$
\begin{aligned}
7\,038 &= 7 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 8 = 7 \cdot 1\,000 + 0 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 8 = \\
&= 7(999 + 1) + 0(99 + 1) + 3(9 + 1) + 8 = \\
&= 7 \cdot 999 + 0 \cdot 99 + 3 \cdot 9 + 7 + 0 + 3 + 8 = \\
&= 9(777 + 0 + 3) + \underline{(7 + 0 + 3 + 8)}
\end{aligned}
$$

Obdobně můžeme postupovat i v obecném případě přirozeného čísla n zapsaného číslicemi $c_k c_{k-1} \dots c_1 c_0$.

$$
\begin{aligned}
n &= c_k \cdot 10^k + c_{k-1} \cdot 10^{k-1} + \dots + c_1 \cdot 10 + c_0 = \\
&= c_k(99\dots9 + 1) + c_{k-1}(9\dots9 + 1) + \dots + c_1(9 + 1) + c_0 = \\
&= 9(11\dots1c_k + 1\dots1c_{k-1} + \dots + c_1) + \underline{(c_k + c_{k-1} + \dots + c_1 + c_0)}
\end{aligned}
$$

V obou případech vidíme, že první sčítanec je dělitelný devíti, a tedy i třemi. Druhý sčítanec, tj. podtržený výraz, je ciferný součet původního čísla. Je zřejmé, že dané číslo je dělitelné třemi (devíti), právě když jeho ciferný součet je dělitelný třemi (devíti). Je dokonce vidět, že číslo a jeho ciferný součet dávají při dělení třemi (devíti) stejný zbytek.

Při určování dělitelnosti přirozených čísel šesti nebo dvanácti využijeme toho, že $6 = 2 \cdot 3$ a $12 = 4 \cdot 3$, přičemž čísla 2, 3 jsou nesoudělná, totéž platí pro čísla 4 a 3.

Znaky dělitelnosti šesti a dvanácti
Přirozené číslo je dělitelné šesti, právě když je dělitelné dvěma a zároveň třemi.
Přirozené číslo je dělitelné dvanácti, právě když je dělitelné třemi a zároveň čtyřmi.

Úlohy

5.13 Rozhodněte, která z daných čísel jsou dělitelná čísly 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10 a 12:
a) 153 b) 1 460 c) 9 078 d) 51 410
e) 536 f) 1 164 g) 6 335 h) 454 528

5.14 V čísle 73∗2 doplňte na místo označené hvězdičkou číslici tak, aby vzniklé číslo bylo dělitelné
a) třemi, b) čtyřmi, c) devíti.

5.15 Ve čtyřciferném čísle $4x7y$ nahraďte x a y číslicemi tak, aby vzniklo co nejmenší číslo dělitelné dvanácti.

5.16 Pomocí číslic 2 a 3 napište všechna trojciferná přirozená čísla, která jsou dělitelná

a) dvěma, b) třemi, c) čtyřmi, d) šesti.

5.17 Vyslovte pravidlo o dělitelnosti přirozených čísel patnácti.

5.18 Zdůvodněte, proč každá dvě přirozená čísla, jež jsou zapsána týmiž číslicemi v různých pořadích (například 245 731 a 175 324), dávají při dělení třemi týž zbytek.

5.19 Zvolte libovolné přirozené číslo. Druhé číslo vytvořte tak, že zaměníte pořadí číslic zvoleného čísla. Pak od většího čísla odečtěte menší. Zdůvodněte, že vzniklý rozdíl je dělitelný devíti.

5.3 Prvočísla a složená čísla

V úvodu této kapitoly jsme se domluvili na tom, že budeme pracovat jen v oboru přirozených čísel. Proto pod pojmem dělitel budeme rozumět jen takového dělitele, který je přirozené číslo.

Příklad 1

Najděte všechny dělitele čísla 48.

Řešení

Číslo 48 rozložíme na součiny dvou čísel, přitom za prvního činitele volíme postupně čísla 1, 2, 3 atd. Pokud rozklad se zvoleným číslem nelze provést, pokračujeme k následujícímu číslu.

$$48 = 1 \cdot 48 \quad 48 = 2 \cdot 24 \quad 48 = 3 \cdot 16 \quad 48 = 4 \cdot 12 \quad 48 = 6 \cdot 8$$

Rozklady zpravidla zapisujeme do přehledné tabulky:

48	
1	48
2	24
3	16
4	12
6	8

Číslo 48 má 10 různých dělitelů: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48. Množinu dělitelů symbolicky zapíšeme takto: $\mathsf{D}(48) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$

Pro každé přirozené číslo n platí $n = 1 \cdot n$. Proto číslo 1 je dělitelem každého přirozeného čísla n. Číslo 1 má nejmenší počet dělitelů, dělitelem čísla 1 je jenom číslo 1. Každé přirozené číslo $n > 1$ má aspoň dva různé přirozené dělitele: číslo 1 a samo sebe.

Podle počtu dělitelů rozdělujeme přirozená čísla větší než jedna na prvočísla a složená čísla.

> **Prvočísla** jsou všechna přirozená čísla, která mají právě dva různé dělitele, číslo 1 a samo sebe.
> **Složená čísla** jsou všechna přirozená čísla, která mají aspoň tři různé dělitele.
> **Číslo 1** nepovažujeme ani za prvočíslo, ani za složené číslo.

Složené číslo často potřebujeme vyjádřit ve tvaru součinu jeho dělitelů větších než jedna. Takovému vyjádření říkáme **rozklad složeného čísla**. Rozklad složeného čísla můžeme provést zpravidla více způsoby, například:

$$24 = 2 \cdot 12 = 3 \cdot 8 = 4 \cdot 6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3$$

Vidíme, že složená čísla můžeme postupně rozložit až na součin prvočísel. Zápis složeného čísla ve tvaru součinu, jehož každý činitel je prvočíslo, se nazývá **prvočíselný rozklad** složeného čísla.

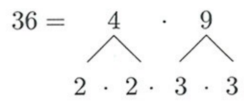
Uveďme si některé způsoby, kterými dojdeme k prvočíselnému rozkladu čísel.

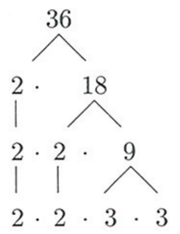
Příklad 2

Proveďte prvočíselný rozklad čísla 36.

Řešení

Řešení provedeme třemi způsoby:

1. 

2. 

3.

36	2
18	2
9	3
3	3
1	

Číslo 36 můžeme zapsat jako součin prvočísel $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$. Nejpřehlednější je 3. způsob, tzv. tabulkový zápis, v němž zaznamenáváme prvočíselné dělitele v pravém sloupci a v rozkladu pokračujeme až v levém sloupci vyjde podíl jedna. Při vyhledávání dělitelů uplatňujeme znaky dělitelnosti.

Rozklad přirozených čísel od 1 do 1 000 je uveden v Matematických, fyzikálních a chemických tabulkách pro střední školy. V tomto přehledu můžete rovněž najít všechna prvočísla menší než 1 000; jsou zde vytištěna tučně. Při rozkladech, úpravách zlomků a numerických výpočtech je užitečné vědět, která z čísel jsou prvočísla. Uveďme si alespoň prvočísla, která jsou menší než 100:
2, 3, 5 , 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97

Ke každému prvočíslu lze najít ještě větší prvočíslo. Jenže se zvětšujícími se prvočísly je hledání dalších prvočísel stále náročnější. Pokud však někde narazíte na informaci o největším dosud nalezeném prvočísle, můžete si být skoro jisti, že mezitím bylo nalezeno prvočíslo větší. Velká prvočísla se obvykle hledají mezi čísly tvaru $2^p - 1$, kde p je prvočíslo (tzv. Mersennova prvočísla). V době přípravy této učebnice bylo takovým rekordmanem prvočíslo $2^{3\,021\,377} - 1$, které má téměř milion číslic.

Při hledání prvočíselného rozkladu čísla používáme větu:

> Každé složené číslo n je dělitelné aspoň jedním prvočíslem p, pro které platí
> $$p \leqq \sqrt{n}.$$

Zjistíme-li, že číslo n není dělitelné žádným prvočíslem p, pro které platí $p \leqq \sqrt{n}$, pak n je prvočíslo.

Příklad 3

Proveďte prvočíselný rozklad čísla a) 943, b) 349.

Řešení

a) Protože $\sqrt{943} \doteq 30{,}7$, stačí podle předcházející věty zjišťovat dělitelnost čísla 943 prvočísly, která jsou menší než 31, tj. prvočísly 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 a 29. V tomto případě zjistíme, že až předposlední z nich, tj. prvočíslo 23, je dělitelem daného čísla. Platí: $943 = 23 \cdot 41$

b) Pro číslo 349 je třeba vyzkoušet dělitelnost prvočísly 2, 3, ..., 17, protože $\sqrt{349} \doteq 18{,}7$. Žádné z těchto prvočísel však není dělitelem daného čísla a to znamená, že 349 je prvočíslo.

V příkladu 2 jsme číslo 36 zapsali jako součin $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$. Zápisy prvočíselných rozkladů můžeme stručněji zapsat užitím mocnin prvočísel. Můžeme například zapsat:

$$36 = 2^2 \cdot 3^2, \quad 1\,600 = 2^6 \cdot 5^2, \quad 105\,840 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2$$

V prvočíselných rozkladech uspořádáme činitele tak, aby základy mocnin byly seřazeny vzestupně. Při dodržení této zásady je uvedený zápis prvočíselného rozkladu jednoznačný pro každé přirozené číslo. Tuto skutečnost vyjadřuje věta, kterou nazýváme **základní věta aritmetiky**.

> Každé přirozené číslo $n > 1$ lze zapsat jediným způsobem ve tvaru
> $$n = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{r_k},$$
> kde $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$ jsou prvočísla a $r_1, r_2, \ldots, r_k$ jsou přirozená čísla.

5.20 Proveďte tabulkový zápis prvočíselného rozkladu čísel:
a) 72 b) 210 c) 495 d) 5 775 e) 3 861

5.21 V souvislosti s dělitelností přirozených čísel se hovoří o tzv. dokonalých číslech. Přirozené číslo nazýváme dokonalé, rovná-li se součtu svých dělitelů, které jsou od něho odlišné. Nejmenší dokonalé číslo je 6 (platí $1 + 2 + 3 = 6$). Pokuste se najít následující dokonalé číslo.

5.22 Co nejúspornějším způsobem rozhodněte, která z daných čísel jsou prvočísla:
a) 667 b) 677 c) 439 d) 1 591 e) 4 187

5.23 Upravte dané zlomky na základní tvar:
a) $\dfrac{91}{104}$ b) $\dfrac{1\,825}{3\,200}$ c) $\dfrac{696}{2\,088}$ d) $\dfrac{3\,600}{4\,062}$

5.24 Zapište prvočíselný rozklad daných čísel jako součin mocnin prvočísel, jejichž základy jsou uspořádány vzestupně:
a) 360 b) 4 410 c) 28 875 d) 8 580

5.25 V přehledu prvočísel menších než 100, který je uveden v učebnici, vyhledejte tzv. prvočíselná dvojčata, tj. prvočísla p, $p+2$. Vyslovte hypotézu o společném děliteli čísel, která leží mezi těmito dvojčaty.

5.26 Každé prvočíslo větší než 3 lze vyjádřit ve tvaru $6n-1$ nebo $6n+1$, kde n je přirozené číslo. Platí i obrácená věta?

5.27 Rozhodněte, zda kromě čísla 4 existují další čísla, která mají právě tři dělitele. Jak souvisejí s prvočísly?

5.4 Největší společný dělitel, nejmenší společný násobek

V nových souvislostech si připomeňme pojmy, které jste poznali už v základní škole a používali při řešení některých úloh.

Příklad 1

Obdélník, jehož strany mají délky 16 cm a 12 cm, rozdělte na co nejmenší počet shodných čtverců. Určete délku strany těchto čtverců a jejich počet.

Řešení

Délka strany čtverce musí být dělitelem délek obou stran obdélníku. Hledáme tedy číslo, které je společným dělitelem čísel 16 a 12. Protože čtverců má být co nejméně, musíme najít největšího společného dělitele čísel 16 a 12.

Při hledání největšího společného dělitele můžeme postupovat například tak, že najdeme všechny dělitele obou čísel, vyhledáme všechny společné dělitele a z nich vybereme největšího.

$$\mathsf{D}(16) = \{1, 2, 4, 8, 16\}, \quad \mathsf{D}(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

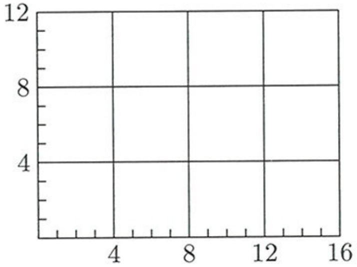
Společní dělitelé jsou čísla 1, 2, 4. Největší z nich je číslo 4.

Jiný postup při hledání největšího společného dělitele je založen na užití prvočíselných rozkladů:

$$\begin{aligned} 16 &= 2^4 \qquad & 16 &= 2^2 \cdot 2^2 \\ 12 &= 2^2 \cdot 3 \qquad & 12 &= 2^2 \cdot 3 \end{aligned}$$

Prvočíslo 3 nemůže být společným dělitelem čísel 16 a 12, protože není dělitelem čísla 16. Společným dělitelem může být jen mocnina prvočísla 2. Největším společným dělitelem čísel 16 a 12 je 2^2 (viz pravý sloupec), tj. číslo 4.

Strana hledaného čtverce má délku 4 cm (obr. 5.1).



Obr. 5.1

Pro **největšího společného dělitele** čísel a, b zavedeme symbol $D(a, b)$. Podobný způsob zápisu užíváme i pro více čísel, např. $D(a, b, c)$ apod.

Poznámka. Pozor, nezaměňujte označení pro množinu všech dělitelů čísla a, tj. $\mathsf{D}(a)$, a symbol pro největšího společného dělitele a, b, tj. $D(a, b)$. $\mathsf{D}(a)$ je množina, kdežto $D(a, b)$ je číslo.

Ukažme si, jak budeme postupovat při hledání společného dělitele více čísel.

Příklad 2

Najděte největšího společného dělitele čísel 36, 48, 60.

Řešení

1. způsob — užitím množin dělitelů

$$\mathsf{D}(36) = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$$
$$\mathsf{D}(48) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$$
$$\mathsf{D}(60) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$$

Najdeme společné dělitele, tj. $\mathsf{D}(36) \cap \mathsf{D}(48) \cap \mathsf{D}(60) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$. Největší společný dělitel je číslo 12.

2. způsob — užitím prvočíselných rozkladů.

$$\begin{array}{lll} 36 = 2^2 \cdot 3^2 & \qquad & 36 = 2^2 \cdot \phantom{2^2 \cdot{}} 3 \cdot 3 \\ 48 = 2^4 \cdot 3 & & 48 = 2^2 \cdot 2^2 \cdot 3 \\ 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 & & 60 = 2^2 \cdot \phantom{2^2 \cdot{}} 3 \cdot 5 \end{array}$$

Ve všech třech prvočíselných rozkladech daných čísel se vyskytují mocniny prvočísel 2 a 3. Nejvyšší mocnina prvočísla 2, která je společným dělitelem všech tří čísel, je 2^2. Nejvyšší mocnina prvočísla 3, která je společným dělitelem všech tří čísel, je 3. To znamená, že největší společný dělitel tří daných čísel je $2^2 \cdot 3 = 12$. Zapíšeme $D(36, 48, 60) = 12$.

Zobecněním úvahy o nalezení největšího společného dělitele užitím prvočíselných rozkladů dostaneme větu:

> **Největší společný dělitel** čísel a, b, c je součin mocnin těch prvočísel, která se vyskytují zároveň ve všech prvočíselných rozkladech čísel a, b, c; přitom exponent každého prvočísla je nejmenší exponent vyskytující se u tohoto prvočísla v rozkladech čísel a, b, c.

Řešení užitím množin dělitelů používáme zpravidla pro malá přirozená čísla. U větších čísel je výhodnější metoda s využitím prvočíselných rozkladů.

Jak budeme postupovat při hledání nejmenšího společného násobku? Zkusme postupovat obdobně jako při hledání největšího společného dělitele.

Pro **nejmenší společný násobek** čísel a, b, zavedeme symbol $n(a, b)$. Podobný způsob zápisu užíváme i pro více čísel, např. $n(a, b, c)$ apod. Množinu všech násobků čísla a zapíšeme symbolem $\mathsf{N}(a)$.

Příklad 3

Najděte nejmenšího společného jmenovatele zlomků $\frac{5}{36}$, $\frac{7}{120}$.

Řešení

Najít nejmenšího společného jmenovatele daných zlomků znamená najít nejmenší společný násobek čísel 36 a 120.

1. způsob — užitím množin násobků:

Množiny všech přirozených násobků čísel 36 a 120 nemůžeme zapsat výčtem prvků, protože jde o nekonečné množiny. Zcela nám postačí, když vypíšeme několik prvních prvků těchto množin:

$$\mathsf{N}(120) = \{120, 240, 360, 480, \dots\}$$
$$\mathsf{N}(36) = \{36, 72, 108, 144, 180, 216, 252, 288, 324, 360, \dots\}$$

Hledáme nejmenší číslo, které je prvkem obou množin, tj. je nejmenším prvkem jejich průniku. Takové číslo se v zápisech obou množin již vyskytuje a je to číslo 360.

2. způsob — užitím prvočíselných rozkladů:

$$36 = 2^2 \cdot 3^2$$
$$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$

Při hledání nejmenšího společného násobku užitím prvočíselných rozkladů si stačí uvědomit, že pro mocniny se stejným základem platí: Mocnina s vyšším exponentem je vždy násobkem mocniny s nižším exponentem (např. $2^3 = 2^2 \cdot 2$, $3^2 = 3 \cdot 3$ apod.). Jestliže v prvočíselném rozkladu čísla 36 se vyskytuje 2^2 a v prvočíselném rozkladu čísla 120 je 2^3, pak v prvočíselném rozkladu jejich nejmenšího společného násobku musí být 2^3. Jestliže v rozkladu čísla 36 je 3^2 a v rozkladu čísla 120 je 3, pak v rozkladu $n(36, 120)$ musí být 3^2. Jestliže v rozkladu čísla 36 není mocnina pěti a v rozkladu čísla 120 je 5, pak v rozkladu $n(36, 120)$ musí být 5. To znamená, že

$$n(36, 120) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360.$$

Nejmenší společný jmenovatel zlomků $\frac{5}{36}$ a $\frac{7}{120}$ je 360.

Příklad 4

Najděte nejmenší společný násobek čísel 6, 21, 28.

Řešení

1. způsob — užitím množin násobků:

$$\mathsf{N}(6) = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, 72, 78, 84, 90 \dots\}$$
$$\mathsf{N}(21) = \{21, 42, 63, 84, 105, \dots\}$$
$$\mathsf{N}(28) = \{28, 56, 84, \dots\}$$

Nejmenší společný násobek je nejmenší číslo, které je prvkem všech tří množin násobků. Je to číslo 84, tedy

$$n(6, 21, 28) = 84.$$

2. způsob — užitím prvočíselných rozkladů:

$$\begin{aligned} 6 &= 2 \cdot 3 & \qquad 6 &= 2 \cdot 3 \\ 21 &= 3 \cdot 7 & 21 &= \quad 3 \cdot 7 \\ 28 &= 2^2 \cdot 7 & 28 &= 2^2 \quad \cdot 7 \end{aligned}$$

V prvočíselných rozkladech se vyskytují mocniny prvočísel 2, 3, 7. Postupujeme obdobně jako v příkladu 3, tj. uvědomíme si, že mocnina s vyšším exponentem je vždy násobkem mocniny s nižším exponentem. Nejvyšší mocnina vyskytující se v prvočíselných rozkladech čísel 6, 21, 28 u prvočísla 2 je 2^2, u prvočísla 3 je 3 a u prvočísla 7 je 7. To znamená, že

$$n(6, 21, 28) = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 = 84.$$

Zobecněním úvahy o nalezení nejmenšího společného násobku užitím prvočíselných rozkladů dostaneme větu:

> **Nejmenší společný násobek** čísel a, b, c je součin mocnin všech prvočísel, která se vyskytují aspoň v jednom prvočíselném rozkladu čísel a, b, c; přitom exponent každého prvočísla je největší exponent vyskytující se u tohoto prvočísla v rozkladech čísel a, b, c.

Příklad 5

Určete největšího společného dělitele a nejmenší společný násobek čísel 756 a 1 680.

Řešení

$$\begin{aligned} 756 &= 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7 &&= 2^2 \cdot 3^3 \cdot 7 \\ 1\,680 &= 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 &&= 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \\ D(756, 1\,680) &= 2^2 \cdot 3 \cdot 7 = 84 \\ n(756, 1\,680) &= 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 = 15\,120 \end{aligned}$$

Součin $756 \cdot 1\,680 = 1\,270\,080$.
Součin $D(756, 1\,680) \cdot n(756, 1\,680) = 84 \cdot 15\,120 = 1\,270\,080$.

V obou případech nám vyšel stejný výsledek. Je to náhoda, nebo pro všechna přirozená čísla a, b platí

$$a \cdot b = D(a, b) \cdot n(a, b)?$$

Všimněme si v příkladu 5 pozorně prvočíselných rozkladů daných čísel, $D(756, 1\,680)$ a $n(756, 1\,680)$.

Vyskytuje-li se mocnina prvočísla v obou prvočíselných rozkladech daných čísel, uplatníme vždy menší mocninu každého prvočísla v největším společném děliteli a větší mocninu každého prvočísla v nejmenším společném násobku. Pokud se v obou prvočíselných rozkladech vyskytuje stejná mocnina prvočísla, zapíšeme ji v největším společném děliteli i v nejmenším společném násobku. Vyskytuje-li se mocnina prvočísla jen v prvočíselném rozkladu jednoho čísla, uplatníme ji v nejmenším společném násobku. To platí pro libovolná dvě přirozená čísla. To znamená, že součin $D(a, b) \cdot n(a, b)$ je tvořen právě všemi mocninami prvočísel z rozkladu čísel a, b. Proto pro všechna $a, b \in \mathsf{N}$ platí $ab = D(a, b) \cdot n(a, b)$.

Pozor, pro tři a více čísel obdobná věta neplatí! Promyslete.

Úlohy

5.28 Určete největšího společného dělitele čísel:
a) 60 a 84 b) 720 a 1 080 c) 756 a 1 260
d) 30, 42, 66 e) 63, 108, 117 f) 162, 243, 405

5.29 Najděte nejmenší společný násobek čísel:
a) 24 a 40 b) 27 a 56 c) 54 a 126

d) 12, 18, 30 e) 8, 22, 26 f) 36, 126, 198

5.30 Vyjádřete dané zlomky v základním tvaru:
a) $\frac{216}{468}$ b) $\frac{135}{495}$ c) $\frac{576}{2\,016}$
d) $\frac{5\,544}{8\,568}$ e) $\frac{10\,296}{15\,048}$ f) $\frac{7\,938}{26\,082}$

5.31 Vypočítejte:
a) $\frac{3}{10} + \frac{7}{16} - \frac{13}{24}$ b) $\frac{5}{6} + \frac{7}{15} + \frac{8}{25}$
c) $\frac{9}{14} - \frac{11}{30} - \frac{12}{35}$ d) $\frac{7}{27} + \frac{1}{35} - \frac{5}{21}$

5.32 Najděte nejmenšího společného jmenovatele zlomků:
a) $\frac{1}{12}$ a $\frac{3}{32}$ b) $\frac{7}{120}$ a $\frac{5}{144}$
c) $\frac{2}{31}, \frac{7}{8}, \frac{9}{32}$ d) $\frac{5}{28}, \frac{8}{65}, \frac{13}{132}$

5.33 V krabici tvaru kvádru jsou ve čtyřech vrstvách uloženy čtyři druhy krychlí. V první vrstvě jsou krychle s hranou délky 12 cm. V každé následující vrstvě je délka hrany krychle o 2 cm menší než délka hrany krychle v předcházející vrstvě. Za předpokladu, že mezi stěnami krabice a krychlemi i mezi krychlemi navzájem nejsou žádné mezery, vypočítejte
a) jaké jsou nejmenší možné vnitřní rozměry krabice,
b) kolik krychlí jednotlivých druhů je v této nejmenší možné krabici.

5.34 Určete nejmenší možný počet cvičenců, o nichž víte, že nastoupí-li do dvojstupu, trojstupu, čtyřstupu, pětistupu, šestistupu, bude vždy jeden cvičenec chybět do úplného (obdélníkového) tvaru.

5.35 Na fotbalový zápas přišlo přibližně 10 000 diváků. Určete přesný počet diváků, víte-li, že o něm jeden mladý matematik prohlásil: Když vydělím počet diváků deseti, dostanu zbytek 9, při dělení devíti dostanu zbytek 8 atd., až při dělení dvěma dostanu zbytek 1.

6. MOCNINY S PŘIROZENÝM A CELÝM MOCNITELEM

6.1 Mocniny s přirozeným mocnitelem

V matematice se snažíme o co nejstručnější zápisy. Součet $7 + 7 + + 7 + 7 + 7$ stručně zapíšeme jako součin $5 \cdot 7$. Podobně součin $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$ stručně zapíšeme jako mocninu 7^5. S pojmem mocnina se setkáváme už u starověkých Řeků. Trvalo však velmi dlouho, než nauka o mocninách dosáhla své dnešní podoby. Například v současné době používaný zápis mocnin zavedl teprve francouzský matematik a filozof René Descartes [čti dekart] ve svém díle Géométrie, které vyšlo v roce 1637.

Připomeňme si definici a pravidla pro počítání s mocninami.

> Pro každé reálné číslo a a každé přirozené číslo n je
> $$a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a,$$
> kde v součinu na pravé straně je n činitelů.

Výraz a^n se nazývá **mocnina**, a je **základ mocniny (mocněnec)** n je **mocnitel (exponent)**.

Z definice vyplývá, že

a) **pro každé reálné číslo a platí $a^1 = a$,**

b) **pro každé přirozené číslo n platí $1^n = 1$ a $0^n = 0$.**

Zkoumáme-li, kdy je mocnina s přirozeným mocnitelem kladné a kdy záporné číslo, můžeme opět přímo z definice odvodit, že je-li a kladné reálné číslo, pak mocnina je vždy kladná. Je-li a záporné reálné číslo, pak záleží na tom, zda mocnitel je sudé, nebo liché číslo. Je-li mocnitel sudé číslo, pak mocnina je součin sudého počtu činitelů, tedy sudého počtu záporných čísel, a mocnina je proto kladné číslo. Je-li mocnitel liché číslo, jedná se o součin lichého počtu záporných čísel a mocnina je v tomto případě záporné číslo. Závěr naší úvahy zapíšeme stručně:

Pro každé $a \in \mathrm{R}$ a pro každé $n \in \mathrm{N}$ platí:

a) je-li $a > 0$, pak $a^n > 0$,

b) je-li $a < 0$, pak $a^{2n} > 0$,

c) je-li $a < 0$, pak $a^{2n-1} < 0$.

Příklad 1

Vypočítejte:

a) 10^1 b) $(-2)^3$ c) $\left(\frac{1}{2}\right)^4$

d) 0^5 e) 1^{10} f) $(-1)^{47}$

Řešení

a) $10^1 = 10$ b) $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$ d) $0^5 = 0$

e) $1^{10} = 1$ f) $(-1)^{47} = -1$ (mocnitel je liché číslo)

V matematice, přírodních a technických vědách často pracujeme s velkými čísly, která zpravidla zapisujeme pomocí mocnin se základem 10, tj. ve tvaru $a \cdot 10^n$, kde $1 \leqq a < 10$, $n \in \mathrm{N}$. Exponent n čísla zapsaného ve tvaru $a \cdot 10^n$ určíme tak, že zjistíme řád první platné číslice zapisovaného čísla.

Příklad 2

Zapište ve tvaru $a \cdot 10^n$, kde $1 \leqq a < 10$, $n \in \mathrm{N}$, následující číselné údaje:

a) Délka nejdelšího horského systému Kordillery je 15 000 km.

b) Rozloha největšího jezera Kaspického moře je 371 000 km^2.

c) Rozloha největší pouště Sahary je 7 750 000 km^2.

Řešení

a) $15\,000 = 1{,}5 \cdot 10^4$

b) $371\,000 = 3{,}71 \cdot 10^5$

c) $7\,750\,000 = 7{,}75 \cdot 10^6$

Při zaokrouhlování čísel zapsaných ve tvaru $a \cdot 10^n$ se jako platné číslice počítají jen číslice, které tvoří číslo a. Např. čísla $1{,}5 \cdot 10^4$; $30 \cdot 10^6$; $0{,}25 \cdot 10^3$ mají po dvou platných číslicích. Zapíšeme-li je ve tvaru $a \cdot 10^n$, kde $1 \leqq a < 10$, $n \in \mathsf{N}$, dostaneme $1{,}5 \cdot 10^4$; $3{,}0 \cdot 10^7$; $2{,}5 \cdot 10^2$.

Z definice mocniny s přirozeným mocnitelem můžeme odvodit věty pro počítání s mocninami. Např. větu o násobení mocnin se stejným základem, která zní:

Pro každé reálné číslo a a pro každá přirozená čísla r, s platí

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}.$$

Na základní škole jste větu odvodili tak, že jste na základě několika konkrétních příkladů na násobení mocnin provedli zobecnění. Ukažme si důkaz této věty, který vyplývá z definice mocniny a je velmi jednoduchý.

$$a^r \cdot a^s = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{r \text{ činitelů}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{s \text{ činitelů}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{r+s \text{ činitelů}} = a^{r+s}$$

Důkazy dalších vět nebudeme uvádět, přehledně si však zapíšeme všechny věty pro počítání s mocninami s přirozeným mocnitelem.

Pro každá dvě reálná čísla a, b a pro každá přirozená čísla r, s platí:

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$
$$(a^r)^s = a^{rs}$$
$$a^r : a^s = a^{r-s}, \quad a \neq 0, r > s$$
$$(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}, \quad b \neq 0$$

Slovně:

Mocniny se stejným základem násobíme tak, že základ umocníme součtem mocnitelů.

Mocninu umocníme tak, že základ mocniny umocníme součinem mocnitelů.

Jestliže je mocnitel dělence větší než mocnitel dělitele, dělíme mocniny se stejným základem tak, že základ umocníme rozdílem mocnitelů.

Součin umocníme tak, že umocníme každého činitele.

Zlomek umocníme tak, že umocníme čitatele i jmenovatele zlomku.

Úlohy

6.1 Vypočítejte zpaměti:

a) 300^1 b) 0^7 c) 2^5 d) $\left(\frac{1}{2}\right)^5$

e) $(-2)^5$ f) 1^{12} g) $(-1)^{35}$ h) $\left(\frac{2}{3}\right)^4$

6.2 Rozhodněte, zda platí:

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{30} > 0$ b) $(-5)^{15} > 0$ c) $\left(-\frac{1}{5}\right)^{22} > 0$

d) $0^{13} > 0$ e) $(-3+9)^{11} < 0$ f) $(-3)^7 \cdot (-3)^8 < 0$

6.3 Uvedené údaje vyjádřete v jednotkách uvedených v závorce a zapište je ve tvaru $a \cdot 10^n$, kde $1 \leqq a < 10$, $n \in \mathsf{N}$.

a) 6 378 km (m) b) 250 hl (l)

c) 650 MW (W) d) 27 m^3 (l)

6.4 Zaokrouhlete na dvě platné číslice a vyjádřete ve tvaru $a \cdot 10^n$, kde $1 \leqq a < 10$, $n \in \mathsf{N}$:

a) 16 372 000 b) 455 328 c) 71 602 d) 2 013

6.5 Vypočítejte:

a) $\dfrac{2^5 \cdot 2^7}{2^{10}}$ b) $\dfrac{(-3)^3 \cdot (-3)^6}{(-3)^5 \cdot 3^2}$ c) $\dfrac{(2^3 \cdot 3^2)^3}{(2 \cdot 3)^5}$

d) $\left(\dfrac{2^2}{5}\right)^5 \cdot \left(-\dfrac{5^2}{2^3}\right)^3$ e) $\dfrac{|-2|^5 \cdot |(-5)^5|}{[(-2) \cdot (-5)]^3}$ f) $\dfrac{(2^2 - |-5|)^{20}}{(-2)^3 \cdot (-5)^2}$

6.6 Dané výrazy vyjádřete jako mocniny se základem 2 nebo 3 a bez použití kalkulačky vypočítejte:

a) $\dfrac{(2^{10} \cdot 3)^2}{2 \cdot 3^{13}} \cdot \left(\dfrac{81}{64}\right)^3$ b) $\dfrac{9^5 \cdot 2^7}{27^2 \cdot 96} \cdot \dfrac{36}{6^3}$

c) $\left(\frac{128 \cdot 3^5}{81 \cdot 8}\right)^3 : \frac{(16 \cdot 3^5)^2}{9^4}$ d) $\frac{8^4 \cdot 9^5}{72^3} : \frac{2 \cdot 3^6}{27}$

6.7 Vypočítejte:

a) $\frac{2(ab)^3}{3a^2b} \cdot \frac{(3a^3b^2)^2}{a^5b^3}$ b) $\frac{5a^3b^7}{2ab^6} \cdot \left(\frac{2a^2b^3}{ab^2}\right)^3$

c) $\frac{2x^5y^3}{(2x^2y)^2} : \left(\frac{xy}{2xy^2}\right)^3$ d) $\frac{7x^4y^7}{8x^3y} : \frac{(x^2y)^4}{(2x^3y^2)^3}$

6.2 Mocniny s celým mocnitelem

V předcházejícím článku jsme si zopakovali definici mocniny a pravidla pro počítání s mocninami, jejichž základy byla libovolná reálná čísla, ale mocniteli byla jen čísla přirozená. Nyní pojem mocnina rozšíříme tak, aby mocnitelem mohlo být libovolné celé číslo.

Ve všech větách pro počítání s mocninami s přirozeným mocnitelem mohou být mocnitelé libovolná přirozená čísla. Pouze ve větě o dělení mocnin se stejným základem platí pro mocnitele r, s podmínka $r > s$. Zkoumejme, co se při dělení mocnin stane v případě, kdy $r = s$.

Pro libovolné nenulové reálné číslo a a pro libovolné přirozené číslo r platí

$$\frac{a^r}{a^r} = 1.$$

Budeme-li pro každé nenulové reálné číslo a definovat $a^0 = 1$, můžeme uvedenou rovnost zapsat

$$\frac{a^r}{a^r} = a^0,$$

a protože platí $0 = r - r$, můžeme psát

$$\frac{a^r}{a^r} = a^{r-r}.$$

To však znamená, rovnost

$$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

platí i pro $r = s$.

Z uvedené úvahy vyplývá, že je účelné rozšířit definici mocniny i pro mocnitel nula a nultou mocninu reálného čísla $a \neq 0$ definovat takto:

Pro každé reálné číslo $a \neq 0$ platí $a^0 = 1$.

Poznámka. Věta o dělení mocnin se stejným základem platí pro $a \neq 0$, výraz 0^0 není definován.

Pokračujme dál a prozkoumejme platnost věty o dělení mocnin se stejným základem pro případ $r < s$.

Pro libovolné nenulové reálné číslo a a pro libovolná přirozená čísla r, s, kde $r < s$, platí

$$\frac{a^r}{a^s} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{r \text{ činitelů}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{s \text{ činitelů}}} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{r \text{ činitelů}}}{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{r \text{ činitelů}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{s-r \text{ činitelů}}} = \frac{1}{\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{s-r \text{ činitelů}}} =$$

$= \frac{1}{a^{s-r}}$, kde $s - r$ je přirozené číslo.

Pro každé nenulové reálné číslo a a pro každé přirozené číslo m definujeme

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}.$$

Pak můžeme psát

$\frac{a^r}{a^s} = \frac{1}{a^{s-r}} = a^{-(s-r)} = a^{r-s}$, kde $r - s$ je celé záporné číslo.

To ovšem znamená, že vztah

$$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s} \quad \text{platí i pro} \quad r < s.$$

Je tedy účelné rozšířit definici mocniny i pro záporný mocnitel takto:

Pro každé reálné číslo $a \neq 0$ a pro každé celé číslo m platí:

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}.$$

Rovnost uvedenou v této definici můžeme zapsat také ve tvaru $a^{-m} = \left(\frac{1}{a}\right)^m$.

Při odstraňování záporného mocnitele postupujeme tedy tak, že základ mocniny nahradíme převráceným číslem a mocnitele nahradíme číslem opačným.

Příklad 1

Vypočítejte:

a) 10^{-2} b) $(0{,}002)^{-3}$ c) $(\sqrt{2})^{-4}$

Řešení

a) $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} = 0{,}01$

b) $(0{,}002)^{-3} = \left(\frac{2}{1\,000}\right)^{-3} = \left(\frac{1\,000}{2}\right)^3 = 500^3 = 125\,000\,000$

c) $(\sqrt{2})^{-4} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 = \frac{1^4}{(\sqrt{2})^4} = \frac{1}{4} = 0{,}25$

Uvedený příklad naznačuje, že výpočty s mocninami s celým exponentem provádíme stejně, ať jsou základy mocnin čísla přirozená, racionální, či iracionální.

Z příkladu 1b) je patrné, že mocniny se zápornými mocniteli nemusí být „malá“ čísla x, pro něž platí $-1 \leqq x \leqq 1$. Rovněž mocnina s kladným mocnitelem může být menší než základ.

Zapíšeme si přehledně všechny věty pro počítání s mocninami s celým mocnitelem.

Pro každá dvě reálná čísla a, b a pro libovolná celá čísla r, s platí:

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$
$$(a^r)^s = a^{rs}$$
$$a^r : a^s = a^{r-s},\ a \neq 0$$
$$(a \cdot b)^r = a^r b^r$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r},\ b \neq 0$$

Poznámka. V uvedených větách nepřipouštíme případy, kdy základ mocniny a zároveň mocnitel je roven nule (výraz 0^0 není definován).

Porovnáme-li tyto věty s větami pro počítání s mocninami s přirozeným mocnitelem, vidíme zjevnou analogii; pouze se zde zjednodušil předpoklad věty o dělení mocnin se stejným základem.

Příklad 2

Za předpokladu, že a, b, c jsou nenulová reálná čísla, vypočítejte:

a) $(3a^7b^{-2}c^{-3}) \cdot (4a^{-6}b^2c^{-1})$ b) $\left(\frac{1}{2}a^{-2}b^3c\right)^{-3} : (4a^4b^{-8}c^{-3})$

c) $\left(\frac{ab^{-3}}{c^4}\right)^{-2}$ d) $\frac{9a^6b^{-5}}{c^{-3}} : \left(\frac{3^{-1}b^3}{a^2c^{-4}}\right)^{-2}$

Řešení

a) $(3a^7b^{-2}c^{-3}) \cdot (4a^{-6}b^2c^{-1}) = 12ab^0c^{-4} = \frac{12a}{c^4}$

b) $\left(\frac{1}{2}a^{-2}b^3c\right)^{-3} : (4a^4b^{-8}c^{-3}) = (8a^6b^{-9}c^{-3}) : (4a^4b^{-8}c^{-3}) =$
$= 2a^2b^{-1}c^0 = \frac{2a^2}{b}$

c) $\left(\frac{ab^{-3}}{c^4}\right)^{-2} = \left(\frac{c^4}{ab^{-3}}\right)^2 = \frac{c^8}{a^2b^{-6}} = \frac{b^6c^8}{a^2}$

Jiný postup: $\left(\dfrac{ab^{-3}}{c^4}\right)^{-2} = \dfrac{a^{-2}b^6}{c^{-8}} = \dfrac{b^6c^8}{a^2}$

d) $\dfrac{9a^6b^{-5}}{c^{-3}} : \left(\dfrac{3^{-1}b^3}{a^2c^{-4}}\right)^{-2} = \dfrac{9a^6b^{-5}}{c^{-3}} \cdot \left(\dfrac{3^{-1}b^3}{a^2c^{-4}}\right)^2 = \dfrac{3^2a^6b^{-5}}{c^{-3}} \cdot \dfrac{3^{-2}b^6}{a^4c^{-8}} =$

$= \dfrac{3^0a^2b}{c^{-11}} = a^2bc^{11}$

Zavedení mocnin s celým exponentem umožňuje též jednodušší a přehlednější zápisy některých čísel ve tvaru $a \cdot 10^n$, kde $1 \leqq a < 10$, $n \in \mathsf{Z}$. Uvedený způsob zápisu rovněž usnadní numerické výpočty s těmito čísly.

Příklad 3

Vypočítejte:

a) $\dfrac{0{,}000\,032}{10\,000} \cdot \dfrac{500\,000}{0{,}000\,08}$ b) $\dfrac{0{,}001}{6\,000\,000} : \dfrac{0{,}7}{1\,050\,000}$

Řešení

a) $\dfrac{0{,}000\,032}{10\,000} \cdot \dfrac{500\,000}{0{,}000\,08} = \dfrac{3{,}2 \cdot 10^{-5}}{1 \cdot 10^4} \cdot \dfrac{5 \cdot 10^5}{8 \cdot 10^{-5}} = \dfrac{16 \cdot 10^0}{8 \cdot 10^{-1}} = 2 \cdot 10 = 20$

b) $\dfrac{0{,}001}{6\,000\,000} : \dfrac{0{,}7}{1\,050\,000} = \dfrac{1 \cdot 10^{-3}}{6 \cdot 10^6} \cdot \dfrac{1{,}05 \cdot 10^6}{7 \cdot 10^{-1}} = \dfrac{1{,}05 \cdot 10^3}{42 \cdot 10^5} =$

$= 0{,}025 \cdot 10^{-2} = 2{,}5 \cdot 10^{-4}$

Úlohy

6.8 Vypočítejte zpaměti:

a) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-2}$; $\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{-2}$; $\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{-3}$; $\left(\dfrac{6}{5}\right)^{-2}$; $\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{-3}$

b) $(-2)^{-5}$; -2^{-5}; $(0{,}75)^{-1}$; $(-0{,}5)^{-3}$; $-0{,}5^{-3}$

c) $\left(\sqrt{3}\right)^{-2}$; $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-3}$; $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-2}$; $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-3}$; $\left(\sqrt{5}\right)^0$

6.9 Vypočítejte:

a) $2^{-3} - 4^{-2} - 5^{-2} + 20^{-2}$

b) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3} - \left(\dfrac{1}{4}\right)^{-2} - \left(\dfrac{1}{5}\right)^{-2} + \left(\dfrac{1}{20}\right)^{-2}$

c) $(-2)^{-3} + (-0{,}2)^{-4} - 2^{-3} - 0{,}2^{-4}$

d) $\left(\sqrt{3}\right)^{-2} - \left(-\sqrt{3}\right)^{-2} - \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 - \left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^3$

6.10 Vyjádřete v co nejjednodušším tvaru:

a) $\left(\sqrt{5} - 2\right)^{-1}$ b) $\left(2 - \sqrt{6}\right)^{-2}$

c) $\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)^{-2}$ d) $40\left(5 - \sqrt{5}\right)^{-2}$

6.11 Daná čísla zapište ve tvaru $a \cdot 10^n$, kde $1 \leqq a < 10$, $n \in \mathsf{Z}$:

a) 13 200; 6 400 000; 58,2; 125

b) 0,25; 0,000 345; 0,7; 0,002 36

6.12 Daná čísla zapište ve tvaru $a \cdot 10^n$, kde $1 \leqq a < 10$, $n \in \mathsf{Z}$, a pak vypočítejte:

a) $800\,000 \cdot 0{,}025$ b) $\dfrac{105\,000}{0{,}021}$

c) $\dfrac{0{,}252}{70\,000} \cdot \dfrac{200}{0{,}9}$ d) $\dfrac{0{,}000\,575}{2\,300\,000} : \dfrac{0{,}005}{100\,000}$

6.13 Zjednodušte následující výrazy za předpokladu, že a, b, c, d jsou nenulová reálná čísla, a výsledek zapište pomocí mocnin s přirozeným mocnitelem:

a) $(7a^6b^{-3}c^{-2}d) \cdot (8a^{-3}b^{-5}c^3d^{-1})$

b) $(91a^5b^{-7}c^{-1}d) : (7a^3b^{-8}c^{-1}d^2)$

c) $\dfrac{5a^{-2}bc^3d^{-4}}{3a^{-3}b^3c^5d^{-7}} \cdot \dfrac{21a^5b^{-2}cd^2}{105a^5b^{-4}c^2d^3}$

d) $\dfrac{7a^3b^{-2}c}{8a^2d^3} : \dfrac{28a^{-3}b^4d^{-5}}{64ab^6c^{-2}}$

e) $\left(\dfrac{4a^2b}{c^{-3}d^2}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{2a^5b^{-2}}{c^{-4}d^3}\right)^{-2}$

7. MNOHOČLENY

7.1 Výrazy

S výrazy jste se v matematice setkali již mnohokrát; jsou to např. tyto zápisy:

$$\frac{a+b}{2(a-b)^2}, \quad x^2(x-\sqrt{5}), \quad |x-y|+\sqrt{x+y}, \quad (k+l)^2, \quad \frac{1}{3}\pi r^2 v$$

Vyskytují se v nich jednak určitá čísla, kterým říkáme **konstanty**, jednak písmena, která označují **proměnné**; proměnné zastupují čísla z určité množiny, která se nazývá **obor proměnné**. Tak třeba ve výrazu $\frac{1}{3}\pi r^2 v$, který udává objem rotačního kužele o výšce v a poloměru podstavy r, jsou konstantami čísla $\frac{1}{3}$, π a proměnnými písmena r, v; konstantu π si jistě nebudete plést s proměnnou, i když je zapsána písmenem; jako číslo ji totiž ani zapsat nemůžeme, protože její desetinný rozvoj je nekonečný a neperiodický (zápisy tohoto iracionálního čísla ve tvaru 3,14, resp. $\frac{22}{7}$ jsou pouze přibližné).

Ve výrazu $\frac{1}{3}\pi r^2 v$ pro objem kužele je oborem každé z obou proměnných r, v množina všech kladných reálných čísel, neboť výška ani poloměr nemohou nabývat hodnoty nulové ani hodnot záporných. Bereme-li však tento výraz jako takový, tj. bez toho, že jde o objem kužele, můžeme za obor každé z obou proměnných vzít množinu všech reálných čísel. Obyčejně tak postupujeme vždycky: nejsou-li obory jednotlivých proměnných uvedeny nebo nejsou-li zřejmé z významu daného výrazu, považujeme za obor každé proměnné množinu všech čísel, která lze do výrazu dosadit, aniž ztratí smysl některé z operací v tomto výrazu — nedojde např. k dělení nulou, k odmocňování záporného čísla apod. Tyto číselné množiny, z nichž je možno za proměnné dosazovat, určují **definiční obor** daného výrazu; říkáme též, že pro tyto hodnoty proměnných daný **výraz má smysl**. Dosadíme-li do výrazu za všechny proměnné libovolná čísla, pro něž má tento výraz smysl, a provedeme-li operace tímto výrazem předepsané, dostaneme jako výsledek číslo, kterému se říká **hodnota výrazu** (pro zvolené hodnoty proměnných).

Příklad 1

Zjistěte, pro které hodnoty jednotlivých proměnných má každý z následujících výrazů smysl, a určete jeho hodnotu pro dané hodnoty proměnných:

a) $\dfrac{x}{3-x}$, $x=2$ b) $\dfrac{\sqrt{y-3}}{x^2-4}$, $x=1$, $y=4$

c) $\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{y+1}(|z-2|-1)}$, $x=0$, $y=0$, $z=0$

Řešení

a) Výraz má smysl pro všechna $x \in \mathsf{R}$, pro něž je $3-x \neq 0$, tj. pro všechna $x \in \mathsf{R}$, $x \neq 3$. Jeho hodnota pro $x=2$ je $\dfrac{2}{3-2}=2$.

b) Aby měl daný výraz smysl, musí platit $y-3 \geqq 0$ tj. $y \geqq 3$ a zároveň $x \neq 2$ a $x \neq -2$. Hodnota daného výrazu pro $x=1$, $y=4$ je $\dfrac{\sqrt{4-3}}{1^2-4}=-\dfrac{1}{3}$.

c) Aby měl daný výraz smysl, musí zároveň platit:

$$x^2+4 \geqq 0, \quad y+1>0, \quad |z-2|-1 \neq 0;$$

první z těchto podmínek je splněna pro každé $x \in \mathsf{R}$, druhá pro všechna $y \in \mathsf{R}$, $y > -1$ a třetí pro všechna $z \in \mathsf{R}$, pro něž je $|z-2| \neq 1$, tj. pro $z \neq 3$ a $z \neq 1$. Hodnota daného výrazu pro $x=y=z=0$ je $\dfrac{\sqrt{4}}{\sqrt{1}(|-2|-1)}=\dfrac{2}{2-1}=2$.

Na výrazy se můžeme také dívat jako na zápisy, které udávají, jaké operace s čísly, jež jsou vyjádřena pomocí proměnných, máme provést. Tak např. výraz $\dfrac{a+b}{2(a-b)^2}$ z úvodu tohoto článku můžeme chápat jako podíl součtu dvou reálných čísel a dvojnásobku druhé mocniny jejich rozdílu; na výraz $|x-y|+\sqrt{x+y}$ můžeme pohlížet jako na součet absolutní hodnoty rozdílu dvou reálných čísel a druhé odmocniny jejich součtu. Je zřejmé, že zápisy pomocí proměnných jsou jednodušší a přehlednější než slovní popisy. Proto také zavedení pojmu proměnná, ke kterému došlo v matematice v 16. a 17. století, znamenalo velký pokrok.

Příklad 2

Pomocí zvolených proměnných zapište výraz, který představuje:

a) součet trojnásobku druhé mocniny jednoho a poloviny druhé odmocniny druhého čísla;
b) rozdíl druhé mocniny trojnásobku jednoho a druhé odmocniny poloviny druhého čísla;
c) druhou mocninu součinu trojnásobku jednoho a poloviny druhé odmocniny druhého čísla;
d) podíl absolutní hodnoty trojnásobku jednoho a poloviny druhé odmocniny absolutní hodnoty druhého čísla.

Řešení

Označíme-li ve všech případech jedno číslo proměnnou x a druhé proměnnou y, dostaneme tyto výrazy:

a) $3x^2 + \frac{1}{2}\sqrt{y}$ b) $(3x)^2 - \sqrt{\frac{y}{2}}$

c) $\left(3x \cdot \frac{1}{2}\sqrt{y}\right)^2$ d) $\frac{|3x|}{\frac{1}{2}\sqrt{|y|}}$

Výrazy se rovněž uplatňují při řešení slovních úloh; v následujícím příkladu odvodíme jistý výraz, který můžete použít k řešení slovní úlohy 7.2.

Příklad 3

Mezi p osob se má stejným dílem rozdělit k Kč. Napište výraz, který udává, o kolik se zmenší částka pro každou osobu, vzroste-li počet osob o r a částka k se zároveň zmenší o 10 %.

Řešení

Postupně určíme jednotlivé dílčí výrazy, až dospějeme k výrazu, který je požadován (všechny částky jsou při tom uvažovány v korunách):

částka připadající původně na jednu osobu .... $\frac{k}{p}$

původní celková částka zmenšená o 10 % .... $k - \frac{10}{100}k = 0{,}9k$

částka připadající na jednu osobu po zvětšení počtu osob o r a snížení celkové částky o 10 % .... $\frac{0{,}9k}{p+r}$

zmenšení původní částky připadající na jednu osobu ..... $\frac{k}{p} - \frac{0{,}9k}{p+r}$

Máme tedy výsledek: původní částka připadající na každou osobu se po zvětšení počtu osob o r a snížení původní částky o 10 % zmenší o $\frac{k}{p} - \frac{0{,}9k}{p+r}$; tento výraz lze upravit na tvar $\frac{k(0{,}1p+r)}{p(p+r)}$.

S výrazy se dále setkáváme v různých vzorcích v algebře, geometrii, ve fyzice atd. Připomeňme si třeba vzorec pro objem V komolého jehlanu o výšce v a s obsahy S_1, S_2 dolní a horní podstavy:

$$V = \frac{1}{3}v\left(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2\right)$$

Porovnejte tento jednoduchý zápis se slovním popisem v úloze 7.1., kde se navíc jedná o speciální případ (obě podstavy jsou čtvercové).

Poznámka. Výrazy, jejichž každá proměnná má za svůj obor číselnou množinu, se nazývají **algebraické výrazy**; takové byly všechny výrazy v tomto článku. Příkladem výrazu, který není algebraický, je výraz $(\mathsf{A} \cup \mathsf{B}) \cap \mathsf{C}$, kde písmena A, B, C znamenají množiny. Obvykle poznáme ze souvislosti, kdy nějaký výraz je, či není algebraický; proto přívlastek algebraický vynecháváme.

Úlohy

7.1 Zapište pomocí vhodně zvolených proměnných slovní popis výpočtu objemu komolého jehlanu se čtvercovými podstavami, který pochází ze starověkého textu: „Objem useknuté pyramidy“ — tj. objem zmíněného komolého jehlanu — „vypočítáš tak, že změříš stranu dolního čtverce, stranu horního čtverce a svislou vzdálenost obou čtverců. První dvě čísla vynásob navzájem a ještě každé s ním samotným, ty tři výsledky sečti a co vyjde, vynásob třetinou třetího čísla, které jsi změřil."

7.2 Mezi 10 osob se měl stejným dílem rozdělit jistý obnos (v Kč); protože však počet osob vzrostl o jednu a zároveň byl původní obnos snížen o 10 %, dostal každý o 100 Kč méně. Určete původní částku.

7.3 Zjistěte, kdy má každý z následujících výrazů smysl, a určete jeho hodnotu pro dané hodnoty proměnných:

a) $\dfrac{\sqrt{x-1}}{(y-1)(y+2)}$, $x=2$, $y=2$ b) $1+\dfrac{x}{\sqrt{x}}$, $x=1$

c) $\dfrac{\sqrt{1-x}}{x(x^2+3)}$, $x=-3$ d) $\sqrt{\dfrac{x-2}{|x-2|}}+\sqrt{x}$, $x=3$

7.4 Určete součet tří po sobě jdoucích přirozených čísel, jestliže

a) nejmenší je rovno $5k$;

b) největší je rovno $3m-2$.

7.5 Pomocí zvolených proměnných zapište:

a) druhou odmocninu ze součtu druhých odmocnin dvou reálných čísel;

b) druhou odmocninu podílu součtu druhých odmocnin dvou reálných čísel a druhé odmocniny součtu těchto čísel;

c) součet podílu druhých odmocnin dvou reálných čísel a druhé odmocniny podílu těchto čísel.

7.6 Na stavbu domu je zapotřebí n cihel, každá má hmotnost m kilogramů. Napište výraz, který udává počet jízd potřebných k odvozu těchto cihel autem, které najednou odveze 3 000 kg cihel.

7.2 Sčítání, násobení a dělení mnohočlenů

Zvláštním případem výrazů jsou mnohočleny. Podle toho, kolik proměnných obsahují, rozlišujeme mnohočleny s jednou či více proměnnými. Příkladem mnohočlenů s dvěma proměnnými jsou mnohočleny

$$2x^3y-5xy^2+y-1,\quad x^2-3y^2+\sqrt{3},\quad x^3+x^2y+xy^2+y^3;$$

příkladem mnohočlenů s třemi proměnnými jsou mnohočleny

$$x^7-y+r^5,\quad xyr-5,\quad xy+yr+xr.$$

Převážně se budeme zabývat mnohočleny s jednou proměnnou, kterou budeme obyčejně značit x; někdy však zvolíme i jiné písmeno, ať už proto, že na označení proměnné nezáleží, nebo prostě proto, že — jak praví latinské přísloví — variatio delectat (změna těší).

Mnohočlen (polynom) s jednou proměnnou je výraz, který lze napsat ve tvaru

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0,$$

kde $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ jsou reálná čísla, n celé nezáporné číslo a x proměnná; je-li $a_n \neq 0$, tj. když koeficient u proměnné s největším exponentem je nenulový, jde o **mnohočlen n-tého stupně**. Čísla a_0, a_1, a_2, …, a_n se nazývají **koeficienty mnohočlenu**, jeho jednotliví sčítanci, tj. výrazy a_kx^k, kde $0 \leqq k \leqq n$, se nazývají **členy mnohočlenu**. Koeficient a_0 se nazývá **absolutní člen**, člen a_1x **lineární člen** a člen a_2x^2 se nazývá **kvadratický člen** mnohočlenu. Podle počtu členů mnohočlenu mluvíme o jednočlenu, dvojčlenu, trojčlenu atd. **Mnohočlen 1. stupně** (zapisuje se obvykle $ax+b$ místo a_1x+a_0) se nazývá **lineární**, **mnohočlen 2. stupně** (zapisuje se obyčejně ve tvaru ax^2+bx+c) se nazývá **kvadratický**, **mnohočlen 3. stupně** se nazývá **kubický**.

V následujícím příkladu si zopakujeme, jak se mnohočleny sčítají, odčítají a násobí. Připomeňme si však nejprve pojem opačného mnohočlenu: **opačný mnohočlen** k danému mnohočlenu je mnohočlen, který má tytéž členy, ale s opačnými znaménky; např. dvojčlen $x-2$ je opačný k dvojčlenu $-x+2$, trojčlen $-3x^2+2x-1$ je opačný k trojčlenu $3x^2-2x+1$ apod.

Příklad 1

Určete součet, rozdíl a součin mnohočlenů
$5x^2y-2xy+3x+1$, $xy^2+6xy-3$.

Řešení

a) Součet obou mnohočlenů určíme tak, že sečteme všechny členy obou mnohočlenů; takto vzniklý mnohočlen je jejich součet:
$\left(5x^2y - 2xy + 3x + 1\right) + \left(xy^2 + 6xy - 3\right) = 5x^2y + xy^2 +$
$+ (-2xy + 6xy) + 3x + (1 - 3) = 5x^2y + xy^2 + 4xy + 3x - 2$

b) Rozdíl $\left(5x^2y - 2xy + 3x + 1\right) - \left(xy^2 + 6xy - 3\right)$ určíme tak, že k mnohočlenu $5x^2y - 2xy + 3x + 1$ přičteme mnohočlen opačný k mnohočlenu $xy^2 + 6xy - 3$, tj. mnohočlen $-xy^2 - 6xy + 3$. Dostaneme mnohočlen:
$\left(5x^2y - 2xy + 3x + 1\right) - \left(xy^2 + 6xy - 3\right) =$
$= \left(5x^2y - 2xy + 3x + 1\right) + \left(-xy^2 - 6xy + 3\right) =$
$= 5x^2y - xy^2 + (-2xy - 6xy) + 3x + (1 + 3) =$
$= 5x^2y - xy^2 - 8xy + 3x + 4$

c) Součin obou mnohočlenů určíme tak, že každý člen jednoho mnohočlenu vynásobíme každým členem druhého a všechny takto vzniklé součiny sečteme; vzniklý mnohočlen je součinem daných mnohočlenů:
$\left(5x^2y - 2xy + 3x + 1\right) \cdot \left(xy^2 + 6xy - 3\right) = 5x^2y \cdot xy^2 + (-2xy) \cdot$
$\cdot xy^2 + 3x \cdot xy^2 + 1 \cdot xy^2 + 5x^2y \cdot 6xy + (-2xy) \cdot 6xy + 3x \cdot 6xy + 1 \cdot 6xy +$
$+ 5x^2y \cdot (-3) + (-2xy) \cdot (-3) + 3x \cdot (-3) + 1 \cdot (-3) = 5x^3y^3 - 2x^2y^3 +$
$+ 3x^2y^2 + xy^2 + 30x^3y^2 - 12x^2y^2 + 18x^2y + 6xy - 15x^2y + 6xy - 9x -$
$- 3 = 5x^3y^3 + 30x^3y^2 - 2x^2y^3 - 9x^2y^2 + 3x^2y + xy^2 + 12xy - 9x - 3$

Poznámka. Všimněme si ještě zvláštního případu mnohočlenu, a to jednočlenu a_0. Je-li $a_0 \neq 0$, je koeficient u proměnné s nejmenším exponentem (tj. u x^0) nenulový, takže má smysl toto nenulové číslo označit jako **mnohočlen nultého stupně**. A aby číslo $a_0 = 0$ nečinilo výjimku, zavádíme pojem **nulový mnohočlen**, čímž rozumíme právě nulu; stupeň nulového mnohočlenu nedefinujeme. Výhoda zavedení těchto pojmů spočívá v tom, že platí: **součet a součin libovolných mnohočlenů je mnohočlen.** Kdybychom nezavedli nulový mnohočlen, nebylo by toto tvrzení pravdivé: součet opačných mnohočlenů, který je vždy roven nule, by mnohočlen nebyl.

Umíme-li mnohočleny násobit, umíme utvořit i jejich n-tou mocninu pro každé $n \in \mathsf{N}$. Druhou a třetí mocninu dvojčlenu určujeme obvykle podle vzorců:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \qquad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

O správnosti každého z nich se můžete přesvědčit násobením příslušných dvojčlenů.

Příklad 2

Užitím vzorců pro druhou a třetí mocninu dvojčlenu upravte výraz

$$\left(2x^2y - 1\right)^3 - \left(x^2y + \frac{1}{2}\right)^2.$$

Řešení

$$\left(2x^2y - 1\right)^3 - \left(x^2y + \frac{1}{2}\right)^2 =$$
$$= \left[\left(2x^2y\right)^3 - 3 \cdot \left(2x^2y\right)^2 \cdot 1 + 3 \cdot \left(2x^2y\right) \cdot 1^2 - 1^3\right] -$$
$$- \left[\left(x^2y\right)^2 + 2 \cdot \left(x^2y\right) \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] =$$
$$= \left(8x^6y^3 - 12x^4y^2 + 6x^2y - 1\right) + \left(-x^4y^2 - x^2y - \frac{1}{4}\right) =$$
$$= 8x^6y^3 - 13x^4y^2 + 5x^2y - \frac{5}{4}.$$

Příklad 3

Dokažte, že pro všechna reálná čísla a, b, c je hodnota výrazu $a^2 + b^2 + c^2 - 2(a + b + c) + 3$ nezáporné číslo.

Řešení

Daný mnohočlen upravíme tak, aby bylo evidentní, že jiných než nezáporných hodnot nabývat nemůže:

$a^2 + b^2 + c^2 - 2(a + b + c) + 3 = \left(a^2 - 2a + 1\right) + \left(b^2 - 2b + 1\right) + \left(c^2 - 2c + 1\right) = (a-1)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2.$
Tím je důkaz proveden, neboť součet druhých mocnin libovolných reálných čísel je vždy číslo nezáporné. Je rovněž vidět, že daný mnohočlen nabývá nulové hodnoty jedině pro $a = b = c = 1$; pro libovolnou jinou trojici čísel a, b, c je jeho hodnota kladná.

Přistoupíme nyní k dělení mnohočlenů; připomeneme si nejprve, jak provádíme dělení mnohočlenu jednočlenem: **podíl mnohočlenu a jednočlenu** určíme tak, že jednočlenem vydělíme každý člen mnohočlenu a vzniklé podíly sečteme. Hned v následujícím příkladu uvidíme, že **podíl mnohočlenů nemusí být vždycky mnohočlen**.

Příklad 4

Určete podíl:

a) $\left(8a^4b^3 - 16a^3b^2 + 2a^2b - a\right) : 2a$

b) $\left(9x^3 - 18x^2 + 27x - \dfrac{1}{9}\right) : (-9x)$

Řešení

a) Pro $a \neq 0$ platí:
$\left(8a^4b^3 - 16a^3b^2 + 2a^2b - a\right) : 2a = \left(8a^4b^3 : 2a\right) + \left(-16a^3b^2 : 2a\right) + \left(2a^2b : 2a\right) + (-a : 2a) = 4a^3b^3 - 8a^2b^2 + ab - \dfrac{1}{2}$

b) Pro $x \neq 0$ platí:
$\left(9x^3 - 18x^2 + 27x - \dfrac{1}{9}\right) : (-9x) = [9x^3 : (-9x)] + [(-18x^2) : (-9x)] + [27x : (-9x)] + \left[\left(-\dfrac{1}{9}\right) : (-9x)\right] = -x^2 + 2x - 3 + \dfrac{1}{81x}$

Všimněte si: dělením mnohočlenů v a) vznikl mnohočlen $4a^3b^3 - 8a^2b + ab - \dfrac{1}{2}$; dělením mnohočlenů v b) jsme však mnohočlen nedostali: výraz $-x^2 + 2x - 3 + \dfrac{1}{81x}$ není mnohočlen.

Ukážeme si nyní, jak postupujeme v případě, že dělitel mnohočlenu není jednočlen. Omezíme se však pouze **na dělení mnohočlenů s jednou proměnnou**, a to ještě takových, že **stupeň mnohočlenu, který je dělitelem, je nejvýše roven stupni mnohočlenu, který je dělencem**. Poznamenejme ještě, že mnohočlen $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ **je uspořádán sestupně**, tj. podle klesajících mocnin proměnné x; mnohočlen $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ **je uspořádán vzestupně**, tj. podle rostoucích mocnin proměnné x.

Příklad 5

Určete podíl:

a) $\left(2x^7 - 5x^6 + 3x^5 + 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + x - 2\right) : \left(2 - x + x^3 - x^4\right)$

b) $\left(21t^3 - 31t^2 + 39t - 6\right) : (7t - 1)$

Řešení

a) Oba mnohočleny uspořádáme sestupně:
$(2x^7 - 5x^6 + 3x^5 + 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + x - 2) : (-x^4 + x^3 - x + 2)$
První člen dělence vydělíme prvním členem dělitele, tj.

$$2x^7 : \left(-x^4\right) = -2x^3,$$

získaným jednočlenem vynásobíme všechny členy dělitele:

$$\left(-x^4 + x^3 - x + 2\right) \cdot \left(-2x^3\right) = 2x^7 - 2x^6 + 2x^4 - 4x^3$$

a vzniklý mnohočlen odečteme od dělence:
$(2x^7 - 5x^6 + 3x^5 + 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + x - 2) - (2x^7 - 2x^6 + 2x^4 - 4x^3) = -3x^6 + 3x^5 + x^4 - 4x^3 + 6x^2 + x - 2.$
Postup, kterým jsme dospěli k tomuto částečnému výsledku, zapisujeme obvykle takto:

$$\begin{array}{l}
(2x^7 - 5x^6 + 3x^5 + 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + x - 2) : (-x^4 + x^3 - x + 2) = \\
\underline{-(2x^7 - 2x^6 \qquad\quad + 2x^4 - 4x^3)} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad = -2x^3 \\
\qquad - 3x^6 + 3x^5 + \ x^4 - 4x^3 + 6x^2 + x - 2.
\end{array}$$

Protože stupeň dělitele $-x^4 + x^3 - x + 2$ není větší než stupeň mnohočlenu $-3x^6 + 3x^5 + x^4 - 4x^3 + 6x^2 + x - 2$, pokračujeme v dělení, až dojdeme k mnohočlenu, který je nulový nebo má stupeň menší, než je stupeň dělitele. Celý postup je patrný z následujícího zápisu, kterým dělení obvykle zapisujeme:

$$
\begin{array}{l}
(2x^7 - 5x^6 + 3x^5 + 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + x - 2) : (-x^4 + x^3 - x + 2) = \\
\underline{-(2x^7 - 2x^6 \qquad\quad + 2x^4 - 4x^3)} \qquad\qquad\qquad = -2x^3 + 3x^2 - 1 \\
\qquad - 3x^6 + 3x^5 + x^4 - 4x^3 + 6x^2 + x - 2 \\
\qquad \underline{-(-3x^6 + 3x^5 \qquad - 3x^3 + 6x^2)} \\
\qquad\qquad\qquad x^4 - x^3 \qquad + x - 2 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{-(x^4 - x^3 \qquad + x - 2)} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Máme tedy výsledek: pro všechna $x \in \mathsf{R}$, pro něž je $-x^4+x^3-x+$ $+2 \neq 0$, platí $(2x^7-5x^6+3x^5+3x^4-8x^3+6x^2+x-2) : (-x^4+x^3-$ $-x+2) = -2x^3+3x^2-1$. V tomto případě, kdy dělení vyšlo **beze zbytku**, je podílem obou mnohočlenů mnohočlen. O správnosti se můžeme přesvědčit zkouškou: ověříme, že platí

$$
\begin{aligned}
&\left(-2x^3 + 3x^2 - 1\right)\left(-x^4 + x^3 - x + 2\right) = \\
&\qquad = 2x^7 - 5x^6 + 3x^5 + 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + x - 2.
\end{aligned}
$$

b) Podíl daných mnohočlenů určíme právě podrobně popsaným způsobem:

$$
\begin{array}{l}
(21t^3 - 31t^2 + 39t - 6) : (7t - 1) = 3t^2 - 4t + 5 \\
\underline{-(21t^3 - 3t^2)} \\
\qquad - 28t^2 + 39t - 6 \\
\qquad \underline{-(-28t^2 + 4t)} \\
\qquad\qquad\quad 35t - 6 \\
\qquad\qquad\quad \underline{-(35t - 5)} \\
\qquad\qquad\qquad\quad - 1
\end{array}
$$

Jednočlen -1 v posledním řádku je mnohočlen nultého stupně, tj. mnohočlen stupně nižšího, než je stupeň dělitele, takže v dělení dále nepokračujeme. Jednočlen -1 představuje **zbytek**; mnohočlenu $3t^2 - 4t + 5$ se říká **neúplný podíl**.

Dostali jsme tedy, že pro všechna $t \in \mathsf{R}$, pro něž je $7t-1 \neq 0$, platí:

$$\left(21t^3 - 31t^2 + 39t - 6\right) : (7t - 1) = 3t^2 - 4t + 5 - \frac{1}{7t - 1}$$

Je vidět, že v tomto případě podílem daných mnohočlenů není mnohočlen. O správnosti výsledku se můžeme přesvědčit zkouškou (proveďte ji!):

$$\left(3t^2 - 4t + 5 - \frac{1}{7t - 1}\right) \cdot (7t - 1) = 21t^3 - 31t^2 + 39t - 6$$

Úlohy

7.7 Určete podíl mnohočlenů:
a) $\left(3y^3 - y + 11\right) : \left(y^2 - 8y\right)$
b) $\left(x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16\right) : (x + 2)$
c) $\left(a^7 + 2\right) : (a + 1)$
d) $\left(14t^5 + 4t^4 - t^3 + 2t^2 + 3t + 5\right) : \left(2t^2 - 1\right)$

7.8 Výraz $ab + c$ vyjádřete jako mnohočlen s proměnnou x, který je uspořádaný sestupně, je-li:
a) $a = x + 1$, $b = x^2 - 1$, $c = x^3 + 1$
b) $a = 2x - 1$, $b = 2x - 1$, $c = x$
c) $a = b = c = 3x - 2$
d) $a = x - 2$, $b = 3 - x$, $c = x^2 + 1$

7.9 Dokažte, že pro všechna $x \in \mathsf{R}$ a každé přirozené číslo $n > 1$ platí:

$$x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x^2 + x + 1)$$

(Návod: určete součin obou mnohočlenů na pravé straně rovnosti.)

7.10 Dokažte, že pro libovolná reálná čísla a, b platí:

$$
\begin{aligned}
&\left(a^2 + ab + b^2\right)^2 + \left(a^2 - ab + b^2\right)^2 + \left(a^2 + ab - b^2\right)^2 + \left(a^2 - ab - b^2\right)^2 = \\
&\qquad = 4\left(a^4 + a^2b^2 + b^4\right)
\end{aligned}
$$

7.11 Určete mnohočlen, který je nutno přičíst k mnohočlenu $(x+y)^2+r^2$, abychom dostali mnohočlen $(x + y - r)^2$.

7.3 Rozklad mnohočlenů

Rozkladem mnohočlenu se rozumí jeho vyjádření ve tvaru součinu několika mnohočlenů, které jsou zpravidla už nerozložitelné. Provádí se nejčastěji vytýkáním před závorku nebo užitím vhodných vzorců.

Vytýkání před závorku používáme k převedení součtu $xy + xz$ na součin $x(y+z)$; rovnost těchto výrazů vyplývá z distributivního zákona: $x(y+z) = xy + xz$, který platí pro všechna x, y, z reálná. Při úpravách tohoto typu nemusíme samozřejmě vytýkat jen „jednočlen", např. $a(b+1) + c(b+1) = (b+1)(a+c)$.

Rozklad pomocí vzorce provádíme nejčastěji užitím vzorců uvedených na str. 137 a následujících vzorců, jejichž správnost si jistě ověříte:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$$

Poznámka. Každý mnohočlen nelze vyjádřit jako součin mnohočlenů nižšího stupně; příkladem takového mnohočlenu je výraz $a^2 + b^2$.

Příklad 1

Rozložte následující mnohočleny:

a) $x^5 + x^3 - x^2 - 1$ b) $a^2 + 2ab + b^2 - ac - bc$
c) $2p^4 - p^3 + p - 2$ d) $48(x+y)^2 - 12(x-y)^2$

Řešení

Způsob, kterým nalezneme požadovaný rozklad, je bezprostředně patrný z výpočtu:

a) $$x^5 + x^3 - x^2 - 1 = x^3\left(x^2+1\right) - \left(x^2+1\right) = \left(x^2+1\right)\left(x^3-1\right) = \\ = \left(x^2+1\right)(x-1)\left(x^2+x+1\right)$$

b) $a^2 + 2ab + b^2 - ac - bc = (a+b)^2 - c(a+b) = (a+b)(a+b-c)$

c) $$\begin{aligned} 2p^4 - p^3 + p - 2 &= \left(2p^4 - 2\right) - \left(p^3 - p\right) = \\ &= 2\left(p^4 - 1\right) - p\left(p^2 - 1\right) = \\ &= 2\left(p^2+1\right)\left(p^2-1\right) - p\left(p^2-1\right) = \\ &= \left(p^2-1\right)\left[2\left(p^2+1\right) - p\right] = \\ &= (p-1)(p+1)\left(2p^2 - p + 2\right) \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} 48(x+y)^2 - 12(x-y)^2 &= 12\left[4(x+y)^2 - (x-y)^2\right] = \\ &= 12\left[(2(x+y))^2 - (x-y)^2\right] = \\ &= 12[2(x+y) - (x-y)][2(x+y) + (x-y)] = \\ &= 12(x+3y)(3x+y) \end{aligned}$$

V některých případech je zapotřebí mnohočlen, který chceme rozložit v součin, upravit; tato úprava nebývá někdy na první — a leckdy ani na druhý — pohled patrná.

Příklad 2

Rozložte v součin mnohočleny
a) $2y^2 + 3y + 1$;
b) $x^3 - 3x^2 + 4$.

Řešení

a) $$\begin{aligned} 2y^2 + 3y + 1 &= 2y^2 + (2y+y) + 1 = \left(2y^2 + 2y\right) + (y+1) = \\ &= 2y(y+1) + (y+1) = (y+1)(2y+1) \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x^3 - 3x^2 + 4 &= x^3 - 3x^2 + (3+1) = \left(x^3+1\right) - 3\left(x^2-1\right) = \\ &= (x+1)\left(x^2 - x + 1\right) - 3(x-1)(x+1) = \\ &= (x+1)\left[\left(x^2 - x + 1\right) - 3(x-1)\right] = \\ &= (x+1)\left(x^2 - 4x + 4\right) = (x+1)(x-2)^2 \end{aligned}$$

Všimneme si ještě **rozkladu kvadratického trojčlenu** $x^2 + px + q$, kde p, q jsou celá čísla, na součin $(x-r)(x-s)$ lineárních dvojčlenů, kde r, s jsou rovněž celá čísla.

Předpokládejme, že je dán trojčlen $x^2 + px + q$ s celočíselnými koeficienty p, q a že existují celá čísla r, s tak, že platí

$$x^2 + px + q = (x - r)(x - s);$$

tato celá čísla r, s chceme určit.

Protože je

$$x^2 + px + q = (x - r)(x - s) = x^2 - (r + s)x + rs,$$

musí pro hledaná celá čísla r, s platit: $rs = q$ a zároveň $r + s = -p$. Z těchto podmínek hledaná čísla r, s určíme, pokud ovšem existují.

Příklad 3

Rozložte kvadratické trojčleny v součin lineárních dvojčlenů s celočíselnými koeficienty:

a) $x^2 + 10x + 24$
b) $x^2 - x - 6$
c) $x^2 - 2x + 6$

Řešení

a) Pro celá čísla r, s, pro něž je $(x - r)(x - s) = x^2 + 10x + 24$, musí platit: $rs = 24$ a $r + s = -10$. Je ihned vidět, že jsou to čísla -6 a -4, takže dostáváme výsledek:

$$x^2 + 10x + 24 = (x + 6)(x + 4)$$

Nepodaří-li se nám tato čísla určit zpaměti, vypíšeme si všechny způsoby, jimiž lze číslo 24 vyjádřit jako součin dvou celých čísel; dostaneme tak:
$24 = 1 \cdot 24 = 2 \cdot 12 = 3 \cdot 8 = 4 \cdot 6 = (-1)(-24) = (-2)(-12) =$
$= (-3)(-8) = (-4)(-6)$
Ze všech těchto čísel jedině čísla -4, -6 dají součet -10.

b) Platí:

$$-6 = 1 \cdot (-6) = 2 \cdot (-3) = (-1) \cdot 6 = (-2) \cdot 3;$$

a protože je též

$$1 = -2 + 3,$$

dostaneme požadovaný rozklad:

$$x^2 - x - 6 = (x + 2)(x - 3)$$

c) Platí:

$$6 = 1 \cdot 6 = 2 \cdot 3 = (-1)(-6) = (-2)(-3)$$

Protože pro žádná dvě z těchto celých čísel, jejichž součin je rovný šesti, není jejich součet roven číslu 2, nelze daný kvadratický trojčlen v součin lineárních dvojčlenů s celými koeficienty rozložit.

Poznámka. O rozkladu kvadratického trojčlenu budete ještě hovořit při řešení kvadratických rovnic.

Úlohy

7.12 Rozložte mnohočleny:
a) $xr - yr - x^2 + 2xy - y^2$ b) $(a^2 + b^2 - c^2)^2 - 4a^2b^2$
c) $9(2a - x)^2 - 4(3a - x)^2$ d) $a^2y - aby + a^3y - ab^2y$

7.13 Rozložte mnohočleny:
a) $x^6 - y^6$ b) $(x + y + r)^3 - (x + y - r)^3$
c) $(x^2 - 2x + 3)^2 - (x^2 - 2x - 3)^2$ d) $(x + y)^4 - x^4$

7.14 Rozložte v součin:
a) $2x^4 + x^3 + 4x^2 + x + 2$
(Návod: daný mnohočlen napište ve tvaru
$(x^3 + x) + (2x^4 + 4x^2 + 2)$)
b) $t^3 + 3t^2 + 4t + 2$
(Návod: daný mnohočlen napište ve tvaru
$(t^3 + 2t^2 + 2t) + (t^2 + 2t + 2)$)

7.15 Rozložte kvadratické trojčleny:
a) $x^2 - 6x + 8$ b) $x^2 + 6x + 8$
c) $x^2 - 2x - 15$ d) $x^2 + x - 12$

8. LOMENÉ VÝRAZY

8.1 Krácení a rozšiřování lomených výrazů

V předcházející kapitole jsme se zabývali výrazy, zejména mnohočleny. Nyní se budeme zajímat o výrazy, které jsou zapsány ve tvaru zlomku; označujeme je jako **lomené výrazy**. S lomenými výrazy pracujeme podobně jako se zlomky; protože jmenovatel žádného zlomku nemůže být roven nule, musíme u lomených výrazů dbát na to, aby byly vyloučeny ty hodnoty jednotlivých proměnných, po jejichž dosazení nabývá jmenovatel lomeného výrazu nulové hodnoty. Jinak řečeno: při práci s lomenými výrazy musíme vždycky vědět, kdy tyto **výrazy mají smysl**.

Pro práci s lomenými výrazy je zapotřebí si připomenout pojem společný dělitel mnohočlenů a společný násobek mnohočlenů; jsou to pojmy, které vznikly zobecněním pojmů společný dělitel a společný násobek celých čísel.

Společný dělitel mnohočlenů je mnohočlen, kterým je každý z daných mnohočlenů beze zbytku dělitelný.

Společný násobek mnohočlenů je mnohočlen, který je každým z daných mnohočlenů beze zbytku dělitelný.

Příklad 1

Určete společné dělitele a společné násobky mnohočlenů
$12a^2bx \cdot (x^2 - y^2)(a+b)$, $18ab^2y(x+y)(a^2+2ab+b^2)$.

Řešení

Určíme nejprve společné dělitele obou mnohočlenů. Každý z daných mnohočlenů vyjádříme takto:

$$12a^2bx(x^2-y^2)(a+b) = 2\cdot 2\cdot 3\cdot a\cdot a\cdot b\cdot x(x+y)(x-y)(a+b)$$
$$18ab^2y(x+y)(a^2+2ab+b^2) = 2\cdot 3\cdot 3\cdot a\cdot b\cdot b\cdot y(x+y)(a+b)(a+b)$$

Ty mnohočleny, které se vyskytují v každém z těchto rozkladů, dělí každý z obou mnohočlenů beze zbytku, takže jsou jejich společným

dělitelem. Společným dělitelem obou mnohočlenů je však nejen každý z mnohočlenů

$$2,\quad 3,\quad a,\quad b,\quad x+y,\quad a+b,$$

ale i každý součin z nich utvořený, např.

$$6,\quad 3a,\quad 2b,\quad ab(x+y),\quad 6(a+b),\quad 3a(x+y)(a+b).$$

Pro další výpočty je vhodným dělitelem daných mnohočlenů např. mnohočlen

$$2\cdot 3\cdot a\cdot b(x+y)(a+b) = 6ab(x+y)(a+b),$$

který je roven součinu všech mnohočlenů, které jsou obsaženy v každém rozkladu daných mnohočlenů. Všimněte si, že je to společný dělitel daných mnohočlenů, který je dělitelný každým jejich společným dělitelem.

Společný násobek obou mnohočlenů dostaneme nejjednodušším způsobem tak, že oba tyto mnohočleny vynásobíme. Společným násobkem daných mnohočlenů je tedy mnohočlen

$$216a^3b^3xy(x^2-y^2)(x+y)(a+b)^3.$$

Ke zjednodušení výpočtu však raději použijeme společný násobek

$$[2\cdot 2\cdot 3\cdot a\cdot a\cdot b\cdot x(x+y)(x-y)(a+b)]\cdot 3by(a+b) =$$
$$= 36a^2b^2xy(x+y)(x-y)(a+b)^2.$$

Je to mnohočlen, který dostaneme jako součin všech mnohočlenů, které se vyskytují aspoň v jednom rozkladu daných mnohočlenů. Každý činitel přitom bereme s největším exponentem, s kterým se vyskytuje v jednotlivých mnohočlenech. Všimněte si, že je to společný násobek, který je dělitelem každého jejich společného násobku.

Pojmy, které jsme si v předešlém příkladu vysvětlili, budeme často používat, zejména při sčítání lomených výrazů. Věnujme se nyní krácení a rozšiřování lomených výrazů.

Krátit lomený výraz znamená dělit jeho čitatele i jmenovatele týmž výrazem. **Rozšířit lomený výraz** znamená vynásobit jeho čitatele i jmenovatele týmž výrazem. Oba tyto početní úkony můžeme vyjádřit jedinou rovností:

Krácení a rozšiřování

Pro libovolné výrazy V_1, V_2, V_3 a pro všechny hodnoty proměnných, pro něž je $V_2 \neq 0$, $V_3 \neq 0$ platí:

$$\frac{V_1 \cdot V_3}{V_2 \cdot V_3} \underset{\xleftarrow{\text{rozšiřování}}}{\overset{\xrightarrow{\text{krácení}}}{=}} \frac{V_1}{V_2}$$

Krácení a rozšiřování užíváme při zjednodušování lomených výrazů. Rozšiřování užíváme navíc při převádění lomených výrazů na společného jmenovatele.

Příklad 2

Kraťte lomené výrazy:

a) $\dfrac{48a^2xy^2}{36a^2x^2y}$ b) $\dfrac{9a^2(p^2-4)(x^2+2x+1)}{6a^5(p+2)(x^2-1)}$

c) $\dfrac{9p^2+1}{(3p+1)(3p-1)}$

Řešení

a) Daný výraz má smysl pro všechna $a \neq 0$, $x \neq 0$, $y \neq 0$. Za těchto předpokladů platí:

$$\frac{48a^2xy^2}{36a^2x^2y} = \frac{4 \cdot 12a^2x \cdot y \cdot y}{3 \cdot 12a^2x \cdot x \cdot y} = \frac{4y}{3x}$$

Daný lomený výraz jsme krátili jednočlenem $12a^2xy$, což je společný dělitel mnohočlenů $48a^2xy^2$, $36a^2x^2y$. Uvědomte si ještě, že rovnost mezi původním výrazem a výrazem, který jsme dostali krácením, platí pro ty hodnoty proměnných, pro něž mají smysl

oba tyto výrazy, tj. pro $a \neq 0$, $x \neq 0$, $y \neq 0$; nestačí jen požadavek $x \neq 0$, který je nutný k tomu, aby měl smysl upravený výraz.

b) Daný výraz má smysl pro všechna $a \neq 0$, $p \neq -2$, $x \neq 1$, $x \neq -1$. Za těchto předpokladů platí:

$$\frac{9a^2(p^2-4)(x^2+2x+1)}{6a^5(p+2)(x^2-1)} = \frac{3 \cdot 3a^2(p-2)(p+2)(x+1)(x+1)}{2 \cdot 3 \cdot a^2 \cdot a^3(p+2)(x-1)(x+1)} =$$
$$= \frac{3(p-2)(x+1)}{2a^3(x-1)}$$

Daný zlomek jsme krátili výrazem $3a^2(p+2)(x+1)$, což je společný dělitel mnohočlenů $9a^2(p^2-4)(x+1)^2$, $6a^5(p+2)(x^2-1)$.

c) Daný výraz je definován pro všechna $p \neq -\dfrac{1}{3}$ a $p \neq \dfrac{1}{3}$; nelze jej však krácením zjednodušit.

Příklad 3

Rozšiřte každý z lomených výrazů

$$\frac{1}{x+3}, \quad \frac{1}{x-1}, \quad \frac{1}{x}$$

tak, aby všechny měly ve jmenovateli týž mnohočlen.

Řešení

Nejjednodušším způsobem příklad vyřešíme tak, že každý lomený výraz rozšíříme součinem jmenovatelů ostatních dvou lomených výrazů, tj.:

$$\frac{1}{x+3} = \frac{x(x-1)}{(x+3)x(x-1)}, \qquad \frac{1}{x-1} = \frac{x(x+3)}{(x-1)x(x+3)},$$
$$\frac{1}{x} = \frac{(x-1)(x+3)}{x(x-1)(x+3)}$$

Každá z těchto tří rovností platí jen tehdy, je-li $x \neq 0$, $x \neq 1$, $x \neq -3$.

Úlohy

8.1 Kraťte lomené výrazy a uveďte, kdy má tato úprava smysl:

a) $\dfrac{3a^2-3ab}{3(a-b)^2}$ b) $\dfrac{x^3-y^3}{x^2-y^2}$

c) $\dfrac{4-4t+t^2}{t^2-4}$ d) $\dfrac{20x^2-45y^2}{(2x+3y)^2}$

8.2 Zjednodušte krácením a uveďte, kdy mají zlomky smysl:

a) $\dfrac{xy-y-x^2+x}{xy+y-x^2-x}$ b) $\dfrac{r^3-1}{r^2-1}$

c) $\dfrac{s^2-4}{rs+2r-s-2}$ d) $\dfrac{3xy+9y-2x-6}{3xy-2x-9y+6}$

8.3 Rozšiřte vhodným výrazem a vyjádřete:

a) $\dfrac{t}{1-a}$ jako lomený výraz se jmenovatelem $a-1$;

b) $\dfrac{x}{y-2}$ jako lomený výraz se jmenovatelem $2-y$;

c) $\dfrac{x+3}{2-x}$ jako lomený výraz se jmenovatelem x^2-4;

d) $\dfrac{y-1}{x+1}$ jako lomený výraz se jmenovatelem x^3+1.

8.4 Určete, pro která $x \in \mathsf{R}$ platí:

a) $\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^3+2x^2-x-2}=\dfrac{x-2}{x+2}$ b) $\dfrac{2x^2-4x+2}{(x-1)^2}=2$

c) $\dfrac{|x|}{x}+x=1+x$ d) $\dfrac{|x|+1}{1+|x|}=1$

8.5 Vyjádřete daný zlomek tak, aby v jeho jmenovateli nebylo iracionální číslo:

a) $\dfrac{3}{1-\sqrt{2}}$ b) $\dfrac{2}{1+\sqrt{3}}$ c) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

8.2 Sčítání a násobení lomených výrazů

Připomeňme si, že **součet lomených výrazů** je lomený výraz, jehož čitatel je součet čitatelů sčítaných výrazů **převedených na společného jmenovatele** a jehož jmenovatel je tento společný jmenovatel.

Sčítání
Pro libovolné výrazy V_1, V_2, V_3, V_4 a pro všechny hodnoty proměnných, pro něž je $V_2 \neq 0$, $V_4 \neq 0$, platí:

$$\frac{V_1}{V_2}+\frac{V_3}{V_4}=\frac{V_1V_4+V_2V_3}{V_2V_4}$$

Společného jmenovatele se snažíme určit vždy tak, aby to byl výraz co nejjednodušší; během výpočtu (a většinou i ve výsledném výrazu) ho ponecháme ve tvaru součinu.

Příklad 1

Sečtěte lomené výrazy:

a) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{x}{2}+3$ b) $\dfrac{x}{y^2-x^2}-\dfrac{y}{x-y}$ c) $\dfrac{a+b}{a}-\dfrac{a}{a-b}+\dfrac{b^2}{a^2-ab}$

Řešení

a) Společným jmenovatelem je $2x$, takže:

$$\frac{1}{x}+\frac{x}{2}+3=\frac{2}{2x}+\frac{x^2}{2x}+\frac{6x}{2x}=\frac{x^2+6x+2}{2x},$$

což platí pro všechna $x \neq 0$.

b) Společným jmenovatelem je $y^2-x^2=-(x^2-y^2)=-(x-y)(x+y)$; je tedy

$$\frac{x}{y^2-x^2}-\frac{y}{x-y}=\frac{x}{-(x-y)(x+y)}-\frac{-(x+y)y}{-(x-y)(x+y)}=$$

$$=\frac{x+(x+y)y}{-(x-y)(x+y)}=\frac{y^2+xy+x}{(x+y)(y-x)};$$

rovnost mezi původním a výsledným výrazem platí jen za předpokladu $x + y \neq 0$, $x - y \neq 0$.

c) Společný jmenovatel všech tří lomených výrazů je výraz $a^2 - ab = a(a-b)$; platí tedy

$$\frac{a+b}{a} - \frac{a}{a-b} + \frac{b^2}{a^2 - ab} = \frac{(a+b)(a-b)}{a(a-b)} - \frac{a^2}{a(a-b)} + \frac{b^2}{a(a-b)} = $$
$$= \frac{a^2 - b^2 - a^2 + b^2}{a(a-b)} = 0;$$

tato rovnost platí pro všechna $a \neq 0$, $a \neq b$.

Připomeňme si dále, že **součin lomených výrazů** je lomený výraz, jehož čitatel je součin čitatelů a jmenovatel součin jmenovatelů násobených lomených výrazů.

Násobení

Pro libovolné výrazy V_1, V_2, V_3, V_4 a pro všechny hodnoty proměnných, pro něž je $V_2 \neq 0$, $V_4 \neq 0$, platí:

$$\frac{V_1}{V_2} \cdot \frac{V_3}{V_4} = \frac{V_1 \cdot V_3}{V_2 \cdot V_4}$$

Při násobení jednotlivé výrazy „neroznásobujeme“, naopak, **snažíme se je vhodně rozložit a podle možnosti i krátit**. Tato zásada platí ostatně obecně, nejen pro násobení.

Příklad 2

Určete součin:

a) $\dfrac{5x-10}{2y} \cdot \dfrac{y^2}{4x-8}$ b) $\left(1 + \dfrac{a}{1-a}\right)\dfrac{1-a^2}{1+b} \cdot \dfrac{1-b^2}{a+a^2}$

c) $(x^2-1) \cdot \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1} - 1\right)$

Řešení

Postup je patrný přímo z výpočtů:

a) $\dfrac{5x-10}{2y} \cdot \dfrac{y^2}{4x-8} = \dfrac{5(x-2)}{2y} \cdot \dfrac{y^2}{4(x-2)} = \dfrac{5}{2} \cdot \dfrac{y}{4} = \dfrac{5y}{8}$,
což platí pro všechna $x \neq 2$, $y \neq 0$.

b) $\left(1 + \dfrac{a}{1-a}\right)\dfrac{1-a^2}{1+b} \cdot \dfrac{1-b^2}{a+a^2} = \dfrac{(1-a)+a}{1-a} \cdot \dfrac{(1-a)(1+a)}{1+b} \cdot$
$\cdot \dfrac{(1-b)(1+b)}{a(1+a)} = \dfrac{1-b}{a}$, což platí pro všechna $a \neq 1$, $a \neq 0$, $a \neq -1$, $b \neq -1$.

c) $(x^2-1) \cdot \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1} - 1\right) = (x-1)(x+1) \cdot$
$\cdot \left(\dfrac{x+1}{(x-1)(x+1)} - \dfrac{x-1}{(x+1)(x-1)} - \dfrac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)}\right) =$
$= (x-1)(x+1) \cdot \dfrac{(x+1)-(x-1)-(x^2-1)}{(x+1)(x-1)} = 3 - x^2$, což platí pro všechna $x \neq 1$, $x \neq -1$.

Pokud jde o mocniny lomených výrazů s přirozeným exponentem, víte, že platí: lomený výraz **umocníme**, umocníme-li jeho čitatele i jmenovatele.

Umocňování

Pro libovolné výrazy V_1, V_2 a libovolné přirozené číslo k a pro všechny hodnoty proměnných, pro něž je $V_2 \neq 0$, platí:

$$\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^k = \frac{V_1^k}{V_2^k}$$

Úlohy

8.6 Vypočtěte:

a) $\dfrac{2p+q}{p^2+pq} + \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p+q}$ b) $\dfrac{x-y}{xy} - \dfrac{z-y}{yz} + \dfrac{x+z}{xz}$

c) $\dfrac{4}{3x-3y} - \dfrac{3x-4y}{2x^2-4xy+2y^2}$ d) $\dfrac{1}{t-1} + \dfrac{t-1}{t+1} - \dfrac{4t}{t^2-1} - 1$

8.7 Proveďte:

a) $\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right)\dfrac{a^2}{a-b}$ b) $\left(\dfrac{1}{z+1} - \dfrac{2z}{z^2-1}\right)\left(\dfrac{1}{z} - 1\right)$

c) $\left(\dfrac{3}{1+x} - 1\right)\left(\dfrac{3}{2-x} - 1\right)$

d) $\left(y+1+\dfrac{1}{2y-1}\right)\left(y-1+\dfrac{1}{2y+1}\right)$

8.8 Dokažte, že pro každé nenulové reálné číslo t je součet čísel $1+t$, $1+\dfrac{1}{t}$ roven jejich součinu.

8.9 Určete, pro která reálná čísla a, b má smysl výraz

$$\frac{2b(a-1)}{(a-2)(b^2-1)} - \frac{a+b}{ab+a-2b-2} - \frac{a-b}{ab-a-2b+2},$$

a ukažte, že pro všechna tato a, b je roven nule.

8.10 Vypočtěte:

a) $\left(\dfrac{2x}{3a}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{9a}{x}\right)^2$ b) $\left[\left(\dfrac{a}{b}\right)^2 + \left(\dfrac{b}{a}\right)^2 + 2\right]\left(\dfrac{ab}{2}\right)^2$

c) $x\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)^2 - y\left(\dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{x}\right)^2$

d) $\dfrac{x}{y}(x+y)^2 - x\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^2 + y\left(1-\dfrac{1}{y}\right)^2$

8.3 Dělení lomených výrazů

Při dělení lomených výrazů se užívá poznatek, který znáte už ze základní školy: dělit nějakým výrazem V znamená násobit výrazem $\dfrac{1}{V}$; výraz $\dfrac{1}{V}$ má přitom smysl jen pro ty hodnoty proměnných, pro něž je $V \neq 0$.

Pro dělení lomeného výrazu $\dfrac{V_1}{V_2}$ lomeným výrazem $\dfrac{V_3}{V_4}$ tak dostáváme

$$\frac{V_1}{V_2} : \frac{V_3}{V_4} = \frac{V_1}{V_2} \cdot \frac{1}{\frac{V_3}{V_4}},$$

a protože

$$\frac{1}{\frac{V_3}{V_4}} = \frac{V_4}{V_4 \cdot \frac{V_3}{V_4}} = \frac{V_4}{V_3},$$

platí

$$\frac{V_1}{V_2} : \frac{V_3}{V_4} = \frac{V_1}{V_2} \cdot \frac{1}{\frac{V_3}{V_4}} = \frac{V_1}{V_2} \cdot \frac{V_4}{V_3}.$$

Můžeme tedy shrnout:

Dělení

Pro libovolné výrazy V_1, V_2, V_3, V_4 a pro všechny hodnoty proměnných, pro něž je $V_2 \neq 0$, $V_3 \neq 0$, $V_4 \neq 0$, platí:

$$\frac{V_1}{V_2} : \frac{V_3}{V_4} = \frac{V_1}{V_2} \cdot \frac{V_4}{V_3}$$

Příklad 1

Určete:

a) $\dfrac{4a^2b}{9pq^2} : \dfrac{2ab^2}{3p^2q}$ b) $\dfrac{a^2+ax}{x-x^2} : \dfrac{x^2+ax}{a-ax}$

c) $\left(v+\dfrac{u-v}{1+uv}\right) : \left[1-\dfrac{v(u-v)}{1+uv}\right]$

Řešení

a) $\dfrac{4a^2b}{9pq^2} : \dfrac{2ab^2}{3p^2q} = \dfrac{4a^2b}{9pq^2} \cdot \dfrac{3p^2q}{2ab^2} = \dfrac{2a}{3q} \cdot \dfrac{p}{b} = \dfrac{2ap}{3bq}$

Připomeňme si, že k tomu, aby všechny provedené úpravy měly smysl, nestačí, aby byl nenulový jen jmenovatel dělence a dělitele, tj. aby bylo $p \neq 0$, $q \neq 0$; musí být nenulový celý výraz, jímž dělíme, tj. výraz $\dfrac{2ab^2}{3p^2q}$, což znamená, že musí být též $a \neq 0$, $b \neq 0$.

Rovnost

$$\frac{4a^2b}{9pq^2} : \frac{2ab^2}{3p^2q} = \frac{2ap}{3bq}$$

platí tedy jen pro $a \neq 0$, $b \neq 0$, $p \neq 0$, $q \neq 0$.

b) $\dfrac{a^2+ax}{x-x^2} : \dfrac{x^2+ax}{a-ax} = \dfrac{a(a+x)}{x(1-x)} \cdot \dfrac{a(1-x)}{x(x+a)} = \dfrac{a}{x} \cdot \dfrac{a}{x} = \left(\dfrac{a}{x}\right)^2$, což platí pro všechna $x \neq 0$, $x \neq 1$, $a \neq 0$, $x+a \neq 0$.

c)
$$\left(v + \frac{u-v}{1+uv}\right) : \left[1 - \frac{v(u-v)}{1+uv}\right] =$$
$$= \frac{v(1+uv)+(u-v)}{1+uv} : \frac{(1+uv)-(uv-v^2)}{1+uv} =$$
$$= \frac{uv^2+u}{1+uv} \cdot \frac{1+uv}{1+v^2} = \frac{u(v^2+1)}{1+uv} \cdot \frac{1+uv}{1+v^2} = u,$$

což platí pro všechna $uv \neq -1$; výraz $1+v^2$ je totiž nenulový pro všechna v.

Poznámka. Patrně už jste si všimli, že podmínky, za nichž mají úpravy prováděné s danými výrazy smysl, je obvykle vhodnější určovat až po jejich provedení, nikoli hned na počátku, kdy jednotlivé výrazy ještě nejsou vyjádřeny jako součin; podmínky, kdy dané výrazy a operace s nimi mají smysl, vyplynou přímo z úprav, které jsou během řešení použity.

Nahradíme-li v podílu dvou lomených výrazů znak : pro dělení zlomkovou čárou, dostáváme **složený lomený výraz**, tj. lomený výraz, v jehož čitateli i jmenovateli jsou lomené výrazy; tuto zlomkovou čáru nazýváme **hlavní zlomková čára**. Z toho, co víme o dělení lomených výrazů, plyne:

Zjednodušení složeného lomeného výrazu
Pro libovolné výrazy V_1, V_2, V_3, V_4 a pro všechny hodnoty proměnných, pro něž je $V_2 \neq 0$, $V_3 \neq 0$, $V_4 \neq 0$, platí:

$$\frac{\frac{V_1}{V_2}}{\frac{V_3}{V_4}} = \frac{V_1}{V_2} : \frac{V_3}{V_4} = \frac{V_1}{V_2} \cdot \frac{V_4}{V_3}$$

Příklad 2

Zjednodušte výrazy:

a) $\dfrac{\frac{a+b}{a-b}}{\frac{(a+b)^2}{a^2-b^2}}$ b) $\dfrac{1-x}{1-\frac{x}{x+1}}$ c) $\dfrac{t-\frac{t-1}{t+1}}{1+\frac{t(t-1)}{t+1}}$

Řešení

a) $\dfrac{\frac{a+b}{a-b}}{\frac{(a+b)^2}{a^2-b^2}} = \dfrac{a+b}{a-b} \cdot \dfrac{a^2-b^2}{(a+b)^2} = \dfrac{1}{a-b} \cdot \dfrac{(a+b)(a-b)}{a+b} = 1$, což platí pro všechna a, b, pro něž je $a+b \neq 0$, $a-b \neq 0$.

b) $\dfrac{1-x}{1-\frac{x}{x+1}} = \dfrac{1-x}{\frac{(x+1)-x}{x+1}} = (1-x) \cdot \dfrac{x+1}{1} = 1-x^2$, což platí pro všechna $x \neq -1$.

c) $\dfrac{t-\frac{t-1}{t+1}}{1+\frac{t(t-1)}{t+1}} = \dfrac{\frac{t(t+1)-(t-1)}{t+1}}{\frac{(t+1)+t(t-1)}{t+1}} = \dfrac{t^2+1}{t+1} \cdot \dfrac{t+1}{t^2+1} = 1$, což má smysl pro všechna $t \neq -1$.

Příklad 3

Silnice z A do B vede nejprve d_1 km do kopce a potom d_2 km z kopce. Určete, jakou průměrnou rychlostí jelo auto na cestě z A do B, jestliže do kopce jelo rychlostí v_1 km·h^{-1} a z kopce rychlostí v_2 km·h^{-1}.

Řešení

Označme t_1 dobu jízdy do kopce (v hodinách), t_2 dobu jízdy z kopce (v hodinách); platí pro ně

$$t_1 = \frac{d_1}{v_1}, \qquad t_2 = \frac{d_2}{v_2}.$$

Protože celková doba jízdy z A do B je $t_1 + t_2$, pro průměrnou rychlost v auta na trati z A do B platí:

$$v = \frac{d_1 + d_2}{t_1 + t_2};$$

do tohoto výrazu dosadíme za t_1, t_2 a získaný výraz upravíme:

$$v = \frac{d_1 + d_2}{t_1 + t_2} = \frac{d_1 + d_2}{\frac{d_1}{v_1} + \frac{d_2}{v_2}} = \frac{d_1 + d_2}{\frac{d_1 v_2 + d_2 v_1}{v_1 v_2}} = (d_1 + d_2) \cdot \frac{v_1 v_2}{d_1 v_2 + d_2 v_1} =$$
$$= \frac{(d_1 + d_2) v_1 v_2}{d_1 v_2 + d_2 v_1}$$

Vzhledem k podmínkám úlohy je $d_1 > 0$, $d_2 > 0$, $v_1 > 0$, $v_2 > 0$; výraz pro průměrnou rychlost v má pro všechny tyto hodnoty smysl.

Poznámka. a) Povšimněte si, případně si i zapamatujte: průměrná rychlost není obecně aritmetickým průměrem průměrných rychlostí.
b) Vždycky, když dojdeme k nějakému výsledku řešeného problému, měli bychom se alespoň krátce zamyslet nad tím, zda „je vůbec možný". Odvozený vzorec pro průměrnou rychlost můžeme „prověřit" takto: je jasné, že jsou-li rychlosti v_1, v_2 stejné, dejme tomu v_0, je průměrná rychlost auta také v_0. Dosadíme proto do odvozeného vzorce $v_1 = v_0$, $v_2 = v_0$ a dostaneme

$$v = \frac{(d_1 + d_2) v_0^2}{d_1 v_0 + d_2 v_0} = \frac{(d_1 + d_2) v_0^2}{v_0 (d_1 + d_2)} = v_0,$$

což je v souhlase s naším očekáváním. Toto „prověření" není ovšem důkazem správnosti, jde pouze o kontrolu.

Úlohy

8.11 Určete:

a) $\dfrac{x^2 + xy}{5x^2 - 5y^2} : \dfrac{x^2 - xy}{3x^2 - 3y^2}$ b) $\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right) : \left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right)$

c) $\left(\dfrac{x}{x - 1} - \dfrac{x + 1}{x}\right) : \left(\dfrac{x}{x + 1} - \dfrac{x - 1}{x}\right)$

d) $\left(y - 2 + \dfrac{3}{y}\right) : \left(1 + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{y^2}\right)$

8.12 Zjednodušte:

a) $\dfrac{a - \frac{x^2}{a}}{x - \frac{a^2}{x}}$ b) $\dfrac{1 - \frac{2y}{x} + \frac{y^2}{x^2}}{x - y}$

c) $\dfrac{x}{1 + \frac{1}{x+1}}$ d) $\dfrac{\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y}}{\frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(x-y)^2}}$

8.13 Do prvního patra, jehož podlaží je ve výšce h metrů, má vést n schodů. Určete, o kolik centimetrů se zmenší výška každého schodu, vzroste-li počet schodů o p.

8.14 Zjednodušte výraz:

$$\left[\frac{4x}{x^2 + 2}\left(\frac{1}{x^2 - 2x} + \frac{x}{2x - 4}\right) - \frac{4}{x^2 - 4}\right] : \frac{x}{x - 2}$$

a určete všechna celá čísla, pro něž je roven celému číslu.

8.15 Určete, pro které hodnoty proměnné x je

$$V_1 - V_2 = \frac{V_1}{V_2},$$

kde $V_1 = 2 + x + \dfrac{1}{x}$, $V_2 = 1 + x$.

8.4 Vyjádření neznámé ze vzorce

Vyjádření neznámé ze vzorce si vysvětlíme na konkrétním příkladu: vezměme třeba vzorec pro objem V rotačního kužele s výškou v a s poloměrem r jeho podstavy:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 v$$

Známe-li jeho rozměry r, v, určíme objem dosazením do uvedeného vzorce. Tento vzorec však můžeme použít i k výpočtu poloměru jeho podstavy, známe-li V, v, nebo k výpočtu jeho výšky, známe-li V, r. Říkáme, že ze vzorce pro objem kužele vyjádříme poloměr jeho podstavy, resp. jeho výšku. Postupujeme při tom tak, že všechny proměnné, kromě té, kterou ze vzorce vyjadřujeme, považujeme za konstanty a tu proměnnou, kterou chceme vyjádřit, považujeme za neznámou. Ze vzorce pro objem kužele tak můžeme vyjádřit poloměr r jeho podstavy

$$r = \sqrt{\frac{3V}{\pi v}},$$

resp. jeho výšku

$$v = \frac{3V}{\pi r^2}.$$

Příklad 1

Určete výšku pravidelného čtyřbokého jehlanu, je-li jeho objem $V = 800\,\mathrm{cm}^3$ a délka jeho podstavné hrany $a = 10\,\mathrm{cm}$.

Řešení

Ze vzorce $V = \frac{1}{3}a^2 v$ pro objem jehlanu, v němž známe V, a, vyjádříme proměnnou v:

$$v = \frac{3V}{a^2}$$

Dosazením za V (v cm^3) a za a (v cm) dostaneme pro výšku v (v cm):

$$v = \frac{3 \cdot 800}{10^2} = 24$$

Při řešení příkladu 1 jsme mohli postupovat také tak, že do vzorce pro objem dosadíme dané hodnoty, tj.

$$800 = \frac{1}{3} \cdot 100v,$$

odtud vypočteme

$$v = 24.$$

Tento postup je sice správný, matematikovi se však příliš nelíbí. Matematik obvykle postupuje tak, že požadovanou proměnnou z daného vzorce vyjádří obecně a teprve do tohoto vyjádření dosazuje dané hodnoty. (Tak jsme v příkladu 1 vskutku postupovali.) Tento postup je výhodnější: obecné vyjádření požadované proměnné z daného vzorce umožňuje vidět širší souvislosti (např. jak vyjádřená proměnná závisí na zbývajících proměnných), může vést k objevení zajímavého vztahu apod. V tomto postupu se projevuje jeden z charakteristických rysů matematiky: snaha po zobecnění získaných poznatků.

Snažte se proto i vy postupovat v podobných příkladech obecně; získáte tím přinejmenším větší zběhlost v práci s proměnnými, kterou oceníte, až se budete zabývat funkcemi.

Příklad 2

V příkladu 3 předešlého článku byl odvozen vzorec pro průměrnou rychlost v auta, které v první části své dráhy (o délce d_1 km) jelo rychlostí $v_1\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$ a v druhé části (o délce d_2 km) rychlostí $v_2\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$:

$$v = \frac{(d_1 + d_2)v_1 v_2}{d_1 v_2 + d_2 v_1}$$

Vyjádřete z tohoto vzorce d_2.

Řešení

Proměnnou d_2 považujeme v rovnici

$$v = \frac{(d_1 + d_2)v_1 v_2}{d_1 v_2 + d_2 v_1}$$

za neznámou, ostatní proměnné bereme jako konstanty. Vynásobením této rovnice výrazem $d_1 v_2 + d_2 v_1$ a úpravou pravé strany dostaneme

$$v d_1 v_2 + v d_2 v_1 = d_1 v_1 v_2 + d_2 v_1 v_2;$$

rovnici upravíme tak, aby výrazy s neznámou d_2 byly na levé straně a zbývající výrazy na pravé straně rovnice; po úpravě dostaneme

$$d_2 v_1 (v - v_2) = d_1 v_2 (v_1 - v),$$

odtud již snadno neznámou d_2 vyjádříme:

$$d_2 = \frac{d_1 v_2 (v_1 - v)}{v_1 (v - v_2)}$$

Poznámka. Umíte zdůvodnit, že ve vzorci pro d_2 je lomený výraz $\frac{d_1 v_2 (v_1 - v)}{v_1 (v - v_2)}$ vždy kladný? Je to poměrně jednoduché: protože v je průměrná rychlost, platí pro ni buď $v_1 > v > v_2$, nebo $v_2 > v > v_1$; v prvním případě je však $v_1 - v > 0$ a $v - v_2 > 0$, takže daný lomený výraz (protože je též $d_1 > 0$, $v_2 > 0$, $v_1 > 0$) je kladný, ve druhém případě je $v_1 - v < 0$ a $v - v_2 < 0$, což znamená, že daný lomený výraz je rovněž kladný.

Úlohy

8.16 Určete, jaký poloměr r musí mít koule, aby její objem byl roven V.

8.17 Ze vzorce pro povrch válce $S = 2\pi r(r + v)$ vyjádřete v.

8.18 Pro celkový odpor R dvou vodičů o odporech R_1, R_2 zapojených vedle sebe (paralelně) platí $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$. Vyjádřete z tohoto vzorce R.

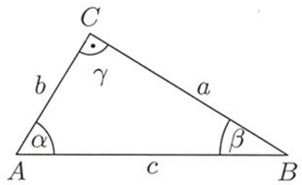
8.19 Ze vzorce pro povrch kvádru $S = 2(ab + ac + bc)$ vyjádřete a.

8.20 Ze vzorce $v = \frac{(d_1 + d_2)v_1 v_2}{d_1 v_2 + d_2 v_1}$ (viz příklad 3, článek 8.3) vyjádřete v_1.

9. PRAVOÚHLÝ TROJÚHELNÍK

9.1 Pythagorova a Thaletova věta

Připomeňme si nejprve, co víme o pravoúhlém trojúhelníku. **Přepona** je strana, která leží proti pravému úhlu; ze všech stran pravoúhlého trojúhelníku je nejdelší. Oba úhly přilehlé k přeponě jsou ostré, jejich součet je $90°$. **Odvěsny** jsou strany, které leží na ramenech pravého úhlu. V pravoúhlém trojúhelníku ABC se označení vrcholů obvykle volí podle obr. 9.1 tak, že pravý úhel je při vrcholu C.



Obr. 9.1

Znamená to, že strana $AB = c$ je přepona, strany $AC = b$, $BC = a$ jsou odvěsny; při tomto značení je úhel γ pravý, úhly α, β jsou ostré a platí pro ně: $\alpha + \beta = 90°$. Nejznámější pravoúhlý trojúhelník je trojúhelník, jehož strany mají délky 3, 4, 5.

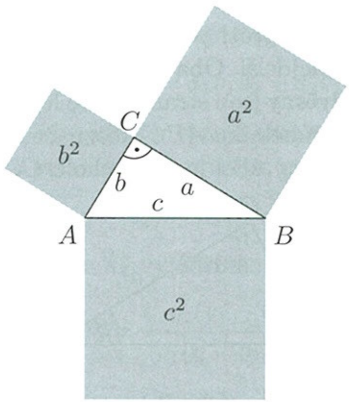
Pythagorova věta

V pravoúhlém trojúhelníku s odvěsnami a, b a s přeponou c platí:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Vzhledem k tomu, že mocniny a^2, b^2, c^2 udávají obsahy čtverců, jejichž strany jsou a, b, c, můžeme Pythagorovu větu vyslovit (a znázornit na obr. 9.2) takto:

V pravoúhlém trojúhelníku je součet obsahů čtverců nad odvěsnami roven obsahu čtverce nad přeponou.



Obr. 9.2

Poznámka. Pythagorova věta patří k nejstarším matematickým poznatkům. Má jméno po řeckém matematikovi a filozofovi, který žil v 6. století před Kristem, tj. před více než dvěma a půl tisíci léty. Pythagoras také zjistil, že délka úhlopříčky čtverce o straně jedna se nedá vyjádřit jako podíl přirozených čísel; objevil tak do té doby neznámá čísla, kterým dnes říkáme iracionální (např. $\sqrt{2}$).

Pythagorova věta umožňuje vypočítat z daných dvou stran pravoúhlého trojúhelníku stranu třetí:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad a = \sqrt{c^2 - b^2}, \quad b = \sqrt{c^2 - a^2}.$$

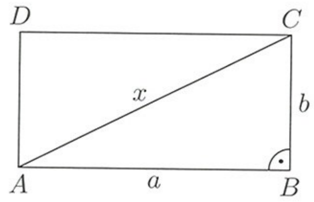
Příklad 1

Volejbalové hřiště je obdélník o stranách $a = 18\,\mathrm{m}$, $b = 9\,\mathrm{m}$. Určete délku úhlopříčky tohoto obdélníku.

Řešení

Hřiště je znázorněno na obr. 9.3 jako obdélník $ABCD$ o stranách a, b, hledaná délka jeho úhlopříčky je označena x. V pravoúhlém trojúhel-

níku ABC má odvěsna AB délku $a = 18\,\mathrm{m}$, odvěsna BC má délku $b = 9\,\mathrm{m}$, přepona AC má délku x metrů.



Obr. 9.3

Podle Pythagorovy věty platí:

$$x^2 = a^2 + b^2,$$
$$x = \sqrt{a^2 + b^2},$$
$$x = \sqrt{18^2 + 9^2}\,\mathrm{m} = \sqrt{405}\,\mathrm{m},$$

na kalkulačce určíme: $x = 20{,}124\,612\,\mathrm{m}$,

zaokrouhlíme na m: $x \doteq 20\,\mathrm{m}$.

Délka úhlopříčky obdélníkového hřiště je asi 20 m.

Příklad 2

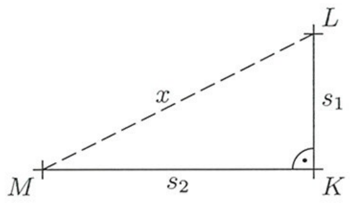
Z křižovatky kolmých silnic vyjeli ve stejném okamžiku dva cyklisté; cyklista A po jedné silnici rychlostí $20\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$, cyklista B po druhé silnici rychlostí $24\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. Určete jejich vzájemnou vzdálenost po třiceti minutách.

Řešení

Situace po třiceti minutách od výjezdu obou cyklistů z křižovatky K je znázorněna na obr. 9.4. Cyklista A je v bodě L, cyklista B je v bodě M, jejich vzájemná vzdálenost je $|LM| = x$.

Cyklista A ujede za 30 min dráhu

$$s_1 = 20 \cdot \frac{1}{2}\,\mathrm{km} = 10\,\mathrm{km};$$



Obr. 9.4

cyklista B ujede za 30 min dráhu

$$s_2 = 24 \cdot \frac{1}{2}\,\mathrm{km} = 12\,\mathrm{km}.$$

Jejich vzdálenost x (km) určíme z pravoúhlého trojúhelníku KML podle Pythagorovy věty:

$$x^2 = s_1^2 + s_2^2, \quad x = \sqrt{s_1^2 + s_2^2}.$$

Na kalkulačce určíme

$$x = \sqrt{10^2 + 12^2}\,\mathrm{km} = \sqrt{244}\,\mathrm{km} = 15{,}620\,499\,\mathrm{km}$$

a po zaokrouhlení na metry

$$x \doteq 15{,}620\,\mathrm{km}.$$

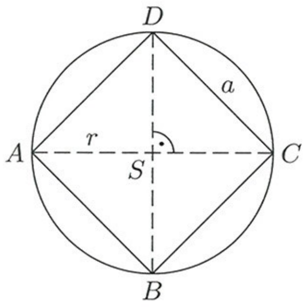
Vzdálenost obou cyklistů bude asi 15 km 620 m.

Příklad 3

Průměr kruhového řezu kmene je na nejužším místě 16 cm. Určete, zda se z tohoto kmene dá vytesat trámek, jehož průřez je čtverec o straně 10 cm.

Řešení

Na obr. 9.5 je zobrazen čtverec $ABCD$; je to čtverec o nejdelší straně, který se do kruhu o průměru 16 cm vejde. Jeho stranu a určíme z pravo-



Obr. 9.5

úhlého trojúhelníku SCD, jehož přepona CD je rovna straně a tohoto čtverce a jehož odvěsny SC, SD jsou poloměry daného kruhu:

$$|CD| = a, \quad |SC| = |SD| = r.$$

Podle Pythagorovy věty platí:

$$a^2 = r^2 + r^2,$$
$$a^2 = 2r^2$$

neboli

$$a = \sqrt{2r^2} = \sqrt{2 \cdot 8^2}\,\mathrm{cm} \doteq 11{,}3\,\mathrm{cm}.$$

Zjistili jsme, že strana čtvercového průřezu trámku, který je možno z daného kmene vyříznout, má délku nejvýše 11,3 cm. To znamená, že trámek, jehož průřez je čtverec o straně 10 cm, se z daného kmene vyrobit dá.

Obrácená věta k větě Pythagorově

Pythagorova věta říká, že v pravoúhlém trojúhelníku s odvěsnami a, b a přeponou c platí $a^2 + b^2 = c^2$.

Co když ale v nějakém trojúhelníku se stranami x, y, z platí $x^2 + y^2 = z^2$. Je tento trojúhelník pravoúhlý?

Jestliže v trojúhelníku se stranami x, y, z platí

$$x^2 + y^2 = z^2,$$

je pravoúhlý s pravým úhlem proti straně z.

Zapamatujte si: Jestliže v trojúhelníku se stranami $x \leqq y \leqq z$

a) **platí** $x^2 + y^2 = z^2$, pak **je** pravoúhlý;

b) **neplatí** $x^2 + y^2 = z^2$, pak **není** pravoúhlý.

Příklad 4

Rozhodněte, zda některý z trojúhelníků o stranách

a) 6 m, 9 m, 11 m, b) 5 m, 12 m, 13 m

je pravoúhlý.

Řešení

a) V trojúhelníku se stranami 6 m, 9 m, 11 m **neplatí** $6^2 + 9^2 = 11^2$, protože $6^2 + 9^2 = 117$ a $11^2 = 121$.
Daný trojúhelník proto není pravoúhlý.

b) V trojúhelníku se stranami 5 m, 12 m, 13 m **platí** $5^2 + 12^2 = 13^2$, protože $5^2 + 12^2 = 169$ a $13^2 = 169$.
Daný trojúhelník je proto pravoúhlý.

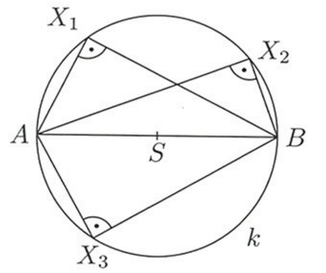
Thaletova věta

S Thaletovou větou jste se seznámili už na základní škole. Thales z Milétu, po němž je pojmenovaná, žil ve stejné době jako Pythagoras (6. stol. př. Kr.) a byl to vynikající matematik. Už tenkrát, dva tisíce let před Koperníkem, věděl, že Země má tvar koule a že obíhá kolem Slunce; na základě svých výpočtů předpověděl zatmění Slunce, ke kterému došlo v roce 585 př. Kr.

Traduje se také, že změřil výšku egyptských pyramid, a to porovnáním délky jejich stínu s délkou stínu tyče známé délky.

Na obr. 9.6 je dána kružnice k se středem S a průměrem AB, na které jsou libovolně zvoleny body X_1, X_2, X_3 tak, že každý je různý od

bodů A, B. Thaletova věta říká, že každý z úhlů AX_1B, AX_2B, AX_3B je pravý, tj. že má velikost $90°$.

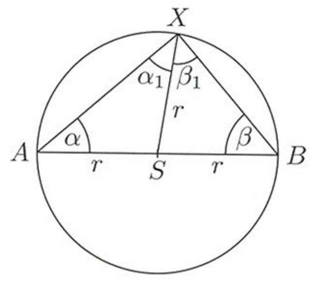


Obr. 9.6

Všechny úhly AXB, kde X je libovolný bod kružnice různý od koncových bodů A, B jejího průměru, jsou pravé.

Chcete vědět, proč tomu tak je?

Podívejte se na obr. 9.7. Je na něm bod X na kružnici k s průměrem AB a s vyznačenými úhly α, β u vrcholů A, B. Vidíme, že trojúhelník ASX je rovnoramenný (ramena AS, SX mají délku r), takže $\alpha = \alpha_1$. Také trojúhelník SBX je rovnoramenný (ramena SB, SX mají délku r), takže $\beta = \beta_1$. Úhel AXB je tedy roven: $\alpha_1 + \beta_1 = \alpha + \beta$.



Obr. 9.7

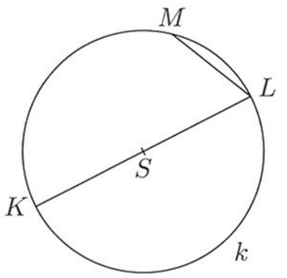
Součet úhlů v trojúhelníku ABX je proto:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + (\alpha + \beta) &= 180^\circ, \\ 2(\alpha + \beta) &= 180^\circ, \\ \alpha + \beta = \alpha_1 + \beta_1 &= 90^\circ. \end{aligned}$$

Zjistili jsme tak, že úhel AXB je vskutku pravý.

Příklad 5

V kružnici k se středem S a s poloměrem $r = 6\,\text{cm}$ jsou dány tětivy KL a LM podle obr. 9.8. Určete délku tětivy KM, víte-li, že tětiva LM má délku 5 cm.



Obr. 9.8

Řešení

Protože tětiva KL je průměr kružnice k, je podle Thaletovy věty úhel KML pravý. Trojúhelník KML je tedy pravoúhlý, takže podle Pythagorovy věty platí

$$|KL|^2 = |KM|^2 + |LM|^2, \quad |KM|^2 = |KL|^2 - |LM|^2,$$
$$|KM| = \sqrt{|KL|^2 - |LM|^2}.$$

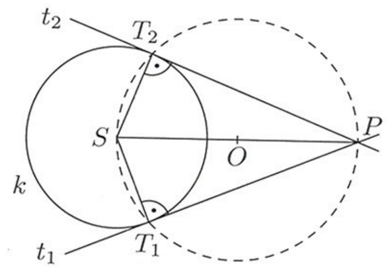
Po dosazení určíme délku tětivy KM:

$$|KM| = \sqrt{144 - 25}\,\text{cm} = \sqrt{119}\,\text{cm} \doteq 10{,}9\,\text{cm}.$$

Délka tětivy KM je asi 10,9 cm.

Thaletova věta a tečna ke kružnici

Na obr. 9.9 je dána kružnice k se středem S a vně této kružnice bod P; naším úkolem je sestrojit na této kružnici dotykové body T_1, T_2 tečen vedených z bodu P.



Obr. 9.9

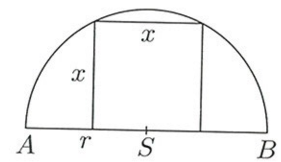
Protože tečna PT_1 je kolmá na poloměr ST_1 a tečna PT_2 na poloměr ST_2, jsou úhly PT_1S a PT_2S pravé a podle Thaletovy věty leží na kružnici s průměrem SP. Body T_1, T_2 jsou tedy průsečíky kružnice k a kružnice o průměru SP. Tečny ke kružnici k z bodu P jsou přímky PT_1 a PT_2.

Úlohy

9.1 Vypočtěte:
a) úhlopříčku čtverce o straně $a = 10\,\text{m}$,
b) výšku rovnostranného trojúhelníku o straně $a = 8\,\text{dm}$.

9.2 Určete poloměr kružnice, která je opsána čtverci o straně $a = 5\,\text{cm}$. (Načrtněte si obrázek.)

9.3 Z polokruhovité desky má být podle obr. 9.10 vyříznut čtverec. Určete velikost x jeho strany, je-li poloměr desky $r = 10\,\text{cm}$.



Obr. 9.10

9.4 Dvě síly o velikostech 100 N a 80 N mají společné působiště a jsou k sobě kolmé. Vypočtěte velikost jejich výslednice.

9.5 Určete délku strany kosočtverce, jehož úhlopříčky mají délky 16 cm a 12 cm. (Úhlopříčky kosočtverce jsou k sobě kolmé a půlí se.)

9.6 Určete, zda jsou trojúhelníky pravoúhlé, jestliže mají strany o délkách

a) 7, 9, 11, b) 6, 8, 10, c) 1, $\sqrt{8}$, 3.

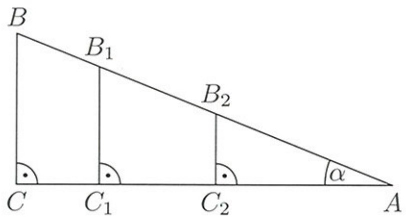
9.7 Sestrojte na kružnici s poloměrem $r = 2{,}5$ cm body T_1, T_2 dotyku tečen vedených k této kružnici z bodu P, který má od středu S kružnice vzdálenost $d = 6$ cm. Vypočtěte délky úseček PT_1, PT_2.

9.2 Trigonometrie pravoúhlého trojúhelníku

Trigonometrie je jednou z nejstarších věd; její počátky sahají do doby egyptských faraonů a souvisely s vyměřováním pozemků po každoročních záplavách, s určováním polohy na moři a také s astronomickými pozorováními. Zabývá se vztahy mezi stranami a úhly trojúhelníku, což naznačuje i její název, který je řeckého původu a znamená „měření trojúhelníku".

V následujícím textu se omezíme na trojúhelník pravoúhlý.

Prohlédněte si trojúhelníky BCA, B_1C_1A a B_2C_2A na obr. 9.11.

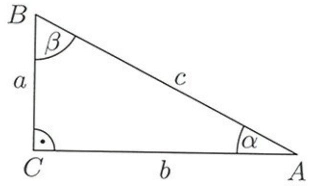


Obr. 9.11

Všechny jsou pravoúhlé a mají společný úhel α. Jsou proto podle věty *uu* podobné a o podobných trojúhelnících víme, že mají **odpovídající si strany ve stejném poměru**. Platí např.:

$$\frac{|BC|}{|CA|} = \frac{|B_1C_1|}{|C_1A|} = \frac{|B_2C_2|}{|C_2A|}, \quad \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|AC_1|}{|AB_1|} = \frac{|AC_2|}{|AB_2|}.$$

Tyto poměry jsou ve všech podobných pravoúhlých trojúhelnících stejné, takže nezáleží na tom, ve kterém z nich tyto poměry utvoříme.



Obr. 9.12

V pravoúhlém trojúhelníku ABC s obvyklým označením podle obr. 9.12 se zavádějí tyto poměry a jejich názvy:

Poměr délek odvěsny protilehlé k úhlu α a přepony se nazývá sinus úhlu α:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}.$$

Poměr délek odvěsny přilehlé k úhlu α a přepony se nazývá kosinus úhlu α:

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

Poměr délek odvěsny protilehlé a odvěsny přilehlé k úhlu α se nazývá tangens úhlu α:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$$

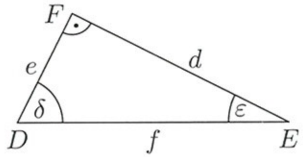
Poměr délek odvěsny přilehlé a odvěsny protilehlé k úhlu α se nazývá kotangens úhlu α:

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{b}{a}.$$

Zapamatujte si: Sinus je poměr délek protilehlé odvěsny ku přeponě. Kosinus je poměr délek přilehlé odvěsny ku přeponě. Tangens je poměr délek protilehlé odvěsny ku přilehlé. Kotangens je poměr délek přilehlé odvěsny ku protilehlé.

Příklad 1

Zapište, čemu je roven sinus, kosinus, tangens a kotangens úhlů δ a ε v pravoúhlém trojúhelníku DEF na obr. 9.13.



Obr. 9.13

Řešení

V daném trojúhelníku DEF je $|DE| = f$ přepona, odvěsna přilehlá k úhlu δ je strana $|DF| = e$, odvěsna protilehlá k úhlu δ je strana $|FE| = d$, takže platí:

$$\sin\delta = \frac{d}{f},\quad \cos\delta = \frac{e}{f},\quad \operatorname{tg}\delta = \frac{d}{e},\quad \operatorname{cotg}\delta = \frac{e}{d}.$$

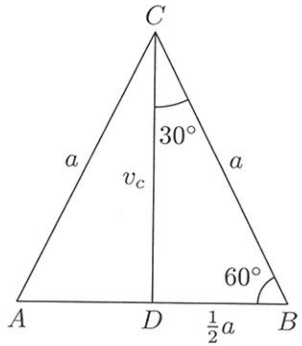
V tomtéž trojúhelníku DEF odvěsna přilehlá k úhlu ε je strana $|FE| = d$, odvěsna protilehlá k úhlu ε je strana $|DF| = e$, takže platí:

$$\sin\varepsilon = \frac{e}{f},\quad \cos\varepsilon = \frac{d}{f},\quad \operatorname{tg}\varepsilon = \frac{e}{d},\quad \operatorname{cotg}\varepsilon = \frac{d}{e}.$$

Protože každý z uvedených poměrů závisí na velikosti příslušného ostrého úhlu, nemluvíme o poměrech, ale o funkcích sinus, kosinus, tangens a kotangens. Tyto funkce se souhrnně nazývají **funkce goniometrické**.

Příklad 2

Vypočtěte hodnoty funkcí sinus a kosinus pro úhly 30°, 45°, 60° a hodnoty funkcí tangens a kotangens pro 45°.



Obr. 9.14

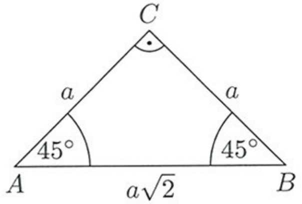
Řešení

Určíme nejprve sinus a kosinus pro 30° a 60°, a to z rovnostranného trojúhelníku ABC o straně a a výšce $v_c = |CD|$ na obr. 9.14. Trojúhelník DBC je pravoúhlý, jeho ostré úhly jsou 30° a 60°, přepona $|BC| = a$, odvěsna $|BD| = \frac{1}{2}a$; délku CD zbývající odvěsny určíme podle Pythagorovy věty:

$$|CD|^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4},$$
$$|CD| = \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \sqrt{3}\cdot\sqrt{\frac{a^2}{4}} = \sqrt{3}\cdot\frac{a}{2} = \frac{a}{2}\sqrt{3}.$$

Pro hodnoty goniometrických funkcí úhlů 30° a 60° tak z tohoto trojúhelníku DBC (sledujte obr. 9.14) dostaneme:

$$\sin 30^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2},\qquad \cos 30^\circ = \frac{v_c}{a} = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{3}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$\sin 60^\circ = \frac{v_c}{a} = \cos 30^\circ,\qquad \cos 60^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \sin 30^\circ.$$



Obr. 9.15

Hodnoty těchto funkcí pro úhel 45° určíme z pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku ABC na obr. 9.15; jeho ramena mají délku a, podle Pythagorovy věty má jeho přepona AB délku $a\sqrt{2}$:

$$\sin 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \cos 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \sin 45^\circ.$$

Z tohoto trojúhelníku určíme snadno i tg 45° a cotg 45°:

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{a}{a} = 1, \qquad \operatorname{cotg} 45^\circ = \frac{a}{a} = 1 = \operatorname{tg} 45^\circ.$$

Výsledky získané v tomto příkladu shrneme:

$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \qquad \sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{cotg} 45^\circ = 1.$$

Úlohy

9.8 Vypočítejte délky zbývajících stran a velikosti ostrých úhlů v pravoúhlém trojúhelníku ABC s pravým úhlem při vrcholu C, je-li dáno:

a) $c = 52{,}8\,\mathrm{cm}$, $\alpha = 64^\circ 38'$,

b) $b = 0{,}24\,\mathrm{m}$, $\beta = 38^\circ 20'$,

c) $a = 8{,}7\,\mathrm{m}$, $\beta = 54^\circ 42'$,

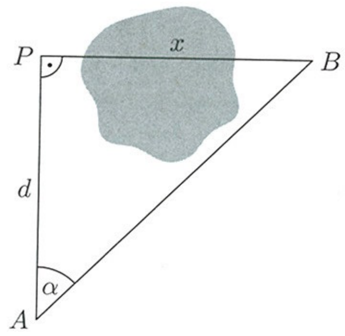
d) $a = 10{,}2\,\mathrm{m}$, $b = 6{,}8\,\mathrm{m}$.

9.9 V rovnoramenném trojúhelníku ABC se základnou $|AB| = 15\,\mathrm{cm}$ má úhel α při vrcholu A velikost $65^\circ 25'$. Určete délku jeho ramen.

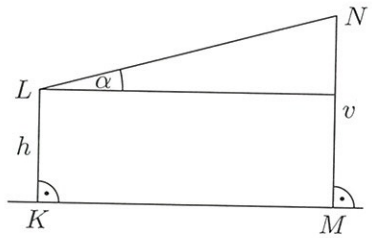
9.10 V rovnoramenném lichoběžníku $ABCD$ jsou dány jeho základny $|AB| = 20\,\mathrm{cm}$, $|CD| = 12\,\mathrm{cm}$ a ramena $|AD| = |BC| = 8\,\mathrm{cm}$. Určete jeho výšku a úhel α při vrcholu A.

9.11 Dvě síly o velikostech 50 N a 10 N mají stejné působiště a jsou k sobě kolmé. Určete velikost jejich výslednice a úhel α, který výslednice svírá s větší silou.

9.12 Vzdálenost x bodu P od bodu B, který je na druhém břehu rybníku, se dá určit podle obr. 9.16 tak, že se změří vzdálenost $d = |AP|$ a úhel α. Vypočtěte tuto vzdálenost nejprve obecně a pak pro hodnoty $d = 100\,\mathrm{m}$, $\alpha = 48^\circ$.



Obr. 9.16



Obr. 9.17

9.13 Úsečka LN na obr. 9.17 představuje lano napjaté mezi vrcholy stožárů KL a MN. Určete jeho délku, je-li $|KL| = h = 10\,\mathrm{m}$, $|MN| = v = 17\,\mathrm{m}$, $\alpha = 15^\circ$.

9.14 Lanová dráha je dlouhá 920 m a její přímá trať stoupá pod úhlem 36°. Určete vodorovnou vzdálenost mezi dolní a horní stanicí a jejich výškový rozdíl.

9.15 Určete, pod jakým úhlem stoupá železniční trať, je-li stoupání trati 8,5 ‰.

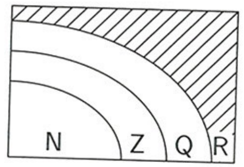
9.16 Vypočtěte velikost úhlu, který svírají tečny vedené z bodu P ke kružnici se středem S a s poloměrem $r = 5\,\text{cm}$, je-li $|PS| = 10\,\text{cm}$.

9.17 V kosočtverci $ABCD$ je $|DB| = 4\,\text{cm}$, $|AC| = 6\,\text{cm}$. Určete velikosti jeho vnitřních úhlů.

VÝSLEDKY ÚLOH

2. Číselné obory

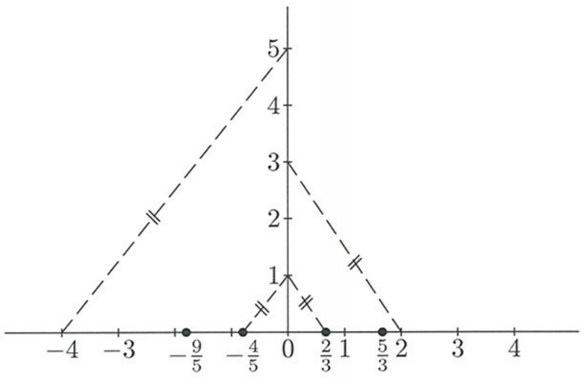
2.2 Např. 0, -1, -7, -100. **2.3** Je, protože $\mathsf{N} \subset \mathsf{Z}$. **2.4** Není, např. číslo -1 je celé a není přirozené. **2.5** Obr. V2.1 — vyšrafovaná část.



Obr. V2.1

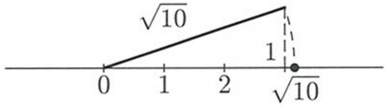
2.6 $a > b$. **2.7** a) $(28 + 22) + (33 + 7) = 50 + 40 = 90$; b) $(31 + 49) + (16 + 64) = 80 + 80 = 160$; c) $(5 \cdot 2) \cdot 327 = 10 \cdot 327 = 3\,270$; d) $(4 \cdot 25) \cdot 129 = 100 \cdot 129 = 12\,900$. **2.8** a) $658(3+7) = 658 \cdot 10 = 6\,580$; b) $10^3(2 + 3) = 5 \cdot 10^3 = 5\,000$; c) $2 \cdot 10^3 + 30 \cdot 10^3 = (2 + 30) \cdot 10^3 = 32 \cdot 10^3 = 32\,000$. **2.9** a) -5; b) 13; c) 0; d) 20; e) 32; f) 5. **2.10** a) -21; b) -15; c) 9; d) -40; e) 52; f) 11; g) -36; h) 56; i) -24. **2.11** a) 11; b) 6; c) -25; d) -25; e) 16; f) -4; g) -250; h) -314. **2.12** a) $-6 < -3 < 3 < 6$; b) $-10 < -3 < 0 < 2 < 7$. **2.13** Neplatí. **2.14** Není. **2.15** Není. **2.16** a) $\frac{5}{7}$; b) $-\frac{3}{4}$; c) $\frac{4}{3}$; d) $-\frac{3}{5}$. **2.17** a) $\frac{2}{5}$; b) $\frac{5}{8}$; c) $\frac{4}{625}$; d) $\frac{1}{32}$. **2.18** Dvě čísla: $\frac{3}{8}$ a $\frac{5}{4}$. **2.19** a) $-\frac{4}{7} < \frac{41}{72} < \frac{7}{12}$; b) $-\frac{2}{3} < 0 < \frac{5}{8} < \frac{9}{14}$; c) $\frac{34}{98} < \frac{64}{180} < \frac{5}{14}$; d) $-\frac{3}{16} < -\frac{2}{11} < \frac{6}{23} < \frac{5}{18}$. **2.20** a) $\frac{12}{5} > 2{,}\bar{3} > 2{,}3 > 2\frac{1}{4}$; b) $-\frac{13}{5} > -2{,}\bar{6} > -2{,}7 > -2\frac{3}{4}$; c) $0{,}6 > \frac{4}{7} > -\frac{4}{7} > -0{,}6$; d) $0{,}7 > \frac{2}{3} > -0{,}\bar{6} > -\frac{7}{10}$. **2.21** a) 0,25;

b) $-0{,}2$; c) $-0{,}6$; d) $2{,}5$. **2.22** a) 2; b) $-\frac{1}{2}$; c) $\frac{1}{24}$; d) $\frac{25}{18}$. **2.23** a) $\frac{1}{3}$; b) $\frac{1}{3}$; c) $-\frac{1}{5}$; d) $-\frac{25}{9}$. **2.24** Na obr. V2.2 je znázorněna konstrukce



Obr. V2.2

obrazu čísel $\frac{2}{3}$ a $-\frac{4}{5}$. Číslo $\frac{5}{3}$ zapíšeme ve tvaru $1\frac{2}{3}$; úsečku délky $\frac{2}{3}$, kterou jsme již sestrojili, naneseme na číselnou osu od obrazu čísla 1 vpravo. Podobně postupujeme při znázornění čísla $-\frac{9}{5}$. **2.25** První, třetí, čtvrté, druhé, páté. **2.26** π, $\sqrt{10}$. **2.27** Obr. V2.3. **2.28** Existuje



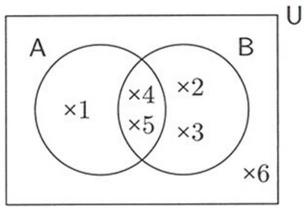
Obr. V2.3

ke každému reálnému číslu s výjimkou nuly; $\frac{1}{5}$; $-\frac{1}{3}$; $\frac{5}{3}$; 1; neexistuje; $-\frac{1}{\sqrt{5}}$; $\sqrt{2}$; $\frac{10}{3}$; 3. **2.29** Kladná jsou ab, $d-c$, $c(a+b)$, $c(a-b)$, a^2+b^2,

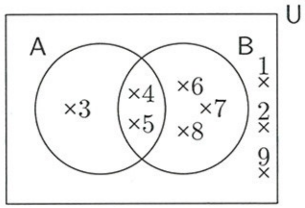
a^2-b^2; záporná jsou $a+b$, ad, $a-b$, $c-d$, $\frac{a+b}{d}$. **2.30** a) 27,0; 0,023 5; 0,530; 2,24; 3,14; 8 650; b) 27; 0,023; 0,53; 2,2; 3,1; 8 700. **2.31** a) 36; 1,4; 0,032; 0,007 0; b) 35,63; 1,41; 0,03; 0,01. **2.32** a) $1+\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{2}$; b) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{5}}+\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} > 1+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$. **2.33** a) 7; b) 50; c) 800; d) 0,9; e) 0,2; f) 0,03. **2.34** a) Platí, $0^2=0$ a 0 je nezáporné číslo; b) neplatí, druhá odmocnina je definována pouze z nezáporného čísla; c) a d) neplatí, druhá odmocnina je vždy nezáporné číslo; e) platí, $5^2=5^2$ a 5 i 5^2 jsou nezáporná čísla; f) platí, $5^2=(-5)^2$ a 5 i $(-5)^2$ jsou nezáporná čísla. **2.35** Pro každé $a \geqq 0$ platí $\sqrt{a^2}=a$, pro každé $a<0$ platí $\sqrt{a^2}=-a$. **2.36** a) 3; b) 10; c) 50; d) 1; e) 0,2; f) 0,4. **2.37** a) Platí, $0^3=0$ a 0 je nezáporné číslo; b) neplatí, třetí odmocnina je nezáporné číslo; c) a d) neplatí, třetí odmocnina je definována z nezáporného čísla; e) neplatí, třetí odmocnina je nezáporné číslo; f) platí, $5^3=5^3$ a 5 i 5^3 jsou nezáporná čísla. **2.38** a) Platí $0^3=0$; b) neplatí, $(-2)^3 \neq 8$; c) neplatí, $1^3 \neq -1$; d) platí, $(-5)^3=(-5)^3$; e) neplatí, $(-5)^3 \neq 5^3$; f) platí, $5^3=5^3$. **2.39** a) 2,24; 5,39; 17,72; 79,09; 268,40; 759,00; b) 0,69; 0,89; 1,81; 5,97; 17,67; 81,88. **2.40** a) 1,913; 4,217; 8,653; 16,441; 42,326; 66,953; b) 0,908; 0,630; 2,021; 3,126; 8,555; 12,500. **2.41** a) 9; b) 5; c) 1,5; d) 4; e) 3; f) 1,2. **2.42** a) $2\sqrt{2}$; b) $5\sqrt{3}$; c) $25\sqrt{3}$; d) $3\sqrt[3]{3}$; e) $5\sqrt[3]{2}$; f) $10\sqrt[3]{4}$. **2.43** a) $4\sqrt{3}$; b) $\sqrt{2}-1$; c) $3+\sqrt{3}$; d) $5-2\sqrt{6}$; e) $\frac{2}{3}\sqrt[3]{9}$; f) $2\sqrt[3]{12}$. **2.44** a) 6; b) 0; c) 7; d) -8; e) -3; f) 6; g) 17; h) 7. **2.45** a) -5; 5; b) 0; c) taková čísla neexistují; d) úsečka s krajními body -4 a 4; e) úsečka určená body -3 a 3 bez těchto krajních bodů; f) všechna reálná čísla s výjimkou čísel ležících mezi čísly -1 a 1 (dvě polopřímky); g) taková čísla neexistují; h) všechna reálná čísla s výjimkou nuly. **2.46** a) -3; 7; b) -9; 3; c) úsečka s krajními body 1 a 2; d) všechna reálná čísla s výjimkou čísel $-1-\sqrt{2}$, $-1+\sqrt{2}$ a všech čísel ležících mezi těmito čísly; e) úsečka určená body $\sqrt{3}-2$ a $\sqrt{3}+2$ s výjimkou těchto krajních bodů; f) všechna reálná čísla s výjimkou $-\pi$; g) taková čísla neexistují; h) všechna reálná čísla.

3. Množiny

3.1 a) $\emptyset$, $\{2\}$, $\{7\}$, $\{2,7\}$; b) $\emptyset$, $\{5\}$, $\{7\}$, $\{9\}$, $\{5,7\}$, $\{5,9\}$, $\{7,9\}$, $\{5,7,9\}$; c) $\emptyset$; d) $\emptyset$, $\{0\}$. **3.2** a) $\emptyset$, $\{1\}$; b) $\emptyset$, $\{-3\}$, $\{0\}$, $\{1\}$, $\{-3,0\}$, $\{-3,1\}$, $\{0,1\}$, $\{-3,0,1\}$; c) $\emptyset$, $\{0\}$, $\{0,5\}$, $\{0;0{,}5\}$. **3.3** $\{x \in \mathsf{Z};\ x > 0\} = \mathsf{N}$; $\{x \in \mathsf{R};\ |x| \leqq 0\} = \{0\}$, $\{x \in \mathsf{N};\ |x-2| < 2\} = \{1,2,3\}$, $\{x \in \mathsf{R};\ \sqrt[3]{x^3} = x\} = \{x \in \mathsf{R};\ x \geqq 0\}$. **3.4** a) $\mathsf{B}'_{\mathsf{A}} = \{-2;1\}$; b) $\mathsf{B}'_{\mathsf{A}} = \mathsf{N}$; c) $\mathsf{B}'_{\mathsf{A}} = \{6\}$; d) $\mathsf{B}'_{\mathsf{A}} = \{1,2\}$; e) $\mathsf{B}'_{\mathsf{A}} = \{-2,-1,0,1,2\}$; f) $\mathsf{B}'_{\mathsf{A}} = \{x \in \mathsf{R};\ x > 0\} = \mathsf{R}^+$; g) $\mathsf{B}'_{\mathsf{A}} = \mathsf{R}$; h) $\mathsf{B}'_{\mathsf{A}} = \emptyset$. **3.5** a) $\mathsf{A} \cap \mathsf{B} = \{0,7\}$, $\mathsf{A} \cup \mathsf{B} = \{-3,-2,-1,0,4,5,7,9\}$; b) $\mathsf{A} \cap \mathsf{B} = \{x \in \mathsf{Z};\ x < -5\}$; $\mathsf{A} \cup \mathsf{B} = \{x \in \mathsf{Z};\ x \leqq -1\}$; c) $\mathsf{A} \cap \mathsf{B} = \{1,2\}$, $\mathsf{A} \cup \mathsf{B} = \{x \in \mathsf{Z};\ x > -3\}$; d) $\mathsf{A} \cap \mathsf{B} = \emptyset$, $\mathsf{A} \cup \mathsf{B} = \mathsf{Z}$. **3.6** a) $\mathsf{A} \subset \mathsf{B}$; b) $\mathsf{B} \subset \mathsf{A}$; c) $\mathsf{B} = \emptyset$; d) $\mathsf{B} = \mathsf{A}$; e) $\mathsf{A} = \mathsf{B}$. **3.7** a) $\{3\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$, $\{1,2,3\}$; b) $\{1,2\}$; c) X neexistuje. **3.8** a) $\{1\}$, $\{1,3\}$, $\{1,4\}$, $\{1,3,4\}$; b) $\{1,3\}$, $\{1,2,3\}$, $\{1,3,4\}$, $\{1,2,3,4\}$; c) $\emptyset$, $\{1\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{1,3\}$, $\{1,4\}$, $\{3,4\}$, $\{1,3,4\}$; d) X neexistuje. **3.9** a) $\mathsf{A} \setminus \mathsf{B} = \{-3,5\}$, $\mathsf{B} \setminus \mathsf{A} = \{1\}$; b) $\mathsf{A} \setminus \mathsf{B} = \{-7,-6,-5,-4,-3,-2\}$, $\mathsf{B} \setminus \mathsf{A} = \emptyset$; c) $\mathsf{A} \setminus \mathsf{B} = \mathsf{Z}_0^-$, $\mathsf{B} \setminus \mathsf{A} = \emptyset$; d) $\mathsf{A} \setminus \mathsf{B} = \{x \in \mathsf{N};\ x > 2\}$, $\mathsf{B} \setminus \mathsf{A} = \{-2,-1,0\}$; e) $\mathsf{A} \setminus \mathsf{B} = \{x \in \mathsf{Z};\ x < -1\}$, $\mathsf{B} \setminus \mathsf{A} = \{0,1,2,3\}$. **3.10** a) $\mathsf{A} \subset \mathsf{B}$; b) $\mathsf{B} \subset \mathsf{A}$; c) $\mathsf{A} = \mathsf{B}$. **3.11** a) II; b) I, II, III; c) I; d) II, III, IV; e) IV; f) I, III, IV. **3.12** a) V; b) II; c) I; d) IV, V, VI; e) II, IV, V, VI, VII; f) VIII; g) I, II, IV, V, VI; h) II, IV, V; i) I, II, III. **3.13** a) Obr. V3.1; b) obr. V3.2.

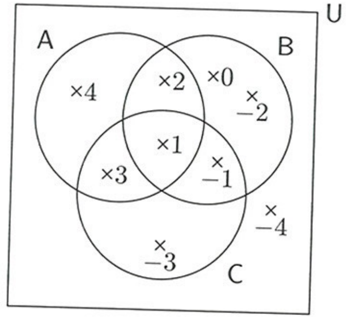


Obr. V3.1



Obr. V3.2

3.14 Obr. V3.3. **3.15** a) Platí; b) platí; c) neplatí; d) platí. **3.16** a) 240; b) 140. **3.17** a) 210; b) 170. **3.18** a) 27; b) 34. **3.19** a) 4; b) 11; c) 11; d) 0. **3.20** a) 50; b) 255. **3.21** a) $\langle -2,3\rangle$; b) $(-7,-1\rangle$; c) $\langle 5;9)$; d) $(-1,0)$; e) $(3,+\infty)$; f) $(-\infty,-2\rangle$. **3.22** a) $(-\infty,+\infty)$; b) $(-\infty,0)$; c) $\langle 0,+\infty)$; d) $(-7,+\infty)$; e) $(-\infty,1\rangle$. **3.23** a) Není; b) není; c) ne-



Obr. V3.3

ní; d) $(-\infty,+\infty)$; e) $\langle 3,+\infty)$; f) není; g) není; h) $\langle 1,2)$; i) není. **3.24** a) $\langle -1,1\rangle$; b) není; c) $(-3,3)$; d) $(-\infty,+\infty)$; e) $\langle -3,7\rangle$; f) $(-7,3)$. **3.25** a) $\langle -2,3\rangle$, $\langle 0,1\rangle$; b) $\langle -2,5)$, $\emptyset$; c) $(-3,-1) \cup (-1,4\rangle$, $\emptyset$; d) $\langle -4,2)$, $\{0\}$; e) $(1,+\infty)$, $\langle 3,+\infty)$; f) $(-\infty,+\infty)$, $\langle -2,-1)$; g) $\langle 3,5\rangle$, $(3,5)$; h) $(-\infty,+\infty)$, $\{2\}$.

4. Základní poučení o výrocích

4.1 Pravdivé jsou u_1, u_2, u_3, zbývající jsou nepravdivé. Jejich negace jsou: Číslo 5 je záporné. $\sqrt{5} \leqq 2$. Číslo $6 - 9$ je kladné. $5 - 8 < 4 - 6$. $\sqrt{49} = 7$. **4.2** Negace jsou výroky: Česká republika má nejvýše 10 milionů obyvatel. Praha má aspoň 1,5 milionů obyvatel. Poloměr Země je menší než 6 000 km. Vzdálenost Měsíce od Země je větší než 400 000 km. Rychlost světla ve vakuu není 300 000 km·h^{-1}. **4.3** Negace jsou výroky: Na Petřínskou rozhlednu vede nejvýše 299 schodů. Tato učebnice má aspoň 201 stránek. Pravidelný dvacetiúhelník má nejvýše 99 úhlopříček. Prvočísel menších než 100 je aspoň 26. Dvojciferných čísel není 90. **4.4** Pravdivé jsou u_1, u_3, u_4, zbývající jsou nepravdivé. **4.5** Žádný. **4.6** Pravdivé jsou $u_1 \wedge u_2$, $u_1 \vee u_2$, $u_1 \vee u_4$, zbývající jsou nepravdivé. **4.7** Jde o konjunkci a disjunkci pravdivého a nepravdivého výroku.

4.8 Pravdivé jsou $(a \vee b) \wedge c$, $(a \wedge b) \vee c$, $(a \wedge c) \vee b$, zbývající je nepravdivý.

4.9

a	$\neg a$	$a \vee a$	$a \wedge a$	$\neg a \wedge a$	$\neg a \vee a$	$\neg a \wedge \neg a$	$\neg a \vee \neg a$
1	0	1	1	0	1	0	0
0	1	0	0	0	1	1	1

4.10

a	b	$\neg a$	$\neg a \wedge b$	$\neg a \vee b$	$(\neg a \wedge b) \vee a$	$(\neg a \wedge b) \vee b$	$(\neg a \vee b) \vee b$
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	0	0	1

4.11 Všechny tři implikace jsou pravdivé. **4.12** Pravdivý je pouze výrok $a \Rightarrow b$. **4.13** Tautologie je pouze druhá ekvivalence.

4.14

a	b	$a \wedge b$	$a \vee b$	$a \Rightarrow (a \wedge b)$	$(a \wedge b) \Rightarrow b$	$(a \wedge b) \Rightarrow (a \vee b)$
1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	0	0	0	1	1	1

4.15

a	b	$a \wedge b$	$a \vee b$	$a \iff (a \wedge b)$	$a \iff (a \vee b)$	$(a \vee b) \iff (a \wedge b)$
1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	1	0	0
0	0	0	0	1	1	1

4.16 u: Bod B neleží na kružnici k ani na přímce p. v: Poslední cifra dekadického zápisu čísla 37^7 je nula nebo pětka. w: Ciferný součet čísla 37^7 je dělitelný třemi a číslo 37^7 není dělitelné třemi. **4.17** Nepřišel jsem nebo jsem neviděl nebo jsem nezvítězil. Nebude pršet a zmokneme. Já to zaplatím nebo se nedám na vojnu. Každý z nás bude z křemene a celý národ nebude z kvádrů. **4.18** $\neg a \wedge b$, $a \wedge b$, $\neg a \iff b$ (nebo $a \iff \neg b$), $a \vee \neg b$, $\neg a \wedge \neg b$, $a \vee b$, $a \wedge b$ **4.19** $(a \wedge b) \wedge \neg c$, $a \wedge (\neg b \wedge \neg c)$, $(a \wedge c) \iff \neg b$, $a \iff (b \wedge \neg c)$ **4.20** Tautologie jsou pouze první dvě ekvivalence. **4.21** Pravdivý je pouze výrok b. Negace daných výroků: Existuje aspoň jeden čtyřúhelník, jehož úhlopříčky nejsou navzájem kolmé. Existuje aspoň jedno celé číslo, které není racionální. V každém trojúhelníku je součet všech jeho vnitřních úhlů roven 180°. Součin každého reálného čísla a nuly je roven nule. **4.22** Aspoň jedna věc pod sluncem je nová. Aspoň jeden koláč je bez práce. Aspoň jeden učený spadl z nebe. Aspoň jeden člověk, který kopá jámu jinému, do ní nespadne. **4.23** Aspoň jedna kočka není černá. **4.24** $\neg a$: Pro každé reálné číslo x platí $\sqrt{x^2} \neq x$. $\neg b$: Existuje aspoň jedno reálné číslo $x > 1$, pro něž platí $\sqrt{x^2} \leqq x$. $\neg c$: Existuje aspoň jedno přirozené číslo, které je dělitelné deseti a není dělitelné pěti. $\neg d$: Existuje aspoň jedno přirozené číslo menší než -10.

4.25 $\neg a$: Každé přirozené číslo je sudé nebo liché. $\neg b$: Existují aspoň dvě přímky v rovině, které nejsou rovnoběžné. $\neg c$: V každém trojúhelníku se všechny jeho výšky protínají v jediném bodě. $\neg d$: Existuje aspoň jedna dvojice celých čísel, jejichž součet je roven nule. **4.26** Označme S střed úsečky AB. Leží-li bod X na ose úsečky AB, platí $|XA| = |XB|$, neboť pro $X \neq S$ jsou trojúhelníky AXS a BXS shodné a pro $X = S$ platí také $|SA| = |SB|$. Jestliže pro bod X platí $|XA| = |XB|$, pak $X = S$ nebo vznikne rovnoramenný trojúhelník ABX; v obou případech leží bod X na ose úsečky AB. **4.27** V pravoúhlém trojúhelníku ABC prodloužíme úsečku CA za bod A o délku a, dostaneme bod X; úsečku CB prodloužíme za bod B o délku b, dostaneme bod Y. Sestrojíme čtverec $CXZY$ a uvnitř jeho strany XZ bod A_1, uvnitř strany YZ bod B_1 tak, že platí: $|XA_1| = b$, $|YB_1| = a$. Ukážeme, že čtyřúhelník AA_1B_1B je čtverec o straně délky c. Obsah čtverce $CXZY$ je jednak $(a+b)^2$, jednak $4 \cdot \frac{1}{2}ab + c^2$. Odtud plyne: $a^2 + b^2 = c^2$. **4.28** Sporem. Z předpokladu, že přímka p má s kružnicí k další společný bod X, plyne, že trojúhelník SAX je rovnoramenný se základnou AX, takže úhel AXS je pravý. V trojúhelníku AXS jsou tedy dva pravé úhly, což není možné. **4.29** Nepřímý důkaz. Není-li číslo n dělitelné třemi, pak buď $n = 3k+1$, nebo $n = 3k+2$. Umocněním se přesvědčíme, že žádné z čísel $(3k+1)^2$, $(3k+2)^2$ není třemi dělitelné. **4.30** Z předpokladu $3 + \sqrt{2} \leqq \sqrt{19}$ plyne postupně: $(3+\sqrt{2})^2 \leqq 19$, $9 + 6\sqrt{2} + 2 \leqq 19$, $6\sqrt{2} \leqq 8$, $72 \leqq 64$.

5. Elementární teorie čísel

5.1 a) $3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10 + 7$; b) $6 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10 + 5$; c) $7 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10 + 8$. **5.2** a) $\frac{5}{7}$; b) $\frac{13}{47}$; c) $\frac{11}{23}$; d) $\frac{2}{5}$; e) $\frac{3}{13}$; f) $\frac{2}{7}$; g) $\frac{5}{9}$; h) $\frac{19}{41}$. **5.3** a) $11 = 3 \cdot 3 + 2$; b) $29 = 4 \cdot 7 + 1$; c) $105 = 7 \cdot 15$; d) $75 = 12 \cdot 6 + 3$. **5.4** a) $6k$; b) $3k+2$; c) $2k+1$; d) $8k+4$. **5.5** a) Libovolné přirozené číslo, které při dělení třemi dá zbytek 1. Tři čísla získáme např. dosazením $k = 0, 1, 2$. Jsou to čísla 1, 4, 7. Podobně postupujeme v úlohách b), c). **5.6** $6k$, $6k+1$, $6k+2$, $6k+3$, $6k+4$, $6k+5$, kde $k \in \mathsf{N}_0$. **5.7** a) $6k$, $6k+2$, $6k+4$; b) $6k$, $6k+3$. **5.8** Aspoň jeden činitel uvedeného součinu je dělitelný dvěma, aspoň jeden další činitel je dělitelný čtyřmi, aspoň jeden činitel je dělitelný třemi, a aspoň jeden činitel je dělitelný pěti. Součin pěti libovolných za sebou následujících přirozených čísel je proto dělitelný součinem $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$, tj. číslem 120. **5.9** Návod. Postupujte obdobně jako v příkladu 3. **5.10** $100x+10y+z-z-2y-4x = 96x+8y = 8(12x+y)$; x, y, z jsou libovolné číslice, $x \neq 0$. **5.11** $(2k+3)^2-(2k+1)^2 = 8(k+1)$, kde $k \in \mathsf{N}$. **5.12** a) Řešte rozkladem $n^4 - n^2 = n^2(n^2-1) = (n-1)n^2(n+1)$; pro $n = 2k$ je $n^2 = 4k^2$; pro $n = 2k+1$ je $n-1 = 2k$ a $n+1 = 2k+2$; b) $n^4 - n^2 = (n-1)n^2(n+1)$; aspoň jeden činitel je dělitelný třemi, aspoň dva činitelé jsou dělitelní dvěma, součin je dělitelný dvanácti; c) postačí dosazovat $n = 2k$, $n = 2k+1$; d) $n^5 - n^3 = (n-1)n^3(n+1)$; dále postupujeme obdobně jako v b). **5.13** a) 3, 9; b) 2, 4, 5, 10; c) 2, 3, 6; d) 2, 5, 10; e) 2, 4; f) 2, 3, 4, 6, 12; g) 5; h) 2, 4. **5.14** a) 4 možnosti: 0, 3, 6, 9; b) 5 možností: 1, 3, 5, 7, 9; c) jedna možnost: 6. **5.15** $y = 2$, $x = 2$. **5.16** a) 222, 232, 322, 332; b) 222, 333; c) 232, 332; d) 222. **5.17** Přirozené číslo je dělitelné patnácti, právě když je dělitelné třemi a zároveň pěti. **5.18** Mají stejné ciferné součty. **5.19** Menšenec i menšitel mají stejné ciferné součty, proto při dělení devíti dávají stejné zbytky a jejich rozdíl dává zbytek nula. **5.20**

a) 72	2	b) 210	2	c) 495	3	d) 5 775	3	e) 3 861	3
36	2	105	3	165	3	1 925	5	1 287	3
18	2	35	5	55	5	385	5	429	3
9	3	7	7	11	11	77	7	143	11
3	3	1		1		11	11	13	13
1						1		1	

5.21 28. **5.22** Prvočísla jsou 677 a 439. **5.23** a) $\frac{7}{8}$; b) $\frac{73}{128}$; c) $\frac{1}{3}$; d) $\frac{600}{677}$. **5.24** a) $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$; b) $2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2$; c) $3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11$; d) $2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13$. **5.25** Pro každé $p > 3$ je společným dělitelem číslo 6. **5.26** Neplatí. **5.27** Jsou to druhé mocniny prvočísel. **5.28** a) 12; b) 360; c) 252; d) 6; e) 9; f) 81. **5.29** a) 120; b) 1 512; c) 378;

d) 180; e) 1 144; f) 2 772. **5.30** a) $\frac{6}{13}$; b) $\frac{3}{11}$; c) $\frac{2}{7}$; d) $\frac{11}{17}$; e) $\frac{13}{19}$; f) $\frac{7}{23}$. **5.31** a) $\frac{47}{240}$; b) $\frac{81}{50}$; c) $-\frac{1}{15}$; d) $\frac{47}{945}$. **5.32** a) 96; b) 720; c) 992; d) 60 060. **5.33** a) 120 cm, 120 cm, 36 cm; b) 100, 144, 225, 400. **5.34** $n(4,5,6)-1 = 59$. **5.35** $n(10,9,8,7,6,5,4,3,2) = 10 \cdot 9 \cdot 4 \cdot 7 = 2\,520$. Možný počet diváků je $k \cdot 2\,520 - 1$, kde $k \in \mathsf{N}$; odhadu odpovídá $k = 4$, počet diváků je 10 079.

6. Mocniny s přirozeným a celým mocnitelem

6.1 a) 300; b) 0; c) 32; d) $\frac{1}{32}$; e) -32; f) 1; g) -1; h) $\frac{16}{81}$. **6.2** a) Platí; b) neplatí; c) platí; d) neplatí; e) neplatí; f) platí. **6.3** a) $6{,}378 \cdot 10^6$ m; b) $2{,}5 \cdot 10^4$ l; c) $6{,}5 \cdot 10^8$ W; d) $2{,}7 \cdot 10^4$ l. **6.4** a) $1{,}6 \cdot 10^7$; b) $4{,}6 \cdot 10^5$; c) $7{,}2 \cdot 10^4$; d) $2{,}0 \cdot 10^3$. **6.5** a) 4; b) 9; c) 48; d) -10; e) 100; f) $-\frac{1}{200}$. **6.6** a) 6; b) 18; c) 48; d) 12. **6.7** a) $6a^2b^3$; b) $20a^5b^4$; c) $4xy^4$; d) $7x^2y^8$. **6.8** a) 25; 9; -27; $\frac{25}{36}$; $-\frac{27}{8}$; b) $-\frac{1}{32}$; $-\frac{1}{32}$; $\frac{4}{3}$; -8; -8; c) $\frac{1}{3}$; $2\sqrt{2}$; 2; $-3\sqrt{3}$; 1. **6.9** a) $\frac{1}{40}$; b) 367; c) $-\frac{1}{4}$; d) 0. **6.10** a) $2+\sqrt{5}$; b) $2{,}5+\sqrt{6}$; c) $5+2\sqrt{6}$; d) $3+\sqrt{5}$. **6.11** a) $1{,}32 \cdot 10^4$; $6{,}4 \cdot 10^6$; $5{,}82 \cdot 10$; $1{,}25 \cdot 10^2$; b) $2{,}5 \cdot 10^{-1}$; $3{,}45 \cdot 10^{-4}$; $7 \cdot 10^{-1}$; $2{,}36 \cdot 10^{-3}$. **6.12** a) $2 \cdot 10^4$; b) $5 \cdot 10^6$; c) $8 \cdot 10^{-4}$; d) $5 \cdot 10^{-3}$. **6.13** a) $\frac{56a^3c}{b^8}$; b) $\frac{13a^2b}{d}$; c) $\frac{ad^2}{3c^3}$; d) $\frac{2a^5d^2}{c}$; e) $\frac{16b^7c}{a^4}$.

7. Mnohočleny

7.1 $(z_1^2 + z_1 z_2 + z_2^2)\frac{v}{3}$. **7.2** 5 500 Kčs. **7.3** a) $x \geqq 1$, $y \neq 1$, $y \neq -2$; $\frac{1}{4}$; b) $x > 0$; 2; c) $x \leqq 1$, $x \neq 0$, $-\frac{1}{18}$; d) $x > 2$; $1 + \sqrt{3}$. **7.4** a) $15k + 3$; b) $9m - 9$. **7.5** a) $\sqrt{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$; b) $\sqrt{\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a+b}}}$; c) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} + \sqrt{\frac{a}{b}}$. **7.6** $\frac{nm}{3\,000}$.
7.7 a) $3y + 24 + \frac{191y + 11}{y^2 - 8y}$; b) $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$; c) $a^6 - a^5 + a^4 - a^3 + a^2 - a + 1 + \frac{1}{a+1}$; d) $7t^3 + 2t^2 + 3t + 2 + \frac{6t + 7}{2t^2 - 1}$. **7.8** a) $2x^3 + x^2 - x$; b) $4x^2 - 3x + 1$; c) $9x^2 - 9x + 2$; d) $5x - 5$. **7.11** $-2r(x+y)$. **7.12** a) $(x - y)(r - x + y)$; b) $(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c)$; c) $-x(12a - 5x)$; d) $ay(a-b)(1+a+b)$. **7.13** a) $(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$; b) $2r(3x^2 + 3y^2 + r^2 + 6xy)$; c) $12x(x-2)$; d) $y(2x+y)(2x^2+y^2+2xy)$. **7.14** a) $(x^2+1)(2x^2+x+2)$; b) $(t+1)(t^2+2t+2)$. **7.15** a) $(x-2)(x-4)$; b) $(x+2)(x+4)$; c) $(x+3)(x-5)$; d) $(x+4)(x-3)$.

8. Lomené výrazy

8.1 a) $\frac{a}{a-b}$, $a \neq b$; b) $\frac{x^2 + xy + y^2}{x+y}$, $x \neq y$, $x \neq -y$; c) $\frac{t-2}{t+2}$, $t \neq \pm 2$; d) $\frac{5(2x - 3y)}{2x + 3y}$, $2x \neq -3y$. **8.2** a) $\frac{x-1}{x+1}$, $x \neq -1$, $x \neq y$; b) $\frac{r^2 + r + 1}{r+1}$, $r \neq \pm 1$; c) $\frac{s-2}{r-1}$, $s \neq -2$, $r \neq 1$; d) $\frac{x+3}{x-3}$, $x \neq 3$, $y \neq \frac{2}{3}$. **8.3** a) $-\frac{t}{a-1}$; b) $-\frac{x}{2-y}$; c) $-\frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - 4}$; d) $\frac{(y-1)(x^2 - x + 1)}{x^3 + 1}$. **8.4** a) $x \neq \pm 1$, $x \neq -2$; b) $x \neq 1$; c) $x > 0$; d) pro všechna $x \in \mathsf{R}$. **8.5** a) $-3(1 + \sqrt{2})$; b) $\sqrt{3} - 1$; c) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$. **8.6** a) $\frac{2}{p}$, $p \neq 0$, $p \neq -q$; b) $\frac{2}{z}$, $x \neq 0$,

$y \neq 0$, $z \neq 0$; c) $\frac{4y - x}{6(x-y)^2}$, $x \neq y$; d) $\frac{3 - 5t}{t^2 - 1}$, $t \neq \pm 1$. **8.7** a) $-\frac{a}{b}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a \neq b$; b) $\frac{1}{z}$, $z \neq 0$, $z \neq \pm 1$; c) 1, $x \neq -1$, $x \neq 2$; d) y^2, $y \neq \pm\frac{1}{2}$. **8.9** $a \neq 2$, $b \neq \pm 1$. **8.10** a) $\frac{24x}{a}$, $a \neq 0$, $x \neq 0$; b) $\left(\frac{a^2 + b^2}{2}\right)^2$, $a \neq 0$, $b \neq 0$; c) $\frac{x^3 + x^2 y + 3xy^2 - y^3}{x^2 y^2}$, $x \neq 0$, $y \neq 0$; d) $\frac{x^4 + 2x^3 y + x^2 y^2 - x^2 y + xy^2 + x - y}{xy}$, $x \neq 0$, $y \neq 0$.
8.11 a) $\frac{3(x+y)}{5(x-y)}$, $x \neq y$, $x \neq -y$, $x \neq 0$; b) $\frac{b+a}{b-a}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a \neq b$; c) $\frac{x+1}{x-1}$, $x \neq 0$, $x = \pm 1$; d) $\frac{y(y^2 - 2y + 3)}{y^2 + y + 1}$, $y \neq 0$, $y^2 + y + 1 \neq 0$.
8.12 a) $-\frac{x}{a}$, $a \neq 0$, $x \neq 0$, $x \neq \pm a$; b) $\frac{x - y}{x^2}$, $x \neq 0$, $x \neq y$; c) $\frac{x(x+1)}{x+2}$, $x \neq -1$, $x \neq -2$; d) $(x+y)(x-y)$; $x \neq y$, $x \neq -y$. **8.13** $\frac{100hp}{n(n+p)}$.
8.14 Daný výraz je roven výrazu $\frac{2}{x+2}$, a to pro $x \neq 0$, $x \neq \pm 2$; celému číslu je tedy roven jen pro $x = -1$, $x = -3$, $x = -4$. **8.15** Pro všechna $x \neq 0$, $x \neq -1$. **8.16** $r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$. **8.17** $v = \frac{S - 2\pi r^2}{2\pi r}$. **8.18** $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$. **8.19** $a = \frac{S - 2bc}{2(b+c)}$. **8.20** $v_1 = \frac{v v_2 d_1}{v_2 d_1 + v_2 d_2 - v d_2}$.

9.1 a) $10\sqrt{2}\,\text{m} \doteq 14{,}14\,\text{m}$; b) $4\sqrt{3}\,\text{dm} \doteq 6{,}9\,\text{dm}$. **9.2** $r = 2{,}5\sqrt{2}\,\text{cm} \doteq 3{,}5\,\text{cm}$. **9.3** $x = 4\sqrt{5}\,\text{cm} \doteq 8{,}9\,\text{cm}$. **9.4** Velikost výslednice je 128,1 N. **9.5** 10 cm. **9.6** a) Není; b) je; c) je. **9.7** $|PT_1| = |PT_2| \doteq 5{,}45\,\text{cm}$. **9.8** a) $\beta = 25°22'$, $a = c\sin\alpha \doteq 47{,}7\,\text{cm}$, $b = c\sin\beta \doteq 22{,}6\,\text{cm}$; b) $\alpha = 51°40'$, $a = b\,\text{tg}\,\alpha \doteq 0{,}30\,\text{m}$, $c = \dfrac{b}{\sin\beta} \doteq 0{,}39\,\text{m}$; c) $\alpha = 35°18'$, $b = a\,\text{tg}\,\beta \doteq 12{,}3\,\text{m}$, $c = \dfrac{a}{\sin\alpha} \doteq 15{,}06\,\text{m}$; d) $\alpha = 56°18'$, $\beta \doteq 33°42'$, $c \doteq 12{,}3\,\text{m}$. **9.9** 18,0 cm. **9.10** $v = 4\sqrt{3}\,\text{cm} \doteq 6{,}9\,\text{cm}$, $\alpha = 60°$. **9.11** Velikost výslednice je 51 N, $\alpha \doteq 11°18'$. **9.12** $x = d\,\text{tg}\,\alpha \doteq 111{,}1\,\text{m}$. **9.13** $|LN| = \dfrac{v-h}{\sin\alpha} \doteq 27\,\text{m}$. **9.14** Výškový rozdíl je asi 541 m, vodorovná vzdálenost asi 744 m. **9.15** Železniční trať stoupá pod úhlem asi 0,5°. **9.16** Tečny svírají úhel 60°. **9.17** 67,4° a 112,6°.

SEZNAM POUŽITÝCH MATEMATICKÝCH SYMBOLŮ A ZNAČEK

$\doteq$	rovná se přibližně, rovná se po zaokrouhlení
$\neq$	nerovná se, je různé od
$a > b$	číslo a je větší než číslo b
$a \geqq b$	číslo a je větší nebo rovno číslu b
$a < b$	číslo a je menší než číslo b
$a \leqq b$	číslo a je menší nebo rovno číslu b
$\{x \in \mathsf{A};\ V(x)\}$	množina všech prvků z A, které mají vlastnost $V(x)$
$a \in \mathsf{A}$	a je prvkem množiny A
$a \notin \mathsf{A}$	a není prvkem množiny A
$\mathsf{A} \subset \mathsf{B}$	množina A je podmnožinou množiny B
$\mathsf{A} \cap \mathsf{B}$	průnik množin A, B
$\mathsf{A} \cup \mathsf{B}$	sjednocení množin A, B
$\mathsf{A} \setminus \mathsf{B}$	rozdíl množin A, B
A'_{B}	doplněk množiny A v množině B
$\emptyset$	prázdná množina
N	množina všech přirozených čísel
Z	množina všech celých čísel
Q	množina všech racionálních čísel
R	množina všech reálných čísel
Z^-	množina všech záporných celých čísel
R^+	množina všech kladných reálných čísel
N_0, Z_0^+	množina všech nezáporných celých čísel
R_0^+	množina všech nezáporných reálných čísel
$\langle a, b\rangle$	uzavřený interval od a (včetně) do b (včetně)
$(a, b\rangle$	polouzavřený interval od a (mimo) do b (včetně) zleva otevřený a zprava uzavřený interval
$\langle a, b)$	polouzavřený interval od a (včetně) do b (mimo) zleva uzavřený a zprava otevřený interval
(a, b)	otevřený interval od a (mimo) do b (mimo)
$\lvert a\rvert$	absolutní hodnota čísla a
$a \mid b$	číslo a dělí číslo b, číslo a je dělitelem čísla b
$D(a, b)$	největší společný dělitel čísel a, b
$\mathsf{D}(a)$	množina všech dělitelů čísla a

$n(a,b)$	nejmenší společný násobek čísel a, b
$\mathsf{N}(a)$	množina všech násobků čísla a
$\lvert AB \rvert$	délka úsečky AB
$\sphericalangle AVB$	úhel AVB
$\lvert \sphericalangle AVB \rvert$	velikost úhlu AVB
$\triangle ABC$	trojúhelník ABC
$x \mapsto y$	funkce, která číslu x přiřazuje číslo y
$\neg p$	negace p, neplatí p
$p \wedge q$	konjunkce, p a zároveň q
$p \vee q$	disjunkce, p nebo q
$p \Rightarrow q$	p implikuje q, z p plyne q
$p \Leftrightarrow q$	p je ekvivalentní s q, p právě když q
$\forall$	obecný kvantifikátor
$\exists$	existenční kvantifikátor

Poznámka: Přehled značek a symbolů používaných zatím ve většině našich učebnic matematiky doplňujeme pro informaci zájemcům z řad učitelů i žáků tabulkou některých odlišností u používaných pojmů daných normou platnou v Evropské unii.

Český normalizační institut vydal v r. 1999 českou verzi mezinárodní normy ISO31-11:1992, která nahrazuje normu ČSN 01 1001. Z uvedeného seznamu použitých symbolů a značek zavádí nová norma jiné značení pro následující matematické značky:

Značka, znak	Použití	Význam, slovní ekvivalent	Poznámky a příklady
$\approx$	$a \approx b$	a se přibližně rovná b	
N		Množina (všech) přirozených čísel; množina (všech) kladných celých čísel a nuly	$N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
N^*		množina (všech) kladných celých čísel	$N^* = \{1, 2, 3, \dots\}$
$\{\mid\}$	$\{x \in A \mid p(x)\}$	množina těch prvků množiny A, pro které je tvrzení $p(x)$ pravdivé	$\{x \in R \mid x < 5\}$ v češtině se užívá též ; místo $\mid$ $\{x \in R;\ x < 5\}$

Značka, znak	Použití	Význam, slovní ekvivalent	Poznámky a příklady
$[,]$	$[a,b]$	uzavřený interval v R od a (včetně) do b (včetně)	$[a,b] = \{x \in R \mid a \leqq x \leqq b\}$
$]{,}]$ $(,]$		zleva polootevřený interval v R od a (mimo) do b (včetně); zleva otevřený a zprava uzavřený interval	$]a,b] = \{x \in R \mid a < x \leqq b\}$ $(a,b] = \{x \in R \mid a < x \leqq b\}$
$[,[$ $[,)$		zprava polootevřený interval v R od a (včetně) do b (mimo); zleva uzavřený a zprava otevřený interval	$[a,b[= \{x \in R \mid a \leqq x < b\}$ $[a,b) = \{x \in R \mid a \leqq x < b\}$
$],[$ $(,)$		otevřený interval v R od a (mimo) do b (mimo)	$]a,b[= \{x \in R \mid a < x < b\}$ $(a,b) = \{x \in R \mid a < x < b\}$
$\subseteq$	$B \subseteq A$	B je částí A; B je podmnožinou A	Každý prvek B patří do A. Užívá se též $\subset$, viz však poznámku k vlastní podmnožině.
$\subset$	$B \subset A$	B je vlastní částí A; B je vlastní podmnožinou A	Každý prvek B patří do A, avšak B se nerovná A ($B \subset$ $\subset A \wedge A \neq B$). Užije-li se $\subset$ pro podmnožinu, použije se pro vlastní podmnožinu značka $\subsetneqq$.
$\setminus$	$A \setminus B$	rozdíl množin A a B; A minus B	Množina prvků patřících do A, nikoli však do B. $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$
$\complement$	$\complement_A B$	doplněk podmnožiny B v množině A	Množina těch prvků množiny A, které nepatří do podmnožiny B. Je-li z kontextu zřejmé, o kterou množinu A se jedná, značka A se často vypouští.