Nerovnice s neznámou pod odmocninou[1]

Důležitá upozornění.

- Umocnění nerovnice (na druhou) je obecně důsledkovou úpravou. Při použití důsledkové úpravy je zkouška nutnou součástí řešení nerovnice. Vyhledem k tomu, že nerovnice má zpravidla nekonečně mnoho kořenů, není tento postup prakticky realizovatelný. Je tedy potřeba se důsledkové úpravě při řešení nerovnice vyhnout.

- V případě, že umocňujeme nerovnici, jejíž obě strany jsou nezáporné, je tato úprava dokonce ekvivalentní.

Postup řešení nerovnice s neznámou pod odmocninou.

1. Stanovíme definiční obor zadané nerovnice - výrazy pod odmocninami musí být nezáporné.

2. Pokračujeme ve dvou větvích:

   a) V případě, že jsou obě strany nerovnice nezáporné, umocníme ji. Jde o ekvivalentní úpravu, pomocí níž se (postupně) zbavujeme odmocnin.

   b) Jestliže výrazy na každé straně nerovnice mají různá znaménka, můžeme o splnění či nesplnění takové nerovnosti rozhodnout přímo (bez dalších úprav).

Praktická realizace tohoto postupu je patrná v následujících řešených příkladech.

Řešené příklady. V $\mathbb{R}$ řešte následující nerovnice:

1. Nerovnice
$$\sqrt{x+18} < 2-x$$
   má definiční obor $D = \langle -18; \infty)$ (1. bod postupu). Pro všechna $x \in D$ je levá strana nerovnice nezáporná. Abychom ji mohli umocnit, musí být nezáporná rovněž strana pravá. To nastane pro $x \leq 2$. Řešení nerovnice se nám tedy rozpadá do dvou větví:

   a) (bod 2a) postupu) Pro $x \in \langle -18; 2\rangle$ po zmíněném umocnění máme
$$x+18 < (2-x)^2 \quad \Leftrightarrow \quad x+18 < 4-4x+x^2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < x^2-5x-14 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < (x+2)(x-7)\ ,$$
   takže
$$K_1 = [(-\infty; -2) \cup (7; \infty)] \cap \langle -18; 2\rangle = \langle -18; -2)\ .$$

   b) (bod 2b) postupu) Již víme, že pro $x \in (2; \infty)$ platí $L \geq 0$ a $P < 0$. Přitom má současně platit $L < P$, což nelze, tudíž $K_2 = \emptyset$.

   Závěr $K = K_1 \cup K_2 = \langle -18; -2)$.

2. Nerovnice
$$\sqrt{11-5x} > x-1$$
   má definiční obor $D = (-\infty; 11/5\rangle$ (1. bod postupu). Pro všechna $x \in D$ je levá strana nerovnice nezáporná. Abychom ji mohli umocnit, musí být nezáporná rovněž strana pravá. To nastane pro $x \geq 1$. Řešení nerovnice se nám tedy rozpadá do dvou větví:

   a) (bod 2a) postupu) Pro $x \in \langle 1; 11/5\rangle$ po zmíněném umocnění máme
$$11-5x > (x-1)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 11-5x > x^2-2x+1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 > x^2+3x-10 \quad \Leftrightarrow \quad 0 > (x+5)(x-2)\ ,$$
   takže
$$K_1 = (-5; 2) \cap \left\langle 1; \frac{11}{5} \right\rangle = \langle 1; 2)\ .$$

[1] Případné náměty k tomuto textu prosím adresujte na e-mail akob@jaroska.cz. Děkuji Aleš Kobza (autor materiálu).

b) (bod 2b) postupu) Již víme, že pro $x \in (-\infty; 1)$ platí $L \geq 0$ a $P < 0$, takže je splněna i zadáním požadovaná nerovnost $L > P$, a to pro všechna $x \in (-\infty; 1)$, tudíž $K_2 = (-\infty; 1)$.

Závěr $K = K_1 \cup K_2 = (-\infty; 2)$.

3. Nerovnice

$$\sqrt{-x^2 + 7x - 6} < 3 + 2x \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{(1-x)(x-6)} < 3 + 2x$$

má definiční obor $D = \langle 1; 6 \rangle$ (1. bod postupu). Pro všechna $x \in D$ je levá strana nerovnice nezáporná. Abychom ji mohli umocnit, musí být nezáporná rovněž strana pravá. To nastane pro $x \geq -3/2$. Protože tato podmínka je splněna pro všechna $x \in D$, nebude se nám řešení této nerovnice dále větvit. Pro všechna $x \in D$ je umocnění této nerovnice ekvivalentní úpravou, vychází nám

$$-x^2 + 7x - 6 < (3 + 2x)^2 \quad \Leftrightarrow \quad -x^2 + 7x - 6 < 9 + 12x + 4x^2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < 5x^2 + 5x + 15 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 < x^2 + x + 3 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4}.$$

Tato nerovnice je tedy splněna vždy. Závěr $K = D = \langle 1; 6 \rangle$.

4. Nerovnici

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1} > \sqrt{2x-1}$$

bude třeba vzhledem k většímu počtu v ní se vyskytujících odmocnin umocňovat opakovaně. Proto bude účelné ji nejprve přepsat do tvaru, ve kterém bude každá odmocnina vystupovat s kladným koeficientem, protože pak budou pro všechna x z jejího definičního oboru obě její strany nezáporné a budeme ji moci rovnou ekvivalentně umocnit. Definiční obor nerovnice je $D = \langle 1; \infty)$. Takže pro všechna $x \in D$ platí

$$\sqrt{x+3} > \sqrt{2x-1} + \sqrt{x-1} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\sqrt{x+3}\right)^2 > \left(\sqrt{2x-1} + \sqrt{x-1}\right)^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x + 3 > 2x - 1 + 2\sqrt{2x-1}\sqrt{x-1} + x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad x + 3 > 3x - 2 + 2\sqrt{(2x-1)(x-1)} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 5 - 2x > 2\sqrt{2x^2 - 3x + 1}\,. \tag{1}$$

Nyní potřebujeme opět umocňovat. Snadno zkontrolujeme, že nerovnice je definovaná pro všechna $x \in D$, ale ne pro všechna $x \in D$ jsou obě její strany nezáporné. Proto bude potřeba výpočet dále rozvětvit.

a) Levá strana nerovnice je nezáporná právě tehdy, když $x \leq \frac{5}{2}$. Pro $x \in \left\langle 1; \frac{5}{2} \right\rangle$ jsou tedy obě strany nerovnice (1) nezáporné a díky tomu ji můžeme umocnit, přičemž se jedná o ekvivalentní úpravu. Pro tato x tedy platí

$$5 - 2x > 2\sqrt{2x^2 - 3x + 1} \quad \Leftrightarrow \quad (5 - 2x)^2 > 4\left(2x^2 - 3x + 1\right) \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 25 - 20x + 4x^2 > 8x^2 - 12x + 4 \quad \Leftrightarrow \quad 0 > 4x^2 + 8x - 21 \quad \Leftrightarrow \quad 0 > (2x+7)(2x-3)\,,$$

Takže

$$K_1 = \left(-\frac{7}{2}; \frac{3}{2}\right) \cap \left\langle 1; \frac{5}{2} \right\rangle = \left\langle 1; \frac{3}{2} \right).$$

b) Pokud $x \in \left(\frac{5}{2}; \infty\right)$, vidíme, že v nerovnici (1) je $L < 0$, $P \geq 0$ a přitom má platit $L > P$, což nelze, takže $K_2 = \emptyset$.

Dostáváme tak závěr výpočtu

$$K = K_1 \cup K_2 = \left\langle 1; \frac{3}{2} \right).$$

5. Nerovnici
$$\sqrt{x+4+6\sqrt{x-5}} \le 2$$
je výhodné řešit s využitím substituce $y = \sqrt{x-5}$. Odtud dostaneme $x = y^2 + 5$. Pro zadanou nerovnici tak postupně dostáváme
$$\sqrt{(y^2+5)+4+6y} \le 2 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{y^2+6y+9} \le 2 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{(y+3)^2} \le 2 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad |y+3| \le 2 \quad \Leftrightarrow \quad -5 \le y \le -1 \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt{x-5} \le -1\,.$$
Poslední podmínku však nelze splnit. Nemusíme se tedy zabývat podmínkami a můžeme rovnou psát, že $K = \emptyset$.

6. Nerovnice
$$\frac{1}{\sqrt{x+1}} > \frac{1}{5-x}$$
má definiční obor $D = (-1;\infty) - \{5\}$ (1. bod postupu). Její pravá strana je nezáporná (v našem případě dokonce kladná) právě tehdy, když $x < 5$. Řešení nerovnice se nám tedy rozpadá do dvou větví:
   a) (bod 2a) postupu) Pro $x \in (-1;5)$ tedy můžeme nerovnici ekvivalentně umocnit a ještě využít toho, že oba jmenovatelé jsou kladní a lze se tak rychle zbavit zlomků:
$$\frac{1}{x+1} > \frac{1}{(5-x)^2} \quad \Leftrightarrow \quad (5-x)^2 > x+1 \quad \Leftrightarrow \quad 25-10x+x^2 > x+1 \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad x^2-11x+24 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-3)\,(x-8) > 0\,,$$
   takže $K_1 = [(-\infty;3) \cup (8;\infty)] \cap (-1;5) = (-1;3)$.
   b) (bod 2b) postupu) Ve zbytku definičního oboru, tj. pro $x \in (5;\infty)$ pak platí, že $L > 0$ a $P < 0$, takže požadovaná nerovnost $L > P$ je splněna. Je tedy $K_2 = (5;\infty)$.

   Závěr $K = K_1 \cup K_2 = (-1;3) \cup (5;\infty)$.

Zadání úloh.

V $\mathbb{R}$ vyřešte nerovnice

1. $$2\sqrt{x-1} < x\,,$$
2. $$\sqrt{2x+14} > x+3\,,$$
3. $$\sqrt{x+2} > x\,,$$
4. $$\sqrt{5-2x} \ge 6x-1\,,$$

5.
$$\sqrt{x^2 - 4x} > x - 3\,,$$

6.
$$\sqrt{3x - x^2} < 4 - x\,,$$

7.
$$\sqrt{19 + x - 8\sqrt{x+3}} < 3\,,$$

8.
$$\frac{\sqrt{2x^2 + 7x - 4}}{x+4} < \frac{1}{2}\,,$$

9.
$$\sqrt{x} - 3 \le \frac{2}{\sqrt{x} - 2}\,,$$

10.
$$3\sqrt{x} - \sqrt{5x+5} > 1\,.$$

Návody k řešení a výsledky úloh.

1. $K = \langle 1; 2) \cup (2; \infty)$,
2. $K = \langle -7; 1)$,
3. $K = \langle -2; 2)$,
4. $K = (-\infty; 1/2\rangle$,
5. $K = (-\infty; 0\rangle \cup (9/2; \infty)$,
6. $K = \langle 0; 3\rangle$,
7. pomocí substituce $y = \sqrt{x+3}$ lze zadanou nerovnici postupně upravit do tvaru $|y - 4| < 3$, $K = (-2; 46)$,
8. $K = (-\infty; -4) \cup \langle 1/2; 8/7)$,
9. pomocí substituce $y = \sqrt{x}$ lze zadanou nerovnici postupně upravit do tvaru
$$\frac{(y-4)\,(y-1)}{y-2} \le 0\,, \qquad \ldots \qquad K = \langle 0; 1\rangle \cup (4; 16\rangle\ ,$$
10. $K = (4; \infty)$, nerovnici je třeba dvakrát umocňovat, před prvním umocněním je vhodné ji upravit do tvaru
$$3\sqrt{x} > \sqrt{5x+5} + 1\,,$$
před druhým umocněním je třeba pokračovat ve dvou větvích (viz 2. bod postupu).