Rovnice s parametry - kvadratické[1]

Postup řešení kvadratické rovnice s parametrem.

1. Pokud koeficient u kvadratického členu může být nulový, vyřešíme zvlášť případ lineární rovnice.
2. Dále se zabýváme rovnicí, která je „skutečně“ kvadratická. Vypočteme tedy její diskriminant D a budeme zkoumat jeho znaménko. Tím se nám další postup může rozdělit až do tří větví.
   a) Pro $D > 0$ má rovnice dva reálné různé kořeny. Najdeme je užitím známého vzorce.
   b) Když $D = 0$, má rovnice jeden dvojnásobný reálný kořen.
   c) Je-li $D < 0$, nemá rovnice v $\mathbb{R}$ žádné řešení.

V některých úlohách může být úkolem nalézt všechny hodnoty parametru, pro něž má rovnice dva reálné různé kořeny, které jsou například

1. různých znamének (tzn. jeden kladný a druhý záporný),
2. oba kladné,
3. oba záporné.

Probereme tedy ještě obecně způsob řešení takové úlohy. Pro všechny tři uvedené varianty je společná úvodní dvojice podmínek - rovnice musí být kvadratická (tedy koeficient u kvadratického členu nesmí být nulový) a diskriminant musí být kladný. K dalšímu postupu využijeme Viètovy vztahy. Ke splnění jednotlivých požadovaných podmínek (při současném splnění obou právě zmíněných „společných“ podmínek) je v příslušných variantách nutné a stačí, aby

1. $x_1 x_2 < 0$,
2. $x_1 x_2 > 0$ a $x_1 + x_2 > 0$,
3. $x_1 x_2 > 0$ a $x_1 + x_2 < 0$,

přičemž výrazy $x_1 x_2$ a $x_1 + x_2$ umíme díky Viètovým vztahům vyjádřit pomocí koeficientů zadané rovnice. (viz Příklad 5)

Řešené příklady.

1. V $\mathbb{R}$ řešte rovnici
$$px^2 + 6p^2 x + p = 0\,,$$
kde $p \in \mathbb{R}$ je parametr a x neznámá.

   Řešení. Nejprve probereme případ, kdy je zadaná rovnice pouze lineární, v naší situaci to je pro $p = 0$ (1. bod postupu). Po dosazení dostáváme pravdivé tvrzení $0 = 0$, takže rovnice je splněna pro libovolné $x \in \mathbb{R}$. Dále předpokládejme, že $p \neq 0$. Pracujeme tedy s kvadratickou rovnicí a vypočteme její diskriminant (2. bod postupu s následným větvením). Platí
$$D = \left(6p^2\right)^2 - 4p \cdot p = 36p^4 - 4p^2 = 4p^2\left(9p^2 - 1\right) = 4p^2\,(3p-1)\,(3p+1)\ .$$
   a) Zjišťujeme, že $D > 0$ právě tehdy, když $p \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; \infty\right)$. Potom
$$x_{1,2} = \frac{-6p^2 \pm 2p\sqrt{9p^2-1}}{2p} = -3p \pm \sqrt{9p^2-1}\,.$$

[1]Případné náměty k tomuto textu prosím adresujte na e-mail akob@jaroska.cz. Děkuji Aleš Kobza (autor materiálu).

b) Dále $D = 0$ tehdy a jen tehdy, když $p = \pm\frac{1}{3}$ (uvědomme si, že pracujeme za podmínky , že $p \neq 0$). Pak

$$x = \frac{-6p^2}{2p} = -3p\,.$$

c) Konečně $D < 0$ když a jen, když $p \in \left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right) - \{0\}$. V této situaci rovnice nemá řešení.

Závěrečná tabulka tedy vypadá takto:

p	K
$\{0\}$	$\mathbb{R}$
$\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; \infty\right)$	$\left\{-3p \pm \sqrt{9p^2 - 1}\right\}$
$\left\{\pm\frac{1}{3}\right\}$	$\{-3p\}$
$\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right) - \{0\}$	$\emptyset$

Zdůrazněme ještě raději logiku zápisu v právě uvedené tabulce. Přestože pro $p = \pm\frac{1}{3}$ platí

$$-3p \pm \sqrt{9p^2 - 1} = -3p$$

a bylo by možné výsledek ve třetím řádku pod záhlavím tabulky chápat jako speciální případ výrazu ve druhém řádku, nebylo by správné zápis takto „zjednodušit“ a psát, že pro $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right\rangle \cup \left\langle\frac{1}{3}; \infty\right)$ je množina všech kořenů tvaru $\left\{-3p \pm \sqrt{9p^2 - 1}\right\}$. Důvodem je to, že v naší tabulce správně rozlišujeme, kdy má rovnice dva kořeny (druhý řádek) a kdy jeden kořen (třetí řádek). Tuto informaci by „zjednodušený“ zápis přímo neposkytoval.

2. V $\mathbb{R}$ řešte rovnici

$$\left(q^2 - 1\right) x^2 + 2qx + 1 = 0\,,$$

kde $q \in \mathbb{R}$ je parametr a x neznámá.

Řešení. Nejprve probereme případ, kdy je zadaná rovnice jenom lineární. To nastává pro $q = \pm 1$ (1. bod postupu). Po vydělení rovnice (nenulovým) číslem $2q$ pak dostáváme

$$2qx + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{2q}\,.$$

Za podmínky $q \neq \pm 1$ je pak řešená rovnice kvadratická a budeme nejprve počítat její diskriminant (2. bod postupu)

$$D = (2q)^2 - 4\left(q^2 - 1\right) = 4 > 0\,.$$

V této situaci se řešení dále nevětví (případy $D = 0$ ani $D < 0$ nemohou nastat). Dále vypočteme

$$x_{1,2} = \frac{-2q \pm 2}{2\left(q^2 - 1\right)} = \frac{-q \pm 1}{(q-1)(q+1)} = \begin{cases} -\frac{1}{q+1} \\ -\frac{1}{q-1} \end{cases}$$

a dostáváme tak závěr:

q	K
$\{\pm 1\}$	$\left\{-\frac{1}{2q}\right\}$
$\mathbb{R} - \{\pm 1\}$	$\left\{-\frac{1}{q+1}; -\frac{1}{q-1}\right\}$

Vidíme, že řešená rovnice má pro jakoukoliv hodnotu parametru q alespoň jedno řešení.

3. V $\mathbb{R}$ řešte rovnici

$$(a-2)\,x^2 - \big(a^2-2a+2\big)\,x + 2a = 0\,,$$

kde $a \in \mathbb{R}$ je parametr a x neznámá.

Řešení. Nejprve probereme případ, kdy je zadaná rovnice pouze lineární. Dochází k tomu, když $a = 2$ (1. bod postupu). Dostáváme tak

$$0x^2 - (4-4+2)\,x + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2x = -4 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2\,.$$

Nyní se zaměříme na případ, kdy $a \neq 2$ (2. bod postupu). Počítejme diskriminant kvadratické rovnice a pro formální zjednodušení výpočtu přitom zaveďme substituci $b = a^2 - 2a$

$$D = \big[-\big(a^2-2a+2\big)\big]^2 - 4\,(a-2)\cdot 2a = \big[\big(a^2-2a\big)+2\big]^2 - 8\,\big(a^2-2a\big) = (b+2)^2 - 8b =$$

$$= b^2 + 4b + 4 - 8b = b^2 - 4b + 4 = (b-2)^2 = \big(a^2-2a-2\big)^2 \geq 0\,.$$

Vidíme, že bude třeba rozlišit dva případy.

a) Vyřešením rovnice $a^2 - 2a - 2 = 0$ (propočítejte si sami) zjišťujeme, že varianta $D = 0$ nastává právě tehdy, když $a = 1 \pm \sqrt{3}$. Řešená rovnice má v tomto případě jeden kořen, a to

$$x = \frac{a^2-2a+2}{2\,(a-2)}\,.$$

b) Ve zbývajících případech, tj. pro $a \in \mathbb{R} - \big\{2; 1 \pm \sqrt{3}\big\}$ je $D > 0$ a řešená rovnice má dva různé reálné kořeny

$$x_{1,2} = \frac{a^2-2a+2 \pm (a^2-2a-2)}{2\,(a-2)} = \begin{cases} \frac{2a^2-4a}{2(a-2)} = \frac{a^2-2a}{a-2} = \frac{a(a-2)}{a-2} = a \\ \frac{4}{2(a-2)} = \frac{2}{a-2} \end{cases}.$$

Výpočet uzavřeme zápisem výsledné tabulky:

a	K
$\{2\}$	$\{2\}$
$\{1 \pm \sqrt{3}\}$	$\left\{\frac{a^2-2a+2}{2(a-2)}\right\}$
$\mathbb{R} - \{2; 1 \pm \sqrt{3}\}$	$\left\{a; \frac{2}{a-2}\right\}$

4. Najděte tu hodnotu parametru $p \in \mathbb{R}$, pro kterou má rovnice

$$x^2 + (p-1)\,x + 2p^2 = 0$$

dva reálné různé kořeny, jejichž součin je nejmenší možný.

Řešení. Podle Viètových vztahů platí

$$x_1x_2 = 2p^2 \geq 0\,.$$

Nejmenší možná hodnota takového součinu je 0 a nastává pro $p = 0$. (Získaná nerovnost říká, že součin žádných dvou kořenů zadané rovnice tedy nemůže být záporný.) Zbývá ověřit, zda pro tuto hodnotu má uvažovaná rovnice dva reálné kořeny. Můžeme buď dosadit $p = 0$ a rovnici vyřešit nebo jen spočítat její diskriminant a zjistit, zda je pro $p = 0$ kladný. Při prvním způsobu řešení ihned vidíme, že

$$x^2 - x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x\,(x-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad \text{a} \quad x_2 = 1\,,$$

takže hodnota $p = 0$ našemu zadání vyhovuje.

5. Uvažujme rovnici

$$(2a-6)\,x^2+2ax+a+4=0\,,$$

kde $a\in\mathbb{R}$ je parametr a $x\in\mathbb{R}$ neznámá. Najděte všechny hodnoty parametru a, pro něž má tato rovnice dva reálné různé kořeny, které jsou

a) různých znamének (tzn. jeden kladný a druhý záporný),

b) oba kladné,

c) oba záporné.

Řešení. Nejprve analyzujeme obě společné podmínky, které jsou nutné pro každou z vyšetřovaných vlastností:

- Rovnice musí být kvadratická, koeficient u kvadratického členu nesmí být nulový

$$2a-6\neq 0 \quad\Leftrightarrow\quad a\neq 3\,.$$

- Diskriminant této rovnice musí být kladný, takže

$$D=(2a)^2-4\,(2a-6)\,(a+4)=4a^2-8a^2-8a+96=-4a^2-8a+96=$$
$$=-4\left(a^2+2a-24\right)=-4\,(a+6)\,(a-4)\ ,\quad \text{proto}\quad D>0\quad\Leftrightarrow\quad a\in(-6;4)-\{3\}\ . \qquad (1)$$

Nyní se již můžeme odděleně pustit do řešení jednotlivých částí úlohy s využitím Viètových vztahů.

a) Potřebujeme, aby $x_1x_2<0$, to znamená, že

$$\frac{a+4}{2a-6}<0\quad\Leftrightarrow\quad\frac{a+4}{a-3}<0\quad\Leftrightarrow\quad a\in(-4;3)\ .$$

Protože všechny zmíněné podmínky musí platit současně, zbává udělat průnik příslušných intervalů. Tím zjišťujeme, že rovnice má jeden kladný a druhý záporný kořen právě tehdy, když $a\in(-4;3)$.

b) Nyní je třeba, aby $x_1x_2>0$ a $x_1+x_2>0$, takže

$$\frac{a+4}{2a-6}>0\quad\text{a}\quad-\frac{2a}{2a-6}>0\quad\Leftrightarrow\quad\frac{a+4}{a-3}>0\quad\text{a}\quad\frac{a}{a-3}<0\quad\Leftrightarrow\quad a\in\emptyset\,.$$

Vidíme, že tyto podmínky současně splnit nelze. Znamená to, že řešená rovnice nikdy nemá dva kladné reálné různé kořeny.

c) Nyní je třeba, aby $x_1x_2>0$ a $x_1+x_2<0$, takže

$$\frac{a+4}{2a-6}>0\quad\text{a}\quad-\frac{2a}{2a-6}<0\quad\Leftrightarrow\quad\frac{a+4}{a-3}>0\quad\text{a}\quad\frac{a}{a-3}>0\quad\Leftrightarrow\quad a\in(-\infty;-4)\cup(3;\infty)\ .$$

Po provedení průniku této podmínky s podmínkou (1) získáváme závěr, že uvažovaná rovnice má dva různé záporné kořeny když a jen, když $a\in(-6;-4)\cup(3;4)$.

Zadání úloh.

1. V $\mathbb{R}$ vyřešte rovnice s neznámou x a parametrem $p \in \mathbb{R}$
   a)
$$x^2 - 2px + 3p^2 = 0\,,$$
   b)
$$2p^2x^2 + 4p^2x + 3 + 2p^2 = 0\,,$$
   c)
$$x^2 + 4x + p = 0\,,$$
   d)
$$px^2 + (2p+1)\,x + p - 4 = 0\,,$$
   e)
$$x^2 - 2\,(p+1)\,x + 4p = 0\,,$$
   f)
$$p\left(x^2 + 2px\right) = 3x + 6p\,,$$
   g)
$$(p+3)\,x^2 - 2px + 4 = 8x\,,$$
   h)
$$px^2 - 2px - p + 3 = 0\,.$$

2. Najděte tu hodnotu parametru $p \in \mathbb{R}$, pro kterou má rovnice
$$x^2 - \left(p^2 - 2p + 3\right) x - p = 0$$
dva reálné různé kořeny, jejichž součet je nejmenší možný.

U každé z následujících rovnic

3.
$$x^2 + 2\,(p-4)\,x + p^2 + 6p = 0\,,$$

4.
$$px^2 + 2px = 2x - 1 - p\,,$$

5.
$$x^2 - 2x + p^2 = 0$$

určete všechny hodnoty parametru $p \in \mathbb{R}$ tak, aby příslušná rovnice

a) neměla žádný reálný kořen,

b) měla právě jeden reálný kořen,

c) měla jeden kladný a jeden záporný kořen,

d) měla dva kladné reálné různé kořeny,

e) měla dva záporné reálné různé kořeny.

Návody k řešení a výsledky úloh.

1. a)

p	K
$\{0\}$	$\{0\}$
$\mathbb{R}-\{0\}$	$\emptyset$

, (vždy kvadratická rovnice, $D=-8p^2\leq 0$),

b)

p	K
$\mathbb{R}$	$\emptyset$

, (pro $p=0$ lineární rovnice, která nemá řešení, pro $p\neq 0$ $D=-24p^2<0$),

c)

p	K
$(-\infty;4)$	$\left\{-2\pm\sqrt{4-p}\right\}$
$\{4\}$	$\{-2\}$
$(4;\infty)$	$\emptyset$

, (vždy kvadratická rovnice, $D=16-4p$),

d)

p	K
$\{0\}$	$\{4\}$
$\left\{-\frac{1}{20}\right\}$	$\{9\}$
$\left(-\infty;-\frac{1}{20}\right)$	$\emptyset$
$\left(-\frac{1}{20};0\right)\cup(0;\infty)$	$\left\{\frac{-2p-1\pm\sqrt{20p+1}}{2p}\right\}$

, (pro $p=0$ lineární rovnice, která má jediné řešení, pro $p\neq 0$ $D=20p+1$),

e)

p	K
$\{1\}$	$\{2\}$
$\mathbb{R}-\{1\}$	$\{2;2p\}$

, (vždy kvadratická rovnice, $D=\left[2\left(p-1\right)\right]^2\geq 0$),

f)

p	K
$\{0\}$	$\{0\}$
$\mathbb{R}-\{0\}$	$\left\{-2p;\frac{3}{p}\right\}$

, (pro $p=0$ lineární rovnice s jediným řešením, pro $p\neq 0$ $D=\left(2p^2+3\right)^2>0$),

g)

p	K
$\{-3;-2\}$	$\{2\}$
$\mathbb{R}-\{-3;-2\}$	$\left\{2;\frac{2}{p+3}\right\}$

, (pro $p=-3$ lineární rovnice, která má jediné řešení (to navíc vychází stejně jako v případě, kdy $D=0$), pro $p\neq -3$ $D=\left[2\left(p+2\right)\right]^2\geq 0$),

h)

p	K
$(-\infty;0)\cup\left(\frac{3}{2};\infty\right)$	$\left\{\frac{p\pm\sqrt{2p^2-3p}}{p}\right\}$
$\left\{\frac{3}{2}\right\}$	$\{1\}$
$\left\langle 0;\frac{3}{2}\right)$	$\emptyset$

, (pro $p=0$ lineární rovnice, která nemá řešení, pro $p\neq 0$ $D=4p\left(2p-3\right)$).

2. Podle Viètových vztahů platí

$$x_1 + x_2 = p^2 - 2p + 3 = (p-1)^2 + 2 \geq 2\,.$$

Po ověření, že pro $p = 1$ má rovnice kladný diskriminant můžeme tvrdit, že pro $p = 1$ se realizuje nejmenší možný součet reálných různých kořenů uvažované rovnice, a to 2.

3. Rovnice je vždy kvadratická, rovnou počítáme její diskriminant. Ten vychází $D = -56p + 64$.

   a) Nastává pro $D < 0$, tedy pro $p \in \left(\frac{8}{7}; \infty\right)$.

   b) Nastává pro $D = 0$, tedy pro $p = \frac{8}{7}$.

   Další případy mohou nastat jedině pro $p < \frac{8}{7}$ při splnění následujících podmínek:

   c) $x_1x_2 = p^2 + 6p = p\,(p+6) < 0$, tedy pro $p \in (-6; 0)$.

   Pro splnění zbývajících podmínek je dále nutné, aby $x_1x_2 = p^2 + 6p = p\,(p+6) > 0$, tedy pro $p \in (-\infty; -6) \cup \left(0; \frac{8}{7}\right)$. Dále musí ještě platit:

   d) $x_1 + x_2 = -2\,(p-4) > 0$, tedy $p < 4$. To při zohlednění předchozí podmínky znamená, závěr že $p \in (-\infty; -6) \cup \left(0; \frac{8}{7}\right)$.

   e) $x_1 + x_2 = -2\,(p-4) < 0$, tedy $p > 4$. Ovšem to vzhledem k předchozí podmínce nemůže nastat nikdy.

4. Rovnici upravíme do tvaru

$$px^2 + 2\,(p-1)\,x + p + 1 = 0$$

a nejprve posoudíme její lineární případ pro $p = 0$. V této situaci má jediné řešení $(x = \frac{1}{2})$. Dále se zabývejme rovnicí kvadratickou, tedy pro $p \neq 0$. Její diskriminant vychází $D = 4\,(1 - 3p)$.

   a) Nastává pro $D < 0$, tedy pro $p \in \left(\frac{1}{3}; \infty\right)$.

   b) Nastává pro lineární případ rovnice nebo pro kvadratickou rovnici s nulovým diskriminantem, tedy pro $p \in \left\{0; \frac{1}{3}\right\}$.

   Další případy mohou nastat jedině pro $p < \frac{1}{3}$ a $p \neq 0$ při splnění následujících podmínek:

   c) $x_1x_2 = \frac{p+1}{p} < 0$, tedy pro $p \in (-1; 0)$.

   Pro splnění zbývajících podmínek je dále nutné, aby $x_1x_2 = \frac{p+1}{p} > 0$, tedy pro $p \in (-\infty; -1) \cup \left(0; \frac{1}{3}\right)$. Dále musí ještě platit:

   d) $x_1 + x_2 = -\frac{2(p-1)}{p} > 0$, tedy $\frac{p-1}{p} < 0$. To při zohlednění předchozí podmínky znamená, závěr že $p \in \left(0; \frac{1}{3}\right)$.

   e) $x_1 + x_2 = -\frac{2(p-1)}{p} < 0$, tedy $\frac{p-1}{p} > 0$. To při zohlednění předchozí podmínky znamená, závěr že $p \in (-\infty; -1)$.

5. Rovnice je vždy kvadratická, rovnou počítáme její diskriminant. Ten vychází $D = 4\,(1 - p^2) = 4\,(1-p)\,(1+p)$.

   a) Nastává pro $D < 0$, tedy pro $p \in (-\infty; -1) \cup (1; \infty)$.

   b) Nastává pro $D = 0$, tedy pro $p = \pm 1$.

   Další případy mohou nastat jedině pro $p \in (-1; 1)$ při splnění následujících podmínek:

   c) $x_1x_2 = p^2 < 0$, což nemůže nastat nikdy.

   Pro splnění zbývajících podmínek je dále nutné, aby $x_1x_2 = p^2 > 0$, tedy pro $p \in (-1; 1) - \{0\}$. Dále musí ještě platit:

   d) $x_1 + x_2 = 2 > 0$, což je splněno pro všechna $p \in (-1; 1) - \{0\}$.

   e) $x_1 + x_2 = 2 < 0$, takže tento případ nastat nemůže.