Nerovnice s parametry[1]

Řešené příklady.

1. V $\mathbb{R}$ vyřešte nerovnici
$$3\,(px+1) \leq 9p + x\,,$$
kde $p \in \mathbb{R}$ je parametr a x neznámá.

Řešení. Platí
$$3\,(px+1) \leq 9p + x \quad \Leftrightarrow \quad 3px - x \leq 9p - 3 \quad \Leftrightarrow \quad x\,(3p-1) \leq 3\,(3p-1)\;.$$
Na rozdíl od rovnice musíme nyní rozlišit 3 případy, neboť u nerovnice je potřebné znát i znaménko výrazu, kterým dělíme.

a) Pokud $p = \frac{1}{3}$, je řešená nerovnice tvaru $0x \leq 0$, takže je splněna pro libovolné $x \in \mathbb{R}$.

b) Když $p > \frac{1}{3}$, je $3p - 1 > 0$ a platí
$$x\,(3p-1) \leq 3\,(3p-1) \quad \Leftrightarrow \quad x \leq 3\,.$$

c) Jestliže $p < \frac{1}{3}$, pak $3p - 1 < 0$, takže
$$x\,(3p-1) \leq 3\,(3p-1) \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 3\,.$$

Závěr jako obvykle zapíšeme do tabulky

p	K
$\left\{\frac{1}{3}\right\}$	$\mathbb{R}$
$\left(\frac{1}{3};\infty\right)$	$(-\infty;3\rangle$
$\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$	$\langle 3;\infty)$

.

2. V $\mathbb{R}$ vyřešte nerovnici
$$x - 1 < \frac{2\,(2x+q)}{q^2}\,,$$
kde $q \in \mathbb{R}$ je parametr a x neznámá.

Řešení. Začneme podmínkou $q \neq 0$. V opačném případě zadaná nerovnice nemá smysl. Za uvedené podmínky je $q^2 > 0$, takže tímto výrazem můžeme uvažovanou nerovnici vynásobit a jedná se přitom o ekvivalentní úpravu. Dále platí
$$x - 1 < \frac{2\,(2x+q)}{q^2} \quad \Leftrightarrow \quad q^2\,(x-1) < 4x + 2q \quad \Leftrightarrow \quad x\left(q^2-4\right) < q^2 + 2q \quad \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \quad x\,(q-2)\,(q+2) < q\,(q+2)\;.$$
Podle znaménka výrazu $(q-2)\,(q+2)$ rozlišíme následující případy:

a) Možnost $(q-2)\,(q+2) = 0$ nastává pro dvě možné hodnoty parametru q:

   i. Pokud $q = 2$, dosazením máme $0 < 8$, což platí pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

   ii. Jestliže $q = -2$, po dosazení obdržíme $0 < 0$, což neplatí nikdy.

b) Varianta $(q-2)\,(q+2) > 0$ nastává právě tehdy, když $q \in (-\infty;-2) \cup (2;\infty)$. Potom platí
$$x\,(q-2)\,(q+2) < q\,(q+2) \quad \Leftrightarrow \quad x < \frac{q}{q-2}\,.$$

[1]Případné náměty k tomuto textu prosím adresujte na e-mail akob@jaroska.cz. Děkuji Aleš Kobza (autor materiálu).

c) Konečně situace $(q-2)(q+2) < 0$ se realizuje když a jen, když $q \in (-2; 0) \cup (0; 2)$. V tom případě při dělení záporným číslem musíme změnit znaménko nerovnosti, tedy

$$x(q-2)(q+2) < q(q+2) \quad \Leftrightarrow \quad x > \frac{q}{q-2}\,.$$

Dostáváme tak výslednou tabulku

q	K
$\{0\}$	nemá smysl
$\{2\}$	$\mathbb{R}$
$\{-2\}$	$\emptyset$
$(-\infty; -2) \cup (2; \infty)$	$\left(-\infty; \frac{q}{q-2}\right)$
$(-2; 0) \cup (0; 2)$	$\left(\frac{q}{q-2}; \infty\right)$

.

3. V $\mathbb{R}$ vyřešte nerovnici

$$\sqrt{4x^2 + 4x + 1} > 6a\,,$$

kde $a \in \mathbb{R}$ je parametr a x neznámá.

Řešení. Platí

$$\sqrt{4x^2 + 4x + 1} > 6a \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{(2x+1)^2} > 6a \quad \Leftrightarrow \quad |2x+1| > 6a \quad \Leftrightarrow \quad \left|x + \frac{1}{2}\right| > 3a\,.$$

a) Vzhledem k tomu, že absolutní hodnota je nezáporná, bude tato nerovnice pro záporná a splněna vždy.

b) Pokud $a = 0$, nebude uvedená nerovnice platit jedině v případě, kdy je výraz v absolutní hodnotě nulový, tj. pro $x = -\frac{1}{2}$.

c) Matematicky „nejzajímavější“ je pak případ, kdy $a > 0$. Zadanou nerovnici tak můžeme řešit na základě geometrického významu absolutní hodnoty. Řešená nerovnice „říká“, že hledáme taková x, jejichž vzdálenost (na číselné ose) od (obrazu) čísla $-\frac{1}{2}$ je větší než $3a$, tzn. vyhoví všechna $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2} - 3a\right) \cup \left(-\frac{1}{2} + 3a; \infty\right)$.

Uvedená zjištění už jen shrneme do tabulky

a	K
$(-\infty; 0)$	$\mathbb{R}$
$\{0\}$	$\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$
$(0; \infty)$	$\left(-\infty; -\frac{1}{2} - 3a\right) \cup \left(-\frac{1}{2} + 3a; \infty\right)$

.

4. V $\mathbb{R}$ vyřešte nerovnici

$$x^2 - 6bx + 9b^2 - 4 \leq 0\,,$$

kde $b \in \mathbb{R}$ je parametr a x neznámá.

Řešení. Platí

$$x^2 - 6bx + 9b^2 - 4 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-3b)^2 \leq 4 \quad \Leftrightarrow \quad |x - 3b| \leq 2\,.$$

Vidíme, že i v tomto případě bude výhodné využít geometrický význam absolutní hodnoty. Vzdálenost (obrazu) čísla x na číselné ose má být od (obrazu) čísla $3b$ vzdálena nejvýše o 2. Rychle tak získáváme závěr

b	K
$\mathbb{R}$	$\langle 3b - 2; 3b + 2 \rangle$

.

5. Najděte všechny hodnoty parametru $p \in \mathbb{R}$, pro něž je řešením nerovnice

$$(p-1)\,x^2 - (p-1)\,x + p + 1 > 0$$

libovolné $x \in \mathbb{R}$.

Řešení. Je-li $p = 1$, jde o nerovnici $2 > 0$, která platí pro libovolné $x \in \mathbb{R}$, takže $p = 1$ je jednou z hledaných hodnot. Dále uvažujme případ, kdy $p \neq 1$. Aby byla nerovnice vždy splněna je nutné a stačí, aby

$$D < 0 \quad \text{a} \quad p - 1 > 0\,.$$

Počítejme

$$D = [-(p-1)]^2 - 4\,(p-1)\,(p+1) = (p-1)^2 - 4\,(p-1)\,(p+1) =$$
$$= (p-1)\,[p-1-4\,(p+1)] = (p-1)\,(-3p-5) = -(p-1)\,(3p+5)\ .$$

Vidíme, že

$$D < 0 \quad \Leftrightarrow \quad p \in \left(-\infty; -\frac{5}{3}\right) \cup (1;\infty)\ .$$

Protože dále má, jak víme, ještě platit, že $p > 1$, dostáváme v této větvi výpočtu právě ta p, pro něž $p > 1$. Dohromady zjišťujeme, že vyhoví všechna $p \geq 1$, tj. $p \in \langle 1;\infty)$.

6. Najděte všechny hodnoty parametru $p \in \mathbb{R}$, pro něž nerovnice

$$(p+1)\,x^2 + (p+1)\,x + p - 1 \geq 0$$

nemá v $\mathbb{R}$ žádné řešení.

Řešení. Opět začneme lineárním případem. Pro $p = -1$ dostávámáme tvrzení $-2 \geq 0$, takže nerovnice neplatí. Hodnota $p = -1$ tedy patří mezi hledané. Dále studujme případ kvadratické nerovnice, tedy pro $p \neq -1$. Ta nebude mít žádné řešení, právě tehdy, když

$$D < 0 \quad \text{a} \quad p + 1 < 0\,.$$

Platí

$$D = (p+1)^2 - 4\,(p+1)\,(p-1) = (p+1)\,[p+1-4\,(p-1)] = (p+1)\,(5-3p)\ ,$$

takže

$$D < 0 \quad \Leftrightarrow \quad p \in (-\infty;-1) \cup \left(\frac{5}{3};\infty\right)\ .$$

Po zohledněné všech uvedených podmínek tak vidíme, že úloze vyhoví všechna $p \leq -1$, tj. $p \in (-\infty;-1\rangle$.

Zadání úloh.

1. V $\mathbb{R}$ vyřešte nerovnice s neznámou x a parametrem $p \in \mathbb{R}$

   a)
$$4\,(x+2p) \geq p\,(p+x) + 16\,,$$

   b)
$$\frac{p\,(x-1)}{p^2+6} > 1 - \frac{3\,(x+4)}{p^2+6}\,,$$

   c)
$$\frac{xp^2+2}{p} - x \leq \frac{2}{p^2}\,,$$

   d)
$$\frac{1}{1-p^2} < \frac{1-x-px}{p^2-1}\,,$$

   e)
$$\sqrt{9x^2-6x+1} \leq 6p+9\,,$$

   f)
$$\sqrt{x^2+2px+p^2} > 5\,,$$

   g)
$$x^2 - 12x + 35 \geq 25p^2 + 10p\,,$$

   h)
$$x^2 - 8px + 16p^2 - 9 < 0\,,$$

2. Najděte všechny hodnoty parametru $p \in \mathbb{R}$, pro něž má příslušná nerovnice množinu kořenů $K = \mathbb{R}$

   a)
$$(p-1)\,x^2 - (p+1)\,x + p + 1 > 0\,,$$

   b)
$$px^2 + 2px - p - 2 \leq 0\,.$$

3. Najděte všechny hodnoty parametru $p \in \mathbb{R}$, pro něž má příslušná nerovnice množinu kořenů $K = \emptyset$

   a)
$$\left(p-p^2\right)x^2 + 2px - 1 \geq 0\,,$$

   b)
$$(p-3)\,x^2 - 2px + p < 0\,,$$

Návody k řešení a výsledky úloh.

1. a) Nerovnici lze upravit do ekvivalentního tvaru $x\,(4-p) \geq (4-p)^2$,

p	K
$\{4\}$	$\mathbb{R}$
$(4;\infty)$	$(-\infty;4-p\rangle$
$(-\infty;4)$	$\langle 4-p;\infty)$

.

b) Nerovnici lze upravit do ekvivalentního tvaru $x\,(p+3) > (p+3)\,(p-2)$,

p	K
$\{-3\}$	$\emptyset$
$(-3;\infty)$	$(p-2;\infty)$
$(-\infty;-3)$	$(-\infty;p-2)$

.

c) Pro $p \neq 0$ lze nerovnici upravit do ekvivalentního tvaru

$$x\,(p-1) \leq \frac{-2\,(p-1)}{p^2},$$

p	K
$\{0\}$	nemá smysl
$\{1\}$	$\mathbb{R}$
$(-\infty;0)\cup(0;1)$	$\left\langle -\frac{2}{p^2};\infty\right)$
$(1;\infty)$	$\left(-\infty;-\frac{2}{p^2}\right\rangle$

.

d) Pro $p \neq \pm 1$ lze nerovnici upravit do ekvivalentního tvaru

$$\frac{x}{p-1} < \frac{2}{p^2-1},$$

p	K
$\{\pm 1\}$	nemá smysl
$(1;\infty)$	$\left(-\infty;\frac{2}{p+1}\right)$
$(-\infty;1)-\{-1\}$	$\left(\frac{2}{p+1};\infty\right)$

.

e) Nerovnici lze upravit do ekvivalentního tvaru $\left|x-\frac{1}{3}\right| \leq 2p+3$,

p	K
$\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right)$	$\emptyset$
$\left\{-\frac{3}{2}\right\}$	$\left\{\frac{1}{3}\right\}$
$\left(-\frac{3}{2};\infty\right)$	$\left\langle -2p-\frac{8}{3};2p+\frac{10}{3}\right\rangle$

.

f) Nerovnici lze upravit do ekvivalentního tvaru $|x+p| > 5$,

p	K
$\mathbb{R}$	$(-\infty;-p-5)\cup(-p+5;\infty)$

.

g) Přičtěte k oběma stranám nerovnice 1 a všimněte si, že se jedná o úplné čtverce (kvadráty). Nerovnici pak lze upravit do ekvivalentního tvaru $|x-6| \geq |5p+1|$,

p	K
$\left\{-\frac{1}{5}\right\}$	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{5}\right\}$	$(-\infty;6-\lvert 5p+1\rvert\rangle \cup \langle 6+\lvert 5p+1\rvert;\infty)$

.

h) Nerovnici lze upravit do ekvivalentního tvaru $|x-4p| < 3$,

p	K
$\mathbb{R}$	$(4p-3; 4p+3)$

.

2. Výpočet je podobný jako v příkladu 5.
   a) Pro $p \neq 1$ je třeba, aby $p > 1$ a současně $D = (5-3p)(p+1) < 0$. Vyhovují všechna $p > \frac{5}{3}$.
   b) Pro $p \neq 0$ je třeba, aby $p < 0$ a současně $D = 8p(p+1) \leq 0$. Vyhovují všechna $p \in \langle -1; 0)$.
3. Výpočet je podobný jako v příkladu 6.
   a) Platí právě pro všechna $p \leq 0$ (diskriminant příslušné kvadratické nerovnice je $D = 4p$).
   b) Nevyhoví žádné p, neboť diskriminant příslušné kvadratické nerovnice, který má být nekladný, je $D = 12p$ (tzn. $p \leq 0$) a současně má být $p > 3$.