Kvadratické trojčleny [1]

Rozklady na součin

Zadání Rozložte zpaměti na součin následující trojčleny.

1. $$x^2+5x-24\,,\quad x^2-10x+16\,,\quad x^2+8x-20\,,$$
2. $$x^2+15x+14\,,\quad x^2-3x-40\,,\quad x^2+x-30\,,$$
3. $$2x^2-7x+5\,,\quad 3x^2+5x-2\,,\quad 2x^2+7x-4\,,$$
4. $$3x^2-4x-4\,,\quad 4x^2+13x+3\,,\quad 4x^2+4x-3\,.$$

Výsledky

1. $$x^2+5x-24=(x+8)\,(x-3)\;,\quad x^2-10x+16=(x-2)\,(x-8)\;,\quad x^2+8x-20=(x+10)\,(x-2)\;,$$
2. $$x^2+15x+14=(x+14)\,(x+1)\;,\quad x^2-3x-40=(x-8)\,(x+5)\;,\quad x^2+x-30=(x-5)\,(x+6)\;,$$
3. $$2x^2-7x+5=(2x-5)\,(x-1)\;,\quad 3x^2+5x-2=(3x-1)\,(x+2)\;,\quad 2x^2+7x-4=(2x-1)\,(x+4)\;,$$
4. $$3x^2-4x-4=(3x+2)\,(x-2)\;,\quad 4x^2+13x+3=(4x+1)\,(x+3)\;,\quad 4x^2+4x-3=(2x+3)\,(2x-1)\;.$$

Doplnění na čtverec

Doplněním na čtverec rozumíme úpravu využívající vzorce $a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$, při níž trojčlen obsahující jistou proměnnou ve dvou sčítancích (s kvadrátem a lineárně) převedeme do tvaru, kdy se tato proměnná v jisté závorce umocněné na druhou (v tzv. čtverci) vyskytuje už pouze jednou.

Řešený příklad Doplňte na čtverec
$$-2x^2+x-1\,.$$

Řešení

$$-2x^2+x-1=-2\left(x^2-\frac{x}{2}\right)-1=-2\left[\left(x-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{16}\right]-1=-2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{7}{8}\,.$$

Úlohy k procvičení Doplňte na čtverec

$$x^2+x+1\,,\quad -x^2+2x+1\,,\quad 3x^2-9x+6\,,\quad \sqrt{2}x^2+\sqrt{8}x+\sqrt{18}\,.$$

[1] Případné náměty k tomuto textu prosím adresujte na e-mail akob@jaroska.cz. Děkuji Aleš Kobza (autor materiálu).

Výsledky

$$x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\,,\qquad -x^2+2x+1=-\left(x-1\right)^2+2\,,$$
$$3x^2-9x+6=3\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{3}{4}\,,\qquad \sqrt{2}x^2+\sqrt{8}x+\sqrt{18}=\sqrt{2}\left(x+1\right)^2+2\sqrt{2}\,.$$

Doplnění na čtverec s následným rozkladem na součin

V následujících úlohách po doplnění na čtverec provedeme ještě úpravu, která využívá vzorce $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$, po níž získáme původní výraz rozložený na součin.

Řešený příklad Doplňte na čtverec a poté rozložte na součin

$$3x^2+30x+63\,.$$

Řešení

$$3x^2+30x+63=3\left(x^2+10x\right)+63=3\left[\left(x+5\right)^2-25\right]+63=3\left(x+5\right)^2-12=$$
$$=3\left[\left(x+5\right)^2-4\right]=3\left(x+5+2\right)\left(x+5-2\right)=3\left(x+7\right)\left(x+3\right)\,.$$

Úlohy k procvičení Doplňte na čtverec a poté rozložte na součin

$$2x^2+8x+6\,,\quad -x^2+6x+7\,,\quad 2x^2+16x+14\,,\quad -2x^2-12x-10\,.$$

Výsledky

$$2x^2+8x+6=2\left(x+1\right)\left(x+3\right)\,,\quad -x^2+6x+7=-\left(x-7\right)\left(x+1\right)\,,$$
$$2x^2+12x-14=2\left(x+7\right)\left(x-1\right)\,,\quad -2x^2-12x-10=-2\left(x+1\right)\left(x+5\right)\,.$$

Doplnění na čtverec s následným určením extrému

V následujících úlohách po doplnění na čtverec provedeme diskusi o existenci extrému (minima či maxima) příslušného výrazu (tj. jaký typ extrému nastává, v jakém bodě nastává a jaká je jeho hodnota).

Řešený příklad Doplňte na čtverec a poté najděte extrém

$$V\left(x\right)=-2x^2+12x+3\,.$$

Řešení

$$V\left(x\right)=-2x^2+12x+3=-2\left(x^2-6x\right)+3=-2\left[\left(x-3\right)^2-9\right]+3=-2\left(x-3\right)^2+21\,.$$

Výraz $-2\left(x-3\right)^2$ je nekladný, pro $x=3$ nabývá své maximální (nulové) hodnoty. Proto $V^{max}\left(3\right)=21$.

Úlohy k procvičení Doplňte na čtverec a poté najděte extrém

$$V_1\left(x\right)=2x^2-8x+5\,,\quad V_2\left(x\right)=-x^2+10x+7\,,\quad V_3\left(x\right)=3x^2+18x-4\,,\quad V_4\left(x\right)=-2x^2-16x+5\,.$$

Výsledky

$$V_1\left(x\right)=2x^2-8x+5=2\left(x-2\right)^2-3\quad\Rightarrow\quad V_1^{min}\left(2\right)=-3\,,$$
$$V_2\left(x\right)=-x^2+10x+7=-\left(x-5\right)^2+32\quad\Rightarrow\quad V_2^{max}\left(5\right)=32\,,$$
$$V_3\left(x\right)=3x^2+18x-4=3\left(x+3\right)^2-31\quad\Rightarrow\quad V_3^{min}\left(-3\right)=-31\,,$$
$$V_4\left(x\right)=-2x^2-16x+5=-2\left(x+4\right)^2+37\quad\Rightarrow\quad V_4^{max}\left(-4\right)=37\,.$$