

# Kvantifikátory

Předpokládejme, že žáci znají pojmy jako **výrok**, **konjunkce**, **disjunkce**, **implikace**, **ekvivalence**, **negace**.

**Výroková formule** je věta, která má tvar výroku, obsahuje však proměnné objekty, na kterých pravdivost věty závisí.

Jinými slovy - nevíme, kdy dané tvrzení platí.

**Kvantifikátor** je výraz, který vyjadřuje, pro kolik hodnot nebo objektů dané tvrzení platí. Procesu, kdy řekneme, pro kolik hodnot tvrzení platí, se říká **kvantifikace**.

Kvantifikátorem může být třeba: „alespoň 3“, „nejvýše 128“, „nekonečně mnoho“ nebo „všechny“.

Jsou dva základní kvantifikátory: **obecný** ( $\forall$ ) a **existenční** ( $\exists$ ).

Obecný kvantifikátor nám určuje, že dané tvrzení platí **pro všechny** prvky, **pro každý** prvek nebo **pro jakýkoliv** prvek.

Existenční kvantifikátor říká, že tvrzení platí **pro alespoň jeden** prvek, nebo že **existuje aspoň jeden** prvek.

Výrokové formule, které jsme kvantifikovali se tedy stávají výroky.

Pojďme si ukázat několik formálně zapsaných výroků.

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, n > 1 : 6 \mid n^3 - n$$

$$\exists x \in \mathbb{Q} : x < -2\,356\,987\,416\,983$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R} : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

**Negace** kvantifikovaných výroků se provádí následovně:

Kvantifikátor	Negace kvantifikátoru
Pro každý prvek	Existuje alespoň jeden prvek, pro který tvrzení neplatí
Existuje prvek	Tvrzení neplatí pro žádný prvek
Alespoň 5	4 a méně
Právě 13	Nejvýše 12 nebo alespoň 14
Nejvýše 1	Alespoň 2
Méně než 100	100 a více

Jak můžeme vidět, negaci existenčního kvantifikátoru provádíme pomocí obecného a naopak.

Pro zajímavost můžete uvést negaci složeného výroku:

Všechny pastelky se mi vysypaly na zem a polámaly se jim tuhy. Některá pastelka mi nespadla na zem nebo se jí nezlomila tuha.

Nejdříve bych zmínila pojmy, se kterými budeme pracovat.

**Př.:**  $a^2 + b^2 = c^2$ . Čísla jsou kladná. Mimoszemšťané mluví anglicky.

**Př.:** Alespoň 3 žáci navštěvují kurz plavání. V soutěži bylo možno vyhrát nejvýše 128 bonbonů. Všechny kachny přežily výbuch jaderné elektrárny. Žádný lumík nepřežil havárii nákladního letadla.

**Př.:** Existují hodnoty proměnných  $a, b, c$ , pro které platí  $a^2 + b^2 = c^2$ . Existuje alespoň jedno číslo, které je kladné. Žádní mimozemšťané nemluví anglicky.

Přečíst, ne jen napsat.

2 biliony 356 miliard 987 milionů 416 tisíc 983

Když je chcete vyděsit.

**Př. na procvičení:**

Znegujte:

Výrok	Negace
Na výletě jsme viděli více než 3 houby.	Na výletě jsme viděli tři a méně hub.
Lev sežral méně než čtyři štěňátka.	Lev sežral čtyři a více štěňátek.
Všichni krokodýli se jmenují Fred.	Aspoň jeden krokodýl se Fred nejmenuje.
Všechny domy mají právě tři patra.	Existuje dům, který má dvě a méně nebo více než tři patra.
Existuje učitel, který má nejméně pět rukou.	Všichni učitelé mají nejvýše čtyři ruce.