**Hyperbola – základní příklady:** SÚM Petáková:

Př. 1 Str. 126/př. 41

Načrtněte hyperbolu (určete střed S, délky poloos a, b, excentricitu e, vrcholy A, B, ohniska F, G, rovnice asymptot):

a) H: 4x2 – 9y2 = 36

Řeš.: 1. krok – převod rovnice hyperboly do středového tvaru:

 4x2 – 9y2 = 36 /: 36  S[0; 0], a = 3, b = 2, e = 

a1

2. krok – náčrt hyperboly:

y

H

2

b

G

F

S

A

B

e

a





x

a

3

-3

-2

a2

3. krok – závěr: S[0; 0], a = 3, b = 2, e =, A[-3; 0], B[3; 0], F[; 0], G[; 0], a1: y = , a2: y = 

c) H: - 9x2 + 4y2 = 36

Řeš.: 1. krok – převod rovnice hyperboly do středového tvaru:

-9x2 + 4y2 = 36 /: 36  S[0; 0], a = 3, b = 2, e = 

H

2. krok – náčrt hyperboly:

a1

y

a2



G

3

B

a

S

2

-2

x

b

e

-3

A



F

3. krok – závěr: S[0; 0], a = 3, b = 2, e =, A[0;-3], B[0;3], F[0;], G[0;],

 a1: y = , a2: y = 

e) H: (x – 1)2 – 4.(y + 2)2 = 16

Řeš.: 1. krok – převod rovnice hyperboly do středového tvaru:

H: (x – 1)2 – 4.(y + 2)2 = 16 / :16  S[1; -2], a = 4, b = 2, e =

2. krok – náčrt hyperboly:

y

a1

H

-3

5

1

x

e

a

b

-2

G

B

S

A

F

a2



3. krok – rovnice asymptot:

 a1: y =  a2: y =  Sa1 … -2 =  Sa2 … -2 = 

 q =  q =  a1: y =  a2: y = 

 a1: x – 2y – 5 = 0 a2: x + 2y + 3 = 0

4. krok – závěr: S[1; -2], a = 4, b = 2, e =, A[-3; -2], B[5; -2], a1: x – 2y – 5 = 0, a2: x + 2y + 3 = 0

Př. 2 Str. 126/př. 43

Napište rovnici hyperboly s ohnisky F[1; 1], G[1; 11] a vedlejší poloosou o délce b = 4.

Řeš.: 1. krok – náčrt – v soustavě souřadnic vyznačíme zadané prvky – obě ohniska F a G, střed S úsečky FG a po výpočtu délky hlavní poloosy a také obdélník s délkami stran 2a, 2b, jehož úhlopříčkami jsou proloženy asymptoty hyperboly.

 S =  S[1; 6], e = = 5, a = = 3

a1

y

H

G

11

B

9

a

b

6

S

3

A

F

1

x

-3

5

1

a2

3. krok – závěr: H: 

Př. 3 Str. 126/př. 51

Napište rovnici hyperboly, víte-li, že její asymptoty jsou přímky a1: y = 2x - 6, a2: y = -2x + 6 a jedno ohnisko je F[-2; 0]

Řeš.: 1. krok – výpočet souřadnic středu hyperboly a výpočet poloos a, b

* Střed S hyperboly je průsečík asymptot:

a1: y = 2x – 6

 a2: y = -2x + 6

 2y = 0 → y = 0 → x = 3 S[3; 0]

* Výpočet poloos: 1) e = 

 2) rce asymptot … a: y =   b = 2a

 3) e2 = a2 + b2 e2 = a2 + (2a)2 e2 = 5a2

 25 = 5a2 a =  , b = 2.

2. krok – náčrt

a1

y

F[-2; 0], G[8; 0],

S[3; 0],

A,

B 

H

G

F

B

A

S

3

8

-2

x

a2

3. krok – závěr: H: 

Př. 4 Str. 126/př. 45

Napište rovnici rovnoosé hyperboly s ohnisky F[-6; 2], G[14; 2]

Řeš.: 1. krok – výpočet souřadnic středu hyperboly a výpočet poloos a, b

 e =  S[4; 2]

Hyperbola má být rovnoosá a = b e2 = a2 + b2 = a2 + a2 = 2a2 100 = 2a2 a = b = 

 2. krok – závěr: H: 

Př. 5 Str. 128/př. 76

Úpravou na středový tvar rovnice dokažte, že jde o rovnici hyperboly, určete délky poloos a excentricity, souřadnice středu, vrcholů a ohnisek a určete rovnice obou asymptot:

f) H: x2 - 4y2 +4x – 4y + 2 = 0

Řeš.: 1. krok – převod rovnice z obecného do středového tvaru

 H: (x2 +4x + 4) – 4.(y2 + y + ) = -2 + 4 – 1

 H: 

 H:  S[-2;], a = 1, b = , e = 

 2. krok – náčrt – v soustavě souřadnic načrtneme hyperbolu (poloha hyperboly je dána typem středové rovnice):

a1

H

-2

G

F

B

A

S



a2

3. krok – rovnice asymptot:

 a1: y =  a2: y =  Sa1 …  =  Sa2 … = 

 q =  q =  a1: y =  a2: y = 

 a1: x – 2y + 1 = 0 a2: x + 2y + 3 = 0

 4. krok – závěr: S[-2;], a = 1, b = , e = , A[-3;], B[-1;],

 F[-2 - ;], G[-2 +;], a1: x – 2y + 1 = 0, a2: x + 2y + 3 = 0

Př. 6 Str. 129/př. 81

Vyšetřete vzájemnou polohu přímky p a hyperboly H:

b) H: 2x2 – y2 – 2x - 5 = 0, p: 3x – y – 5 = 0

Řeš.: 1. krok – o vzájemné poloze rozhoduje počet společných bodů. Řešíme tedy soustavu dvou rovnic o dvou neznámých: H: 2x2 - y2 – 2x - 5 = 0 p: 3x – y – 5 = 0 → y = 3x - 5 y = 3x - 5 2x2 – (3x – 5)2 – 2x - 5 = 0

 2x2 – 9x2 + 30x – 25 – 2x - 5 = 0

 -7x2 + 28x - 30 = 0

 diskriminant této kvadratické rovnice D = 784 – 840 = -56 < 0 neexistuje řešení soustavy neexistují společné body

 2. krok – závěr: přímka p je vnější přímkou hyperboly

d) H: 4x2 – y2 – 4= 0, p: 2x – y + 4 = 0

Řeš.: 1. krok – o vzájemné poloze rozhoduje počet společných bodů. Řešíme tedy soustavu dvou rovnic o dvou neznámých: H: 4x2 – y2 – 4= 0

 p: 2x – y + 4 = 0 → y = 2x + 4

 4x2 – (2x + 4)2 – 4 = 0

 4x2 – 4x2 – 16x – 16 – 4 = 0

 16x = -20

 x =  y = 

 jediné společné řešení – jediný společný bod

 2. krok – rozhodnutí o vzájemné poloze – jediný společný bod má přímka s hyperbolou ve dvou případech: ― je-li přímka rovnoběžná s jednou z asymptot ― je-li přímka tečnou

 O tom, který z těchto dvou případů nastal, rozhodneme tak, že najdeme směrnice obou asymptot a srovnáme je se směrnicí zadané přímky p. Pokud se směrnice přímky p bude rovnat směrnici jedné z asymptot, půjde o rovnoběžku s touto asymptotou (tzv. asymptotickou přímku), v opačném případě bode přímka tečnou hyperboly.

 H: 4x2 – y2 – 4= 0

 4x2 – y2 = 4 /:4

  a = 1, b = 2 ka =  kp = 2

 3. krok – závěr: p je asymptotická přímka hyperboly, společný bod je P[;]

Př. 7 Str. 130/př. 90

Ověřte, že bod T leží na dané hyperbole. Potom napište rovnici tečny hyperboly v jejím bodě T:

m) moje T[1; 3], H: 4x2 – y2 - 24x + 2y + 23 = 0

Řeš.: 1. krok – ověření, že bod T leží na hyperbole H

 *l*(x, y) = 4x2 – y2 - 24x + 2y + 23

 *l*(xT, yT) = 4.12 – 32 – 24.1 + 2.3 + 23 = 4 – 9 –24 + 6 + 23 = 0 → TH

 2. krok – převod rovnice hyperboly z obecného do středového tvaru

 H: 4x2 – y2 - 24x + 2y + 23 = 0

 4.(x2 – 6x + 9) – (y2 – 2y + 1) = -23 + 36 – 1

 4.(x – 3)2 – (y – 1)2 = 12 /:12

 H: 

 3. krok – rovnice tečny hyperboly:

 t:  Tt … 

  /.6

 -4.(x – 3) – y + 1 = 6

 -4x – y + 7 = 0

 4. krok – závěr: Rovnice tečny zadané hyperboly bodem T je t: - 4x – y + 7 = 0