Hyperbola – základní příklady: SÚM Petáková:

Př. 1 Str. 126/př. 41

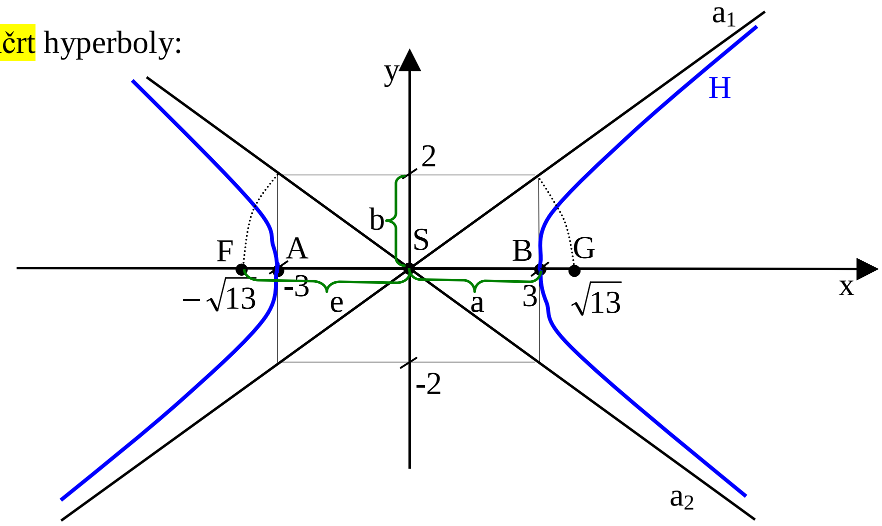
Načrtněte hyperbolu (určete střed S, délky poloos a, b, excentricitu e, vrcholy A, B, ohniska F, G, rovnice asymptot):

a) H: $4x^2 - 9y^2 = 36$

Řeš.: 1. krok – převod rovnice hyperboly do středového tvaru:

$$4x^2 - 9y^2 = 36\ /: 36 \Longrightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1 \Longrightarrow S[0;\ 0],\quad a = 3,\ b = 2,\ e = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{13}$$

2. krok – náčrt hyperboly:



3. krok – závěr: $S[0;\ 0]$, $a = 3$, $b = 2$, $e = \sqrt{13}$, $A[-3;\ 0]$, $B[3;\ 0]$, $F[-\sqrt{13};\ 0]$, $G[13;\ 0]$,

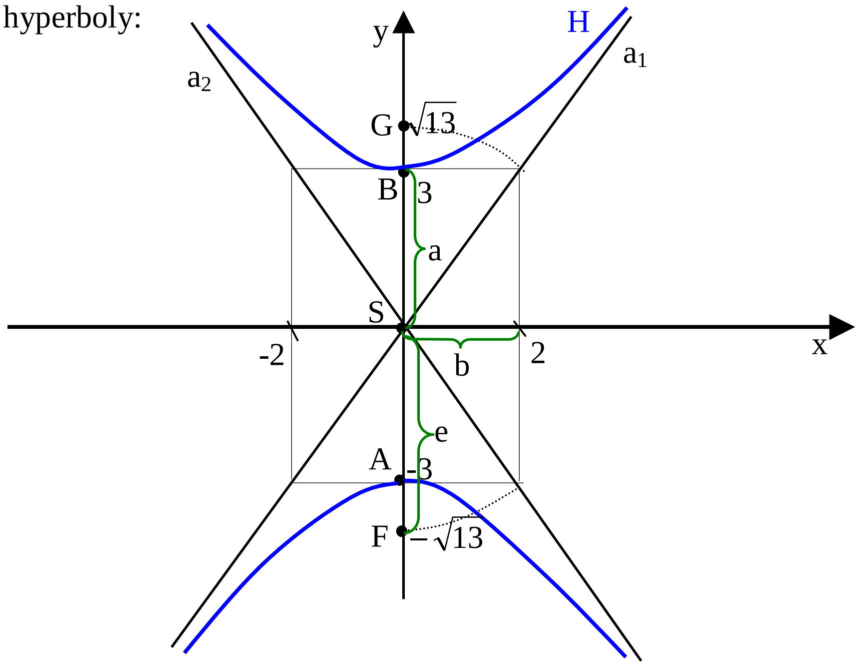
a_1: $y = \frac{2}{3}x$, a_2: $y = -\frac{2}{3}x$

c) H: $-9x^2 + 4y^2 = 36$

Řeš.: 1. krok – převod rovnice hyperboly do středového tvaru:

$$-9x^2 + 4y^2 = 36\ /: 36 \Longrightarrow -\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow S[0;\ 0],\quad a = 3,\ b = 2,\ e = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{13}$$

2. krok – náčrt hyperboly:



3. krok – závěr: S[0; 0], a = 3, b = 2, e = $\sqrt{13}$, A[0;-3], B[0;3], F[0; $-\sqrt{13}$], G[0; $\sqrt{13}$],

a_1: y = $\frac{3}{2}x$, a_2: y = $-\frac{3}{2}x$

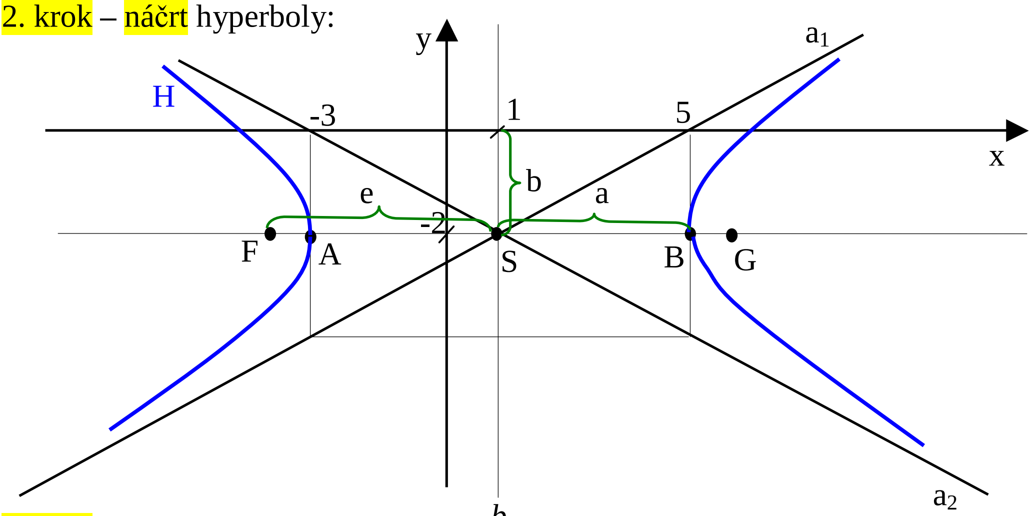
e) H: $(x-1)^2 - 4.(y+2)^2 = 16$

Řeš.: 1. krok – převod rovnice hyperboly do středového tvaru:

H: $(x-1)^2 - 4.(y+2)^2 = 16$ / :16 $\Rightarrow \frac{(x-1)^2}{16} - \frac{(y+2)^2}{4} = 1 \Rightarrow$ S[1; -2],

a = 4, b = 2, e = $\sqrt{a^2+b^2} = 2\sqrt{5}$

2. krok – náčrt hyperboly:



3. krok – rovnice asymptot: $a: y = \pm\frac{b}{a}x + q$

a_1: y = $\frac{2}{4}x + q$ S∈ a_1 … -2 = $\frac{1}{2}.1 + q$ q = $-\frac{5}{2}$ a_1: y = $\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}$ a_1: x – 2y – 5 = 0	a_2: y = $-\frac{2}{4}x + q$ S∈ a_2 … -2 = $-\frac{1}{2}.1 + q$ q = $-\frac{3}{2}$ a_2: y = $-\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ a_2: x + 2y + 3 = 0

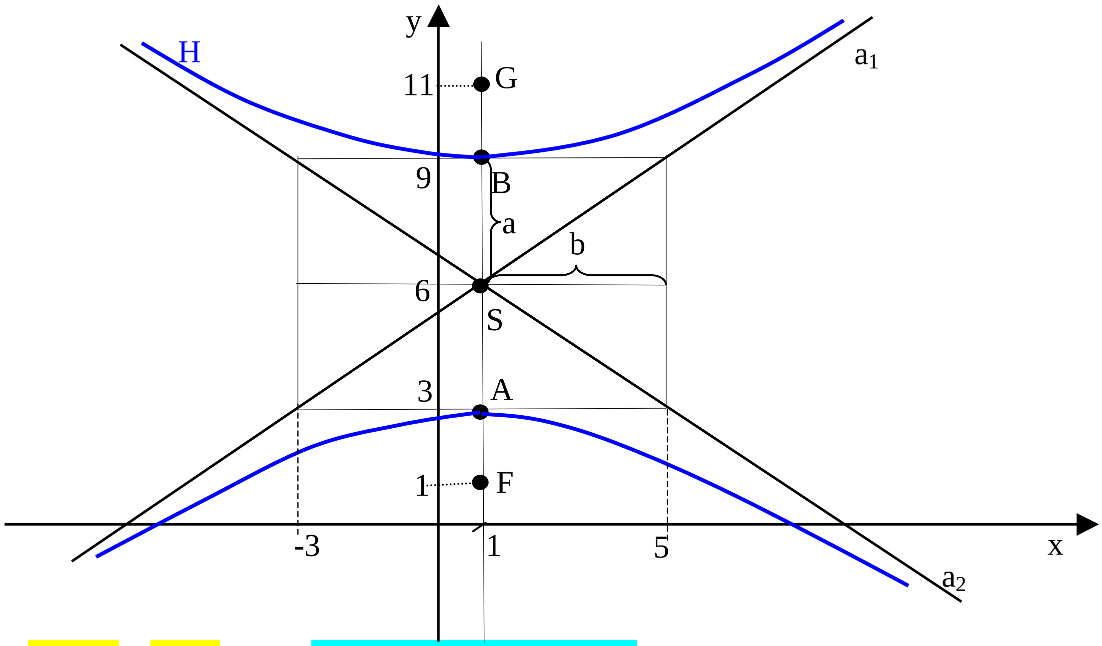
4. krok – závěr: S[1; -2], a = 4, b = 2, e = $2\sqrt{5}$, A[-3; -2], B[5; -2],
a_1: x – 2y – 5 = 0, a_2: x + 2y + 3 = 0

Př. 2 Str. 126/př. 43

Napište rovnici hyperboly s ohnisky F[1; 1], G[1; 11] a vedlejší poloosou o délce b = 4.

Řeš.: 1. krok – náčrt – v soustavě souřadnic vyznačíme zadané prvky – obě ohniska F a G, střed S úsečky FG a po výpočtu délky hlavní poloosy a také obdélník s délkami stran 2a, 2b, jehož úhlopříčkami jsou proloženy asymptoty hyperboly.

S = $\frac{F+G}{2}$ $\Rightarrow$ S[1; 6], e = $\frac{|FG|}{2}$ = 5, a = $\sqrt{e^2-b^2}$ = 3



3. krok – závěr: $\quad H: -\frac{(x-1)^2}{16}+\frac{(y-6)^2}{9}=1$

Př. 3 Str. 126/př. 51

Napište rovnici hyperboly, víte-li, že její asymptoty jsou přímky a_1: y = 2x - 6, a_2: y = -2x + 6 a jedno ohnisko je F[-2; 0]

Řeš.: 1. krok – výpočet souřadnic středu hyperboly a výpočet poloos a, b

- Střed S hyperboly je průsečík asymptot:

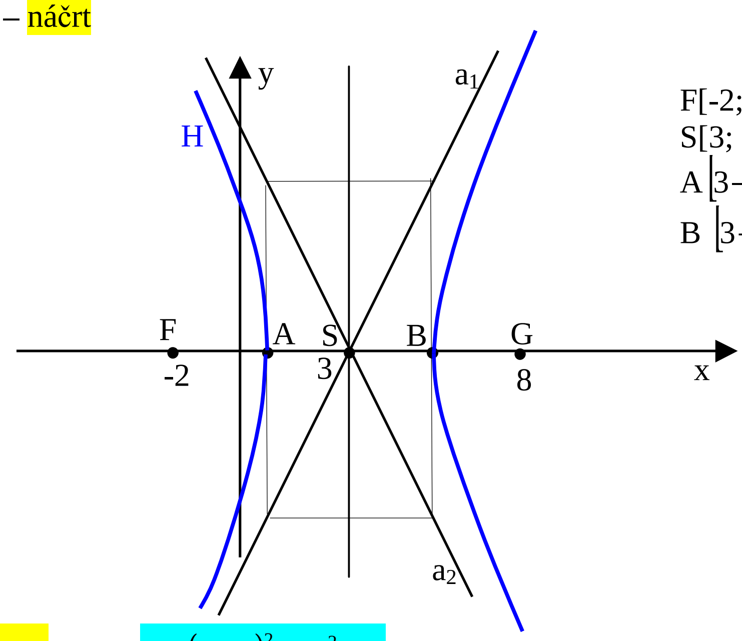
$$\begin{array}{l} a_1: y = 2x - 6 \\ \underline{a_2: y = -2x + 6} \\ 2y = 0 \ \rightarrow\ y = 0 \ \rightarrow\ x = 3 \ \Longrightarrow\ S[3;\,0] \end{array}$$

- Výpočet poloos: 1) e = $|FS| = 5$

2) rce asymptot … a: y = $\pm\frac{b}{a}x+q \Longrightarrow \frac{b}{a}=2 \Longrightarrow b = 2a$

3) $e^2 = a^2 + b^2 \Longrightarrow e^2 = a^2 + (2a)^2 \Longrightarrow e^2 = 5a^2 \Longrightarrow 25 = 5a^2 \Longrightarrow a = \sqrt{5}\,,\quad b = 2.\sqrt{5}$

2. krok – náčrt



F[-2; 0], G[8; 0],
S[3; 0],
$A\left[3-\sqrt{5};0\right]$,
$B\left[3+\sqrt{5};0\right]$

3. krok – závěr: $\quad H: \frac{(x-3)^2}{5}-\frac{y^2}{20}=1$

Př. 4 Str. 126/př. 45

Napište rovnici rovnoosé hyperboly s ohnisky F[-6; 2], G[14; 2]

Řeš.: 1. krok – výpočet souřadnic středu hyperboly a výpočet poloos a, b

$e = \frac{|FG|}{2} = \frac{20}{2} = 10 \implies S[4; 2]$

Hyperbola má být rovnoosá $\implies$ a = b $\implies$ $e^2 = a^2 + b^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \implies$

$\implies 100 = 2a^2 \implies a = b = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

2. krok – závěr: H: $\frac{(x-4)^2}{50} - \frac{(y-2)^2}{50} = 1$

Př. 5 Str. 128/př. 76

Úpravou na středový tvar rovnice dokažte, že jde o rovnici hyperboly, určete délky poloos a excentricity, souřadnice středu, vrcholů a ohnisek a určete rovnice obou asymptot:

f) H: $x^2 - 4y^2 + 4x - 4y + 2 = 0$

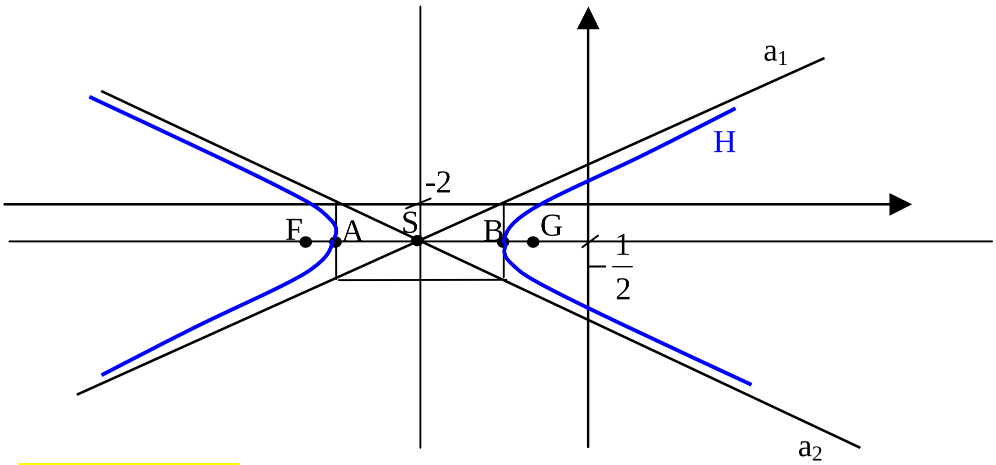
Řeš.: 1. krok – převod rovnice z obecného do středového tvaru

H: $(x^2 + 4x + 4) - 4.(y^2 + y + \frac{1}{4}) = -2 + 4 - 1$

H: $(x+2)^2 - 4\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 1$

H: $\frac{(x+2)^2}{1} - \frac{\left(y+\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{4}} = 1 \implies S[-2; -\frac{1}{2}]$, a = 1, b = $\frac{1}{2}$, e = $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

2. krok – náčrt – v soustavě souřadnic načrtneme hyperbolu (poloha hyperboly je dána typem středové rovnice):



3. krok – rovnice asymptot:

a_1: $y = \frac{1}{2}x + q$	a_2: $y = -\frac{1}{2}x + q$
$S \in a_1$ … $-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.(-2) + q$	$S \in a_2$ … $-\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.(-2) + q$
$q = \frac{1}{2}$	$q = -\frac{3}{2}$
a_1: $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$	a_2: $y = -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$
a_1: $x - 2y + 1 = 0$	a_2: $x + 2y + 3 = 0$

4. krok – závěr: S[-2; $-\frac{1}{2}$], a = 1, b = $\frac{1}{2}$, e = $\frac{\sqrt{5}}{2}$, A[-3; $-\frac{1}{2}$], B[-1; $-\frac{1}{2}$],

F[-2 - $\frac{\sqrt{5}}{2}$; $-\frac{1}{2}$], G[-2 + $\frac{\sqrt{5}}{2}$; $-\frac{1}{2}$], a_1: x – 2y + 1 = 0, a_2: x + 2y + 3 = 0

Př. 6 Str. 129/př. 81

Vyšetřete vzájemnou polohu přímky p a hyperboly H:

b) H: $2x^2 - y^2 - 2x - 5 = 0$, p: $3x - y - 5 = 0$

Řeš.: 1. krok – o vzájemné poloze rozhoduje počet společných bodů. Řešíme tedy soustavu dvou rovnic o dvou neznámých:

$$\begin{aligned} &H: 2x^2 - y^2 - 2x - 5 = 0 \\ &p: 3x - y - 5 = 0 \rightarrow y = 3x - 5 \\ &y = 3x - 5 \\ &2x^2 - (3x - 5)^2 - 2x - 5 = 0 \\ &2x^2 - 9x^2 + 30x - 25 - 2x - 5 = 0 \\ &\underbrace{-7x^2 + 28x - 30 = 0} \end{aligned}$$

diskriminant této kvadratické rovnice D = 784 – 840 = -56 < 0 $\Longrightarrow$
$\Longrightarrow$ neexistuje řešení soustavy $\Longrightarrow$ neexistují společné body

2. krok – závěr: přímka p je vnější přímkou hyperboly

d) H: $4x^2 - y^2 - 4 = 0$, p: $2x - y + 4 = 0$

Řeš.: 1. krok – o vzájemné poloze rozhoduje počet společných bodů. Řešíme tedy soustavu dvou rovnic o dvou neznámých:

$$\begin{aligned} &H: 4x^2 - y^2 - 4 = 0 \\ &p: 2x - y + 4 = 0 \rightarrow y = 2x + 4 \\ &4x^2 - (2x + 4)^2 - 4 = 0 \\ &4x^2 - 4x^2 - 16x - 16 - 4 = 0 \\ &16x = -20 \\ &\underbrace{x = -\frac{5}{4} \Longrightarrow y = \frac{3}{2}} \end{aligned}$$

jediné společné řešení – jediný společný bod

2. krok – rozhodnutí o vzájemné poloze – jediný společný bod má přímka s hyperbolou ve dvou případech:
- je-li přímka rovnoběžná s jednou z asymptot
- je-li přímka tečnou

O tom, který z těchto dvou případů nastal, rozhodneme tak, že najdeme směrnice obou asymptot a srovnáme je se směrnicí zadané přímky p. Pokud se směrnice přímky p bude rovnat směrnici jedné z asymptot, půjde o rovnoběžku s touto asymptotou (tzv. asymptotickou přímku), v opačném případě bode přímka tečnou hyperboly.

$$\begin{aligned} H: \ &4x^2 - y^2 - 4 = 0 \\ &4x^2 - y^2 = 4 \ /:4 \\ &\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{4} = 1 \Longrightarrow a = 1,\ b = 2 \Longrightarrow k_a = \pm\frac{b}{a} = \pm 2 \quad k_p = 2 \end{aligned}$$

3. krok – závěr: p je asymptotická přímka hyperboly, společný bod je P[$-\frac{5}{4}$; $\frac{3}{2}$]

Př. 7 Str. 130/př. 90

Ověřte, že bod T leží na dané hyperbole. Potom napište rovnici tečny hyperboly v jejím bodě T:

m) moje T[1; 3], H: $4x^2 - y^2 - 24x + 2y + 23 = 0$

Řeš.: 1. krok – ověření, že bod T leží na hyperbole H

$l(x, y) = 4x^2 - y^2 - 24x + 2y + 23$

$l(x_T, y_T) = 4.1^2 - 3^2 - 24.1 + 2.3 + 23 = 4 - 9 - 24 + 6 + 23 = 0 \rightarrow T \in H$

2. krok – převod rovnice hyperboly z obecného do středového tvaru

H: $4x^2 - y^2 - 24x + 2y + 23 = 0$

$4.(x^2 - 6x + 9) - (y^2 - 2y + 1) = -23 + 36 - 1$

$4.(x - 3)^2 - (y - 1)^2 = 12 \ /:12$

$$H: \frac{(x-3)^2}{3} - \frac{(y-1)^2}{12} = 1$$

3. krok – rovnice tečny hyperboly:

$$t: \frac{(x_0-3).(x-3)}{3} - \frac{(y_0-1).(y-1)}{12} = 1$$

$$T \in t \ \ldots \ \frac{(1-3).(x-3)}{3} - \frac{(3-1).(y-1)}{12} = 1$$

$$\frac{-2.(x-3)}{3} - \frac{(y-1)}{6} = 1 \ /.6$$

$-4.(x - 3) - y + 1 = 6$

$-4x - y + 7 = 0$

4. krok – závěr: Rovnice tečny zadané hyperboly bodem T je t: $-4x - y + 7 = 0$