01 Množiny – met.

Stručný přehled teorie

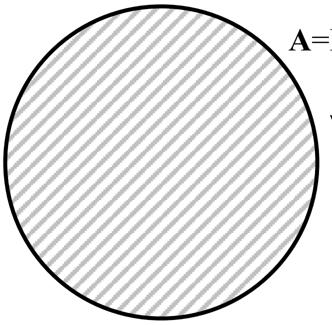
Množina = skupina (soubor) objektů, tzv. prvků množiny, s danou vlastností.

Zadání množiny: 1) výčtem prvků $A=\{1,2,3\}$
2) charakteristickou vlastností $B=\{x\in\mathbf{R}\ ;\ 2<x\leq 5\}$
3) graficky (číselná osa, Vennovy diagramy, ...)

Množina **M** je zadána, lze-li o libovolném prvku x říct, zda je ($x\in\mathbf{M}$) či není ($x\notin\mathbf{M}$), jejím prvkem.

Vztahy mezi množinami:

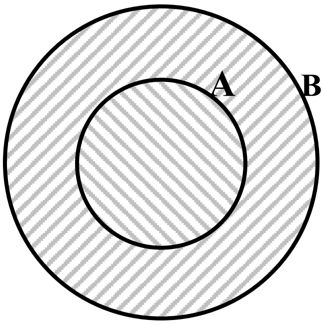
Rovnost



A=B

$\forall x : x\in A \Leftrightarrow x\in B$

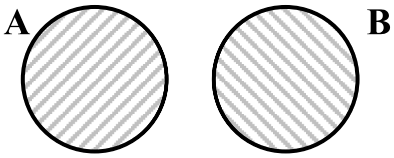
Inkluze



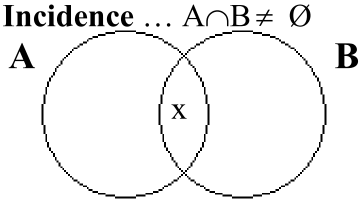
A⊆B

$\forall x : x\in A \Rightarrow x\in B$

Disjunkce … $A\cap B=\emptyset$

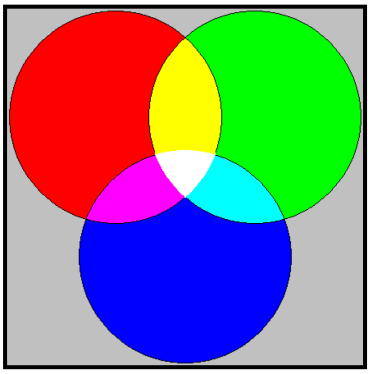


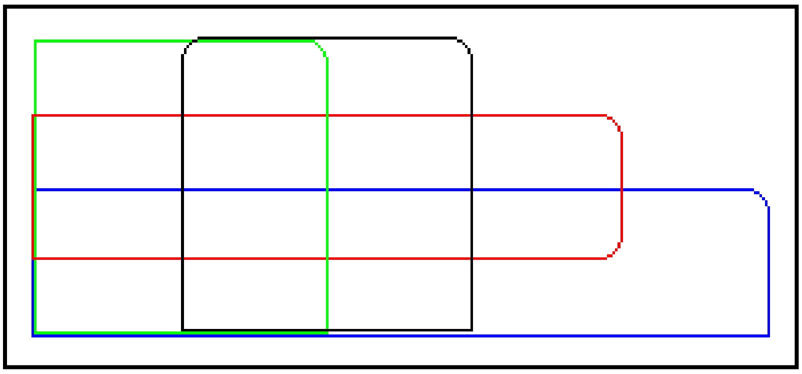
Incidence … $A\cap B\neq\emptyset$



Množinové operace:		(ukázky se dvěma množinami A, B)	
Sjednocení	$x\in A\cup B$	$x\in A\cup B \Leftrightarrow x\in A \vee x\in B$	x je prvkem alespoň jedné z množin A, B
Průnik	$x\in A\cap B$	$x\in A\cap B \Leftrightarrow x\in A \wedge x\in B$	x je prvkem obou množin A, B současně
Rozdíl	$x\in A-B$	$x\in A-B \Leftrightarrow x\in A \wedge x\notin B$	x je prvkem množiny A, ale není prvkem množiny B
Symetrický rozdíl	$x\in A\dot{-}B$	$x\in A\dot{-}B \Leftrightarrow (x\in A\wedge x\notin B)\vee(x\notin A\wedge x\in B)$	x je prvkem právě jedné z množin A, B
Doplněk	A'_B	$A'_B = B-A$	x je prvkem množiny B a není prvkem množiny A (pro $A\subseteq B$)
Kartézský součin	$A\times B$	$A\times B=\{[x,y];x\in A\wedge y\in B\}$	Množina všech uspořádaných dvojic [x,y], kde x je prvkem A a y je prvkem B

Grafické znázornění: Vennovy diagramy





Př. 1 Zapište všechny podmnožiny množiny:

a) $L = \{a\}$ b) $L = \{a, b\}$ c) $L = \{a, b, c\}$

[2^1 podmnožin, 2^2 podmnožin, 2^3 podmnožin – Proč je počet podmnožin vždy mocninou čísla 2?]

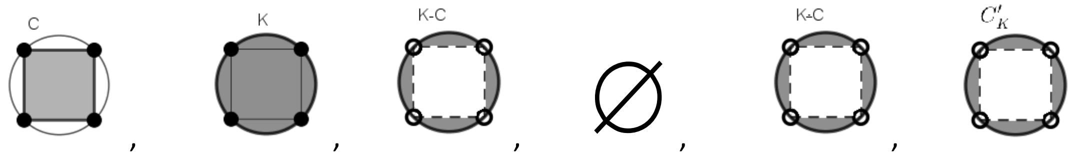
Met.:
- výpis podmnožin – důsledně, <u>systematicky</u>, nezapomenout na prázdnou podmnožinu;
- počet podmnožin množiny s *n* prvky … K(0, n) + K(1, n) + K(2, n) + … + K(n, n) =

$$= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = (1+1)^n = 2^n$$

Pozn.: Důkaz tvrzení, že množina o *n* prvcích má 2^n podmnožin, je samozřejmě možné provádět až v maturitním semináři (případně v době, kdy se probírá kombinatorika)

Př. 2 Do kruhu K je vepsán čtverec C. Určete graficky:

a) $K \cap C$ b) $K \cup C$ c) $K - C$ d) $C - K$ e) $K \dot{-} C$ f) C'_K



Met.: Zdůraznit jasné a jednoznačné vyznačení hraničních čar a vrcholů výsledných útvarů (plná čára patří výslednému útvaru, čárkovaná nikoliv, plné kolečko patří výslednému útvaru, prázdné nikoliv)!!!

Př.3 Zakreslete Vennův diagram a určete, kolik disjunktních oblastí obsahuje pro:

a) 1 množinu b) 2 množiny c) 3 množiny d) 4 množiny

[2^1, 2^2, 2^3, 2^4 – Proč je počet oblastí vždy mocninou čísla 2?]

Př. 4 Jsou dány množiny A, B a základní množina N: $A = \{4,5\}$, $B = \{5,6,7\}$.
Zakreslete prvky zadaných množin do Vennova diagramu a určete:

a) $C = A \cup B$ b) $D = A \cap B$ c) $E = A - B$ d) $F = B - A$

e) $G = A'_N$ f) $H = A \dot{-} B$ g) $I = A \times B$ h) $J = B \times A$

[C = {4; 5; 6; 7}, D = {5}, E = {4}, F = {6; 7}, G = { 1; 2; 3} U {6; 7; ...}, H = {4; 6; 7}, I = {[4; 5], [4; 6], [4; 7], [5; 5], [5; 6], [5; 7]}, J = {[5; 4], [5; 5], [6; 4], [6; 5], [7; 4], [7; 5]}]

Met.: Doporučit uvedený způsob zápisu množiny G a upřednostnit jej před G = {1; 2; 3; 6; 7; ...}

Př. 5 Jsou dány tři množiny:

$A = \{x \in R: |x+2| \geq 4\}$, $B = \{x \in R: |1-x| < 3\}$, $C = \{x \in R: -7 < x \leq -5\}$.

Určete: a) $A \cap C$ b) $A - B$ c) A'_R d) $A'_R - (B \cup C)$

[(-7; -6⟩, (-∞; -6⟩ ∪ ⟨4; ∞); (-6; 2); (-5; -2⟩]

Met.: a) využít úlohy k zopakování řešení jednoduchých nerovnic s absolutní hodnotou za pomoci geometrického významu absolutní hodnoty rozdílu;

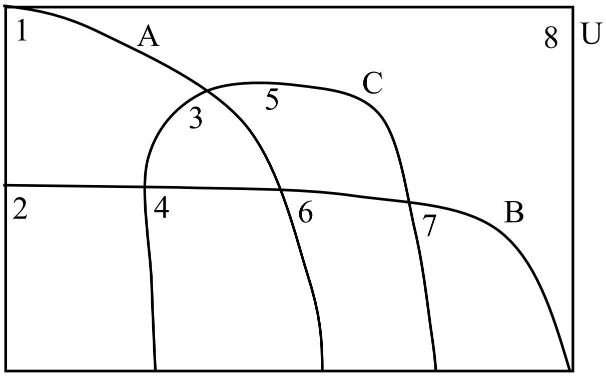
b) využívat grafické (barevné) znázornění jednotlivých množin:
- pro každé podzadání kreslit samostatný obrázek;
- náčrty stačí rychle od ruky, ale pro každou množinu jiná barva;
- měřítko není důležité, ale pozor na pořadí obrazů čísel na ose, chyb se studenti často dopouštějí hlavně u znázornění obrazů záporných čísel;
- zdůraznit jasné a jednoznačné vyznačení krajních bodů množin, s nimiž se provádějí jednotlivé operace, a rovněž krajních bodů výsledných množin

---

Př. 6 Pomocí Vennových diagramů rozhodněte, zda pro všechny podmnožiny A, B, C základní množiny U platí: $(A \cup B) \cap (A \cup C'_U) = A \cup (B \cap C'_U)$. [ano]

Met.: a) nakreslit (od ruky) Vennův diagram pro tři podmnožiny A, B, C základní množiny U;
b) očíslovat všech osm polí v diagramu čísly 1 – 8;
c) NEVYUŽÍVAT ŠRAFOVÁNÍ (ztrácí se tím přehlednost)!!!!
d) pracovat s očíslovanými poli zvlášť pro každou stranu ověřované rovnosti, pak porovnat výsledky;
e) obdobně pracovat s očíslovanými poli při úlohách na zjednodušení zápisu operací s množinami

Řeš.:



$$\underbrace{\underbrace{(A \cup B)}_{1,2,3,4,6,7} \cap \underbrace{(A \cup C'_U)}_{1,2,3,4,7,8}}_{1,2,3,4,7} = \underbrace{\underbrace{A}_{1,2,3,4} \cup \underbrace{(B \cap C'_U)}_{2,7}}_{1,2,3,4,7}$$

Závěr: Ano, platí.

Př.7 (TSP 2010 – Analytické myšlení)
Ve firmě pracuje 20 překladatelů. Právě 12 překladatelů z firmy ovládá angličtinu a přesně polovina z nich ovládá kromě angličtiny také němčinu. Právě 5 překladatelů neumí ani angličtinu, ani němčinu. Kolik překladatelů ve firmě ovládá němčinu? [9]

Př. 8 Při čtvrtletní práci byly zadány 3 příklady. Třetí příklad vyřešilo 21 žáků, a každý ze zbývajících příkladů vyřešilo 23 žáků. Dva žáci nevyřešili žádný příklad, všechny tři příklady vyřešilo 7 žáků. První a druhý příklad vyřešilo 15 žáků, první a třetí příklad 12 žáků. Druhý nebo třetí příklad vyřešilo 31 žáků.
Vypočtěte:
a) Kolik žáků vyřešilo druhý i třetí příklad? [13]
b) Kolik žáků vyřešilo první nebo druhý příklad? [31]
c) Kolik žáků psalo čtvrtletní práci? [36]

Met.: A) prvním krokem řešení je rozhodně důkladné a v plném soustředění provedené pročtení zadání;
B) dále nakreslit Vennův diagram pro počet podmnožin odpovídající zadání;
C) následují dvě možnosti postupu

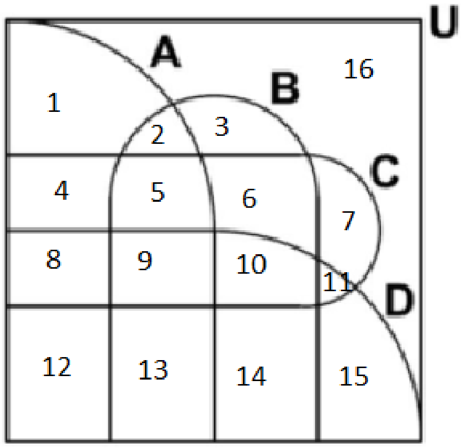
- 1. možnost je na první pohled jednoduchá, vede však k řešení několika rovnic o několika neznámých – osadit jednotlivá pole Vennova diagramu neznámými a při druhém čtení sestavovat rovnice odpovídající informacím v zadání. Tento postup může vést např. u uvedené úlohy v krajním případě až k nutnosti řešit osm rovnic o osmi neznámých;
- 2. možnost předpokládá několikanásobné opakované čtení celého zadání a postupné osazování jednotlivých polí diagramu konkrétními čísly tak, jak se je řešitel postupně ze zadání dozvídá. Tento postup je zpočátku časově trochu náročnější, ale jeho důsledkem je zpravidla výrazné zmenšení počtu neznámých a tím i potřeba menšího počtu rovnic k dořešení úlohy. Např. uvedená úloha umožňuje při pozorné práci osadit čísly všechna potřebná pole a nakonec není třeba řešit nejen soustavu rovnic, ale ani jedinou rovnici;

D) pro mnohé studenty bývají často velkým problémem odpovědi na otázky vztahující se k řešení podobných slovních úloh – např.:
- kolik prvků splňuje aspoň dvě z požadovaných vlastností?
- kolik prvků splňuje nejvýš jednu z požadovaných vlastností?
- kolik prvků splňuje právě dvě z požadovaných vlastností?

Naučit studenty správně reagovat na podobné otázky je velice důležitou součástí řešení slovních úloh tohoto typu.

Rozšiřující cvičení

Př.:9 Na obrázku je Vennův diagram pro čtyři množiny A, B, C, D. Víme, že číslo oblasti, v níž se prvek x nachází, není prvočíslem, je menší než 15 a je dělitelné třemi. Dále víme, že $x \in E$, přičemž platí:
$E = \{[(A - C) \cup (C - A)]'_U \cap (B - D)'_U\} \cup [(C \cap D) \cup (A \cap B)]$.
Ve které oblasti diagramu prvek x leží?



[9]
