1. **Výroková logika – met.**

## Stručný přehled teorie

## Výrok

* Oznamovací věta, o které má smysl prohlásit, že je pravdivá (1) nebo že není pravdivá (0).

## Hypotéza

* Výrok, jehož pravdivostní hodnotu neznáme, zatím neznáme nebo ani znát nemůžeme.

## Kvantifikovaný výrok

- Výrok, který obsahuje některý z kvantifikátorů.

## Kvantifikátor

* + Existenční – ∃ (existuje aspoň jeden), ∃! ( existuje právě jeden)
  + Obecný – ∀ (pro každý, pro žádný)
  + Obsahující konkrétní číselný údaj n (právě n, alespoň n, nejvýš n,…)

## Negace

* Negace výroku V je výrok ¬V (⎤V, nebo V‘), který popírá pravdivostní hodnotu výroku V (např. triviální formou „Není pravda, že …“)

***Pravidla pro negování výroků:***

|  |  |
| --- | --- |
| **Výrok … A** | **Negace výroku … ¬A** |
| … je … | … není … |
| … nevyřešil … | … vyřešil … |
| ∀x:V(x) … čteme: „pro každé x platí V(x)“ | ∃x: ¬V(x) …“existuje aspoň jedno x, pro něž V(x) neplatí |
| ∃x: V(x) … čteme: „existuje x, pro něž platí V(x)“ | ∀x: ¬V(x) …“pro žádné x neplatí V(x)“ |
| Aspoň *n* … je … | Nejvýš *(n-1)* … je … |
| Nejvýš *n* … je … | Alespoň *(n+1)* … je … |

1. **Složené výroky** – souvětí vytvořená spojením jednodušších výroků pomocí logických spojek:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Konjunkce** | | |
| (A a B) | | |
| A | B | A∧B |
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Disjunkce** | | |
| (A nebo B) | | |
| A | B | A∨B |
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Implikace** | | |
| (Jestliže A, pak B) | | |
| A | B | A⇒B |
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Ekvivalence** | | |
| (A právě tehdy, když B) | | |
| A | B | A⇔B |
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 |



Poznámka

* + **Obrácená** implikace … B⇒A
  + **Obměněná** implikace … **¬**B⇒**¬**A (je ekvivalentní s výrokem A⇒B)

## Tautologie

* + Složený výrok, jenž je pravdivý bez ohledu na pravdivostní hodnoty výroků, z nichž je složen.

## Kontradikce

* + Složený výrok, jenž je nepravdivý bez ohledu na pravdivostní hodnoty výroků, z nichž je složen.

1. **Negace složených výroků**

|  |  |
| --- | --- |
| 1. V | 1. ¬V |
| 1. **A∧B** | 1. ¬**A∨**¬**B** |
| 1. **A∨B** | 1. ¬**A∧**¬**B** |
| 1. **A⇒B** | 1. **A∧**¬**B** |
| 1. **A⇔B** | 1. **(A∧**¬**B)∨(** ¬**A∧B)** |

**Kontrola správnosti úsudků** – využívá výrokovou logiku:

Met.: Předpokladem úspěšnosti řešení úloh z výrokové logiky je výborná znalost základních operací s jednoduchými (i kvantifikovanými) a složenými výroky.

Výroková logika

**Výrok** je **oznamovací věta**, o které má smysl prohlásit, že je **pravdivá** (1) nebo že **není pravdivá** (**0**).

Pravdivostní hodnota výroku

Označení výroku: A, B, C, … , X, Y, ….

|  |  |
| --- | --- |
| **výrok** | není výrok |
| **A: Praha je hlavní město ČR.** | Dobrý den. |
| **B: .** | . |
| **C:** | Základy výrokové logiky. (nadpis kapitoly) |

………….

Před zápisem do tabulky na tabuli by měl učitel věty vyslovit a pak se studenty na základě definice rozhodovat, do kterého sloupce věta patří, proč je výrokem, jakou má pravdivostní hodnotu, proč výrokem není …

Následovat by měla krátká diskuse o větách (např.):

X: Před dvěma miliardami let vletělo do Slunce těleso velikostí srovnatelné s Měsícem. Y: Ve vesmíru existuje kromě Země ještě aspoň jedna planeta, na níž je inteligentní život. Z: Existuje yetti.

Jsou to výroky? ANO!!!! Každé z vět jednoznačně odpovídá právě jedna ze dvou možných pravdivostních hodnot. To, že je z nějakého důvodu určení této pravdivostní hodnoty nad lidské síly, nemůže věty vyřadit z rodiny výroků. Jedná se však o speciální výroky – tzv. hypotézy.

**Hypotéza** je výrok, jehož pravdivostní hodnotu zatím neznáme nebo ani znát nemůžeme.

Př.: H: Nejpozději v roce 2040 přistanou lidé na Marsu.

Pozn.: Dříve, než se přistoupí k negování výroků, je třeba probrat kvantifikované výroky.

**Kvantifikovaný výrok** je výrok, který obsahuje některý z kvantifikátorů.

# **Kvantifikátor**

* + Existenční – **∃** (existuje aspoň jeden), **∃!** ( existuje právě jeden) *Př.: Existuje aspoň jedno sudé přirozené číslo menší než 3.*
  + Obecný – **∀** (pro každý, pro žádný) *Př.: V každém trojúhelníku je součet vnitřních úhlů 180°.*
  + Obsahující konkrétní číselný údaj ***n*** (právě *n*, alespoň *n*, nejvýš *n*,…) *Př.: V prověrce budou nejvýš dva obtížné příklady. Př.: Petr získal aspoň 10 bodů.*

Teprve nyní by se mělo přistoupit k negování výroků.

## Negace výroku A je výrok ¬A, který popírá pravdivostní hodnotu výroku A (např. triviální formou „Není pravda, že …“)

**Pravidla** pro negování výroků:

|  |  |
| --- | --- |
| **Výrok … A** | **Negace výroku … ¬A** |
| … je … | … není … |
| … vyřešil … | … nevyřešil … |
| ∀x:V(x) … čteme: „pro každé x platí V(x)“ | ∃x: ¬V(x) …“existuje aspoň jedno x, pro něž V(x) neplatí |
| ∃x: V(x) … čteme: „existuje x, pro něž platí V(x)“ | ∀x: ¬V(x) …“pro žádné x neplatí V(x)“ |
| Aspoň n … je … | Nejvýš (n-1) … je … |
| Nejvýš n … je … | Alespoň (n+1) … je … |

Negace jednoduchých výroků je následně třeba důkladně procvičit. Negování kvantifikovaných výroků je třeba vizualizovat!!!

0

1

2

3

4

5

6

7

8

**...**

Př.: A: Mám aspoň pět možností. ¬A: Mám nejvýš čtyři možnosti.

Př. 1 Negujte:

* + - 1. Aspoň jednou nelhal.
      2. Nic ti nevytýkám.
      3. Potřeboval právě 5 pokusů.
      4. Je mu nejvýš 10 let.

Met.: Uvedené jednoduché úlohy je třeba důkladně procvičit dřív, než se přejde k řešení složených výroků a dalších komplikovanějších úloh.

Pozornost je třeba věnovat přepisu zadání 3. d) do tvaru disjunkce a také zadání 3. e) do tvaru konjunkce. Teprve potom jsou výroky připraveny k negování.

Př. 2 Vyslovte větu obrácenou, obměněnou a negaci:

1. Budu-li se učit nebo číst, nepůjdu do kina.
2. Když nebude pršet, půjdu ven a nezmoknu.

Př. 3 Negujte výroky. Určete pravdivostní hodnotu zadání.

a) Je-li číslo dělitelné devíti, pak je dělitelné i třemi.

b) Je-li trojúhelník pravoúhlý, pak není ostroúhlý.

c) Trojúhelník je pravoúhlý, právě když pro délky jeho stran platí vzorec .

d)

e) 4 ≤ 5 < 8

Př. 4 Rozhodněte, zda je výrok K tautologií: [Ne, kontradikce]

Př. 5 Petr a Pavel čekají na Adama, Pepu a Cyrila.   
 Pavel říká: **„Když přijde Adam a Pepa, přijde i Cyril.“**

Petr odpoví: **„Když přijde Adam a nepřijde Cyril, nepřijde ani Pepa.“** Pavel odpoví: „Vždyť říkáš totéž, co já.“  
 Je to pravda? [ano]

Met.: Úlohy 4 a 5 je třeba řešit užitím pečlivě sestavené a pečlivě vyplněné tabulky pravdivostních hodnot jednotlivých jednoduchých i složených výroků, které se v zadání vyskytují.

**Kontrola správnosti úsudků**

Úsudek je myšlenkový proces, který na základě předpokladů, jejichž pravdivostní hodnoty známe, formuluje závěry. ***Úsudek*** může být buď ***správný*** nebo ***nesprávný***.

Schéma zápisu: Předpoklady

Závěr

Met.: Princip řešení: Sestavíme tabulku pravdivostních hodnot pro výroky a operace, které se v úloze vyskytují. Najdeme všechny řádky, které odpovídají splněným předpokladům.

• Jestliže je *na všech řádcích*, *kde* jsou *splněny všechny předpoklady*, *splněn i závěr*, pak je ***úsudek správný***.

• Jestliže v tabulce existuje *byť jen jediný řádek*, na kterém jsou *splněny všechny předpoklady, ale není splněn závěr*, pak je ***úsudek nesprávný***. Pozn.: Právě poslední fáze řešení, tedy rozhodnutí o správnosti úsudku, dělá některým studentům problémy. Pokud některý student „projde úspěšně“ řešením, ale jeho odpověď zní např. „Výrok je (ne)pravdivý“ namísto „Úsudek je (ne)správný“, svědčí to o nepochopení podstaty řešeného problému.

Př. 6 Bude-li mít Jana vyznamenání, pojede k moři. Jana je u moře. Je správné usoudit, že měla vyznamenání?

1

1 (?)

Řeš.:

Oba (tedy všechny) předpoklady jsou splněny na prvním a třetím řádku. Na prvním řádku je splněn i závěr. Ale na třetím řádku závěr splněn není. Úsudek proto **není správný**.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *V* | *M* |  |
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
|  |  |  |
| 0 | 0 | 1 |

●

●

Př. 7 Výrok říká: **Je-li objem krychle větší než 1 cm3,je její hrana delší než 1 cm.**

Měřením bylo zjištěno, že hrana měří 1,2 cm.  
 Usoudili jsme, že objem této krychle je větší než 1 cm3. Je náš úsudek správný? [ne]

Př. 8 Víme, že platí dvě následující tvrzení: Když nesvítí A nebo nesvítí C, pak B svítí. Když svítí A i B, pak nesvítí C. Rozhodněte, zda je pak správný úsudek: Nesvíti-li A, pak svítí B.

Řeš.:

1 1

1 ?

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| A | B | C |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |  |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |  |  |  |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |  |  |  |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |  |  |  |

Oba předpoklady jsou splněny na čtyřech řádcích: druhém, třetím, čtvrtém a šestém. A na všech těchto řádcích je splněn i závěr. Je tedy možné konstatovat, že daný úsudek **je správný**.

Pozn.: Jakmile zjistíme, že na některém řádku není splněný některý z předpokladů, řádek nás nezajímá a nemusíme se na něm zdržovat zjišťováním dalších pravdivostních hodnot.

Př. 9 Negujte: a) b) [a) , b)

Př. 10 Které z následujících vět jsou logicky ekvivalentní větě:   
 **Nemám-li bratra, pak nemám ani sestru.**

* 1. Mám-li bratra, pak mám i sestru.
  2. Mám-li sestru, pak mám i bratra.
  3. Nemám bratra ani sestru. [Pouze věta b)]

Met.: Tato úloha je určitě vhodná pro to, aby student viděli více různých způsobů řešení. Obsahuje totiž pouze dva základní výroky (např. B … “Mám bratra” a S … “Mám sestru”), s nimiž se dá jednoduše a názorně pracovat  
 1. způsob – užitím tabulky pravdivostních hodnot. Při jejím správném vyplnění bude dobře vidět, že sloupce výsledných pravdivostních hodnot pro původní větu a pro větu b) jsou stejné.

2. způsob – lze si všimnout, že daná věta a věta b) představují implikaci a k ní obměněnou implikaci. A ty jsou samozřejmě ekvivalentní.

3. způsob – užitím vhodných diagramů (např. Eulerových nebo Vennových)

S8. (TSP 2008, var. 1)

Které z následujících vět jsou logicky ekvivalentní větě:

Nemám-li bratra, pak nemám ani sestru.

a) Mám-li bratra, pak mám i sestru.

b) Mám-li sestru, pak mám i bratra.

c) Nemám bratra ani sestru.

[Pouze věta b)]

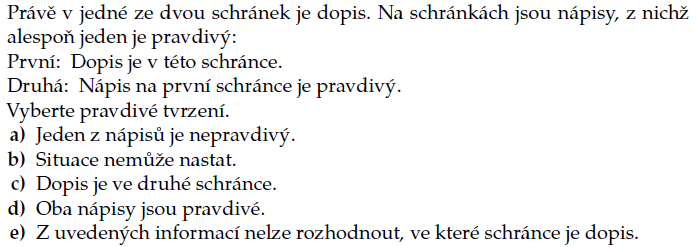
B

č.1

č.2

č.3

Ze zadání evidentně plyne, že pole č.3 odpovídající situaci, kdy mám sestru a nemám bratra, musí být prázdné. Porovnáním diagramu se situacemi a), b), c) jednoznačně vyplyne, že ekvivalentní může být pouze věta b).

Př. 11

[d)]

Met.: Úloha je relativně jednoduchá, takže časově nejméně náročné je určitě řešení s náčrtem dvou schránek a „vyzkoušením“ umístění dopisu do první, respektive do druhé, schránky a posouzením pravdivosti jednotlivých tvrzení v prvním, respektive v druhém, případě.

Př. 12 Jsou dána tvrzení A a B. **A: Jestliže jsem rodič, pak jsem zodpovědný.  
 B: Nejsem zodpovědný nebo nejsem odvážný.**  
 Čtyři z následujících pěti tvrzení logicky vyplývají z A a B, jedno ne. Které?

* 1. Jsem rodič nebo jsem odvážný.
  2. Jestliže jsem odvážný, pak nejsem rodič.
  3. Nejsem odvážný rodič.
  4. Jestliže jsem rodič, pak nejsem odvážný.
  5. Nejsem rodič nebo nejsem odvážný. [Neplyne a)]

Met.: Časově nejméně náročný je způsob řešení užitím diagramu pro tři množiny

Př. 13 (TSP 2013, var. 1)  
 Marťanští muži v létě mluví pravdu, po zbytek roku lžou. Marťanské ženy mluví pravdu ve středu, ostatní dny lžou. Dva obyvatelé Marsu Hélo a Kélo ve stejný den řekli:  
 **Hélo: Kélo je žena a dnes lže.  
 Kélo: Oba jsme stejného pohlaví.**  
 Vyberte pravdivé tvrzení.

1. Kélo je žena a Hélo je muž.
2. Není středa.
3. Hélo je žena a Kélo muž.
4. Není léto.
5. Je léto. [b)]

Př. 14 Negujte: