



## Nejčastější úpravy algebraických výrazů:

### 1) rozklad mnohočlenu na součin

#### o vytýkání

- jednoduché, *např.*:  $a^3 + 2a^2 = a^2(a + 2)$
- vícenásobné, *např.*:  $a^5 + 2a^4 + a + 2 = a(a^4 + 1) + 2(a^4 + 1) = (a + 2) \cdot (a^4 + 1)$

#### o rozklad kvadratického trojčlenu

#### o pomocí vzorců

### 2) úpravy zlomků

#### o rozšiřování *např.*: $\frac{a}{b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{c} = \frac{ac}{bc}$ , kde $b \neq 0, c \neq 0$

#### o krácení *např.*: $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$ , kde $b \neq 0, c \neq 0$

#### o usměrňování *např.*: $\frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a}{\sqrt{b}} \cdot 1 = \frac{a}{\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$ $b > 0$

**Podmínky:** jmenovatel nesmí být roven 0, pod odmocninou nesmí být záporné číslo,....

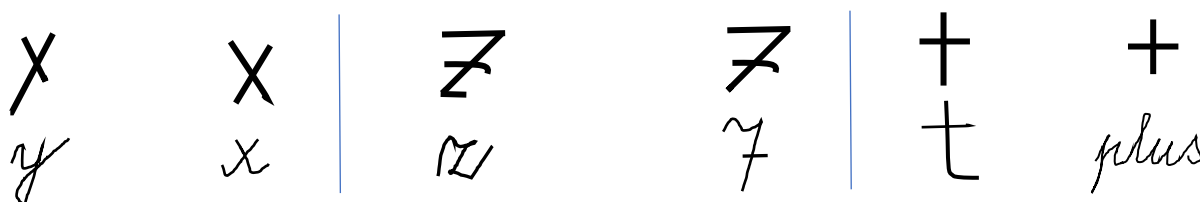
---

**Met.:** Této kapitole je třeba co nejdříve věnovat naprosto mimořádnou pozornost. Obratnost, rychlost a jistota v provádění úprav algebraických výrazů je nutnou podmínkou pro to, aby studenti mohli v budoucnu zvládat nejen řešení nejrůznějších typů rovnic a nerovnic, nýbrž prakticky jakýchkoliv matematických úloh. Pokud má student problémy s úpravami algebraických výrazů, lze to přirovnat k situaci, kdy v hodině českého jazyka píše slohovou práci a nezná tvary některých písmen.

Některé rady pro učitele:

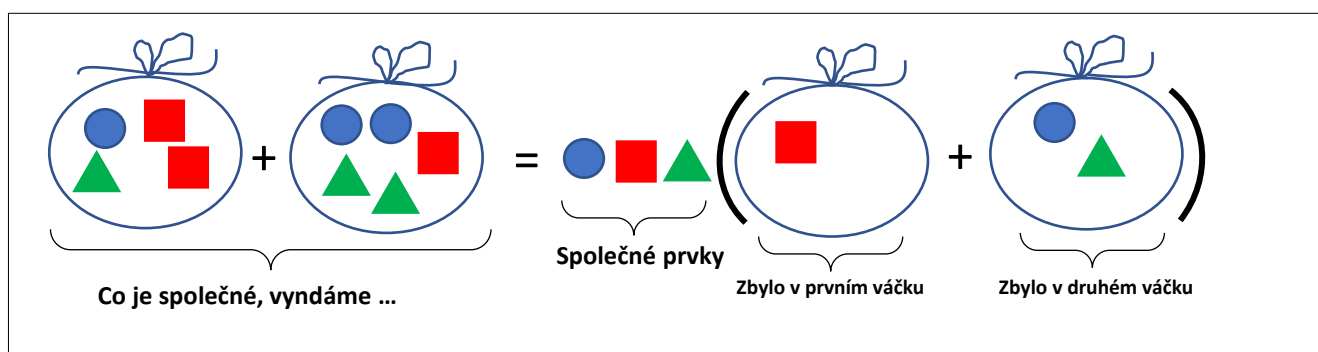
- nespoléhat na znalosti ze ZŠ (úroveň i obsah znalostí jsou u studentů naprosto různé);
- jasně a srozumitelně vyloučit hned na začátku studentům, jaké znalosti základních typů úprav výrazů budou vyžadovány - *např.* a) při rozkladu mnohočlenů na součin s jistotou a bez chyb vytýkat, pracovat s kvadratickými trojčleny, používat vzorce (jasně se dohodnout, které budou vyžadovány z paměti, nepřehánět požadavky), nebo b) při úpravách zlomků nekompromisně vyžadovat obratnost při provádění veškerých operací s jednoduchými i složenými zlomky (včetně usměrňování) a s jistotou určovat i podmínky, za kterých mají výrazy smysl;
- důkladnému procvičování úloh na úpravy výrazů věnovat dostatek času (případně i na úkor části některého z následujících témat);
- vést studenty k rozváznému hledání cest k úpravám výrazů (*např.* úlohy  
1) Rozložte na součin:  $5a \cdot (6x - y) - 6x + y =$   
nebo 2) Rozložte na součin:  $16(3a + b)^2 - (5a - 3b)^2 =$   
mohou studenti řešit zbrklým roznásobením (to ale ke splnění úkolu zpravidla nepovede), přičemž je třeba vést je k tomu, aby si všimli možnosti vytýkání, případně použití vhodných vzorců apod. ...);
- studenti by se při probírání tohoto tématu měli co nejvíce dostávat k tabuli (ideálně v rámci hodin matematického cvičení, kdy je třída rozdělena na poloviny). Jednak u studentů u tabule učitel nejlépe vidí, co jim dělá potíže, jednak se studenti při plném soustředění u tabule nejvíce naučí;
- prověrky psát až po důkladném procvičení – postupně od zvládnutí úprav jednodušších výrazů (rozklady polynomů na součin, použití jednoduchých vzorců, rozklady kvadratických trojčlenů,...) až po úpravy složitých výrazů (*např.* se složenými zlomky, s nutností určovat podmínky,...);
- některé další konkrétní rady:  
1) **jednoznačnost v zápisech:**
  - učitel sám by měl u sebe velmi dbát na to, aby při zápisech používal takové tvary písmen a číslic, aby nemohlo docházet k záměnám a chybnému čtení (totéž samozřejmě musí doporučovat studentů a vyžadovat to od nich ve svém, ale i v jejich vlastním, zájmu).

Rozhodně není dobře, když studentům řekne např.: „vím, moje „zetka“ vypadají jako sedm, ale vy mi rozumíte ...“, nebo „dejte si pozor, abyste moje téčko někde v rovnici nezaměnili se znaménkem plus ...“ apod.



## 2) vytýkání:

- mnohdy si žáci nepřinesou ze základní školy dostatečnou zběhlost a vytýkání jim dělá potíže. Pokud učitel v rámci vizualizace použije pro vysvětlení podstaty vytýkání následující „dětský“ obrázek, určitě to nebude žádná ostuda a spouště studentů to pomůže princip vytýkání dobře pochopit:



Př.1:  $6x^3 \cdot y^2 \cdot z + 15x^2 \cdot y \cdot z^2 = 2 \cdot 3 \cdot x^2 \cdot x \cdot y \cdot y \cdot z + 5 \cdot 3 \cdot x^2 \cdot y \cdot z \cdot z = 3x^2 \cdot y \cdot z \cdot (2xy + 5z)$ ;

Př.2:  $2abc - 4abcd = 2abc \cdot (1 - 2d)$ . Když vytknu „všechno“, musí zůstat „stopa“ v podobě čísla 1... ověření roznásobením.

## 3) určení podmínek, za kterých má daný výraz smysl:

- stanovení podmínek, za kterých má daný lomený výraz smysl, je nesmírně důležité. Učitel by měl zdůraznit a nechat studenty zapsat do sešitu, že **„Jmenovatel zlomku se nikdy nesmí rovnat nule, protože NULOU DĚLIT NELZE!!!“**.

A mohl by ukázat třeba na příkladu  $\frac{k}{(a-b) \cdot c \cdot (a+d)}$  hledání podmínek s tím, že by upozornil ve jmenovateli na **tři** činitele, z nichž žádný nesmí být nulový, aby byl **celý součin ve jmenovateli různý od nuly**: tedy

1)  $a - b \neq 0 \Rightarrow a \neq b$ ;

2)  $c \neq 0$ ;

3)  $a + d \neq 0 \Rightarrow a \neq -d$ .

Studenti totiž často chybují v tom, že u zlomku typu  $\frac{k}{(a-b) \cdot c \cdot (a+d)}$  bez rozmyslu požadují, aby každá proměnná, která se vyskytuje ve jmenovateli v jakémkoliv výrazu, byla různá od nuly. Tedy zde např.  $a \neq 0$ , .... Taková chyba se objevuje prakticky v každé třídě u velkého počtu studentů. Učitel by se měl u tohoto problému zastavit a vysvětlit, proč je to špatný požadavek. Je třeba zdůraznit studentům, že **podmínky musí být uvedeny všechny, ale žádná nesmí být uvedena navíc**.

Takže se podívejme, jestli nastane problém, když bude  $a = 0$ . Zadaný zlomek pak bude vypadat takto:  $\frac{k}{-b \cdot c \cdot d}$  a bude mít samozřejmě při  $b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$  smysl a nulová hodnota proměnné  $a$  mu nevádí;

- dále by měl studentům doporučit, aby nedělali podmínky jako první a neurčovali je ze zadání (samozřejmě pokud není zcela jednoduché, kdy jsou z něj podmínky přímo vidět). Napřed by mělo být provedeno postupně celé řešení a pro určení podmínek vybrána ta fáze výpočtu, v níž jsou všechny jmenovatele rozloženy a zapsané v podobě součinu činitelů, ale ještě se nekrátilo. Vyhnu se tak zbytečnému opakování stejných úprav jednak v řešení a jednak při určování podmínek:

Např.:  $\frac{x^3-x^2y}{y+y^2} : \frac{y^3-y^2x}{xy+x} = \frac{x^2 \cdot (x-y)}{y \cdot (1+y)} \cdot \frac{x \cdot (y+1)}{y^2 \cdot (y-x)} = -\frac{x^3}{y^3} \dots$  podmínky určíme až z druhého, nikoliv ze zadaného, výrazu (samozřejmě s vědomím, že čítec jeho druhého zlomku byl původně ve jmenovateli);

- podobný problém s určením podmínek se může objevit i u úlohy

$$\frac{xz+yz-xn-yn}{xz-yz-xn+yn} = \frac{z \cdot (x+y) - n \cdot (x+y)}{z \cdot (x-y) - n \cdot (x-y)} = \frac{(x+y) \cdot (z-n)}{(x-y) \cdot (z-n)} = \frac{x+y}{x-y}$$

Tady studenti často navrhnou podmínky:

$x \neq 0, y \neq 0, z \neq 0, n \neq 0$ . Učitel musí návrh s náležitým zdůvodněním odmítnout jako nesprávný, ale měl by navíc zavést diskusi o tom, z kterého zlomku budeme podmínky

určovat: - ze zadaného **NE**, ve jmenovateli jsou součty a rozdíly;

- z druhého v pořadí **NE**, sice jsme částečně upravili jmenovatele, ale pořad tam zůstává rozdíl;

- ze čtvrtého (výsledného) **NE**, krácením jsme z něj odstranili výrazy, které v zadaném zlomku figurují a s nimiž musíme pro hledání podmínek počítat;

- ze třetího v pořadí **ANO** – jmenovatel už má tvar součinu, ale výraz je zatím úplný, žádnou jeho část jsme neodstranili krácením.

#### 4) optimální způsoby řešení používat přednostně:

- např. v jedné třídě učitel napsal zadání: Upravte:  $\frac{36y^2-1}{8y} \cdot \frac{y^3}{6y-1} = \dots$

a vyzval studenty, aby navrhli cestu k řešení. Pak akceptoval první vyslovený návrh, a to na dělení  $(36y^2 - 1) : (6y - 1) = \dots$  s představou, že si takto aspoň studenti zopakují dělení mnohočlenu mnohočlenem. Tím ovšem rozsypl koncepci řešení úlohy a tabule se postupně zaplnila nepřehlednou změti výpočtů. Správně měl učitel sice studenta pochválit, že jeho cesta k cíli zřejmě vede, ale komplikovaným způsobem. A měl vyzvat další studenty k formulaci dalších nápadů. Z nich měl vybrat ten optimální, který nepochybně vypadal takto:

$\frac{36y^2-1}{8y} \cdot \frac{y^3}{6y-1} = \frac{(6y-1) \cdot (6y+1)}{8y} \cdot \frac{y^3}{6y-1} = \frac{y^2 \cdot (6y+1)}{8}$ . Tématem hodiny byly úpravy výrazů, ale kvůli takto nešikovně voleným postupům studenti krásná a jednoduchá řešení vůbec neviděli.

#### Základní poznatky

- (Státní maturita 05/2016)

Zjednodušte výraz

$$3x \cdot \frac{2x-4}{6} - \left(\frac{x}{3}\right)^2 = \left[ \frac{8x^2}{9} - 2x \right]$$

- (Státní maturita 05/2016)

Zjednodušte výraz

$$\frac{1}{a} - \frac{5}{a^2} = \left[ \frac{1}{3a^2} \wedge a \neq 0 \wedge a \neq 5 \right]$$

## 3. (Státní maturita 09/2016)

Zjednodušte výraz

$$\left(a - 1 - \frac{1}{a-1}\right) \cdot \frac{a-1}{a \cdot a-4} = \left[\frac{a}{a+2} \wedge a \neq 1 \wedge a \neq \pm 2\right]$$

Typové příklady standardní náročnosti

$$4. \left(\frac{2t-1}{t+1} - \frac{2t+1}{t-1}\right) : \frac{t}{t-1} = \left[\frac{-6}{t+1} \wedge t \neq 0 \wedge t \neq \pm 1\right]$$

$$5. \left(\frac{k}{k-1} + 1\right) : \left(1 - \frac{3k^2}{1-k^2}\right) = \left[\frac{k+1}{2k+1} \wedge k \neq \pm \frac{1}{2} \wedge k \neq \pm 1\right]$$

$$6. \left(1 - \frac{2}{1-3a}\right) \cdot \left(1 - \frac{9a-9a^2}{3a+1}\right) : (2-18a^2) = \left[\frac{-1}{2(1+3a)} \wedge a \neq \pm \frac{1}{3}\right]$$

$$7. 6x + \left(\frac{x}{x-2} - \frac{x}{x+2}\right) : \frac{4x}{x^4 - 2x^3 + 8x - 16} = \left[(x+2)^2 \wedge x \neq 0 \wedge x \neq \pm 2\right]$$

$$8. 2u - \left(\frac{2u-3}{u+1} - \frac{u+1}{2-2u} - \frac{u^2+3}{2u^2-2}\right) \cdot \frac{u^3+1}{u^2-1} = \left[\frac{2(2u-1)}{u+1} \wedge u \neq \pm 1\right]$$

$$9. \frac{\frac{a^4 - b^4}{a^2 b^2}}{\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{2a}{b} + \frac{a^2}{b^2}\right)} = \left[\frac{a+b}{a-b} \wedge a \neq b \wedge a \neq 0 \wedge b \neq 0\right]$$

$$10. \left(\frac{x^3}{y^2} + \frac{x^2}{y} + x + y\right) : \left(\frac{x^2}{y^2} - \frac{y^2}{x^2}\right) = \left[\frac{x^2}{x-y} \wedge x \neq \pm y \wedge x \neq 0 \wedge y \neq 0\right]$$

$$11. \frac{a \cdot \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2b\sqrt{a}}\right)^{-1} + b \cdot \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2a\sqrt{b}}\right)^{-1}}{\left(\frac{a + \sqrt{ab}}{2ab}\right)^{-1} + \left(\frac{b + \sqrt{ab}}{2ab}\right)^{-1}} = \left[\sqrt{ab} \wedge a > 0 \wedge b > 0\right]$$

Rozšiřující cvičení

$$12. \left(a \cdot \sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{b}{1 - \sqrt{\frac{b}{a}}}\right) : \frac{b + \sqrt{ab}}{b \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)} = \left[1 \wedge ab > 0 \wedge a \neq b\right]$$

## 13. Nalezněte graf funkce

$$f: y = \frac{(x^2 - 3x + 2) \cdot |x + 2|}{x^3 - x^2 - 4x + 4} \quad \left[f: y = \begin{cases} -1 & \text{pro } x \in (-\infty; -2) \\ 1 & \text{pro } x \in (-2; \infty) - \{1; 2\} \end{cases}\right]$$