# **06 Kvadratické nerovnice – met.**

**Stručný přehled teorie**

Kvadratickou nerovnicí rozumíme výrokovou formu tvaru

*ax2+bx+c >* 0*;*

*ax2+bx+c <* 0*;*

*ax2+bx+c ≥* 0*;*

*ax2+bx+c ≤* 0*,* kde *a, b, c* ∈ **R**, *a* ≠ 0

Met.: Metod řešení kvadratické nerovnice je celá řada: početně, graficky (časově náročné a nepřesné), kombinací početní a grafické metody (nejlepší z uvedených), ... Vyučující by měl zvážit, s kterými z nich, a do jaké hloubky, studenty seznámí. Ve třídě nadaných studentů může klidně projít všechny zmíněné a doporučit používání nejvýhodnější z nich. Je-li však třída slabá, je rozumnější ukázat studentům pouze jednu nejvýhodnější metodu a důkladně ji s nimi procvičit. Vzhledem k tomu, jak často se budou studenti ve středoškolské matematice s kvadratickými nerovnicemi setkávat, je nezbytné, aby chápali, že znalost jejich řešení patří k nejzákladnějším znalostem, a aby je vždy řešili obratně a s jistotou.

**Řešení kvadratické nerovnice:**

1. POČETNĚ (převedením kvadratické nerovnice na nerovnici v součinovém tvaru)

Př. Řešte v ***R***: ***ax2+bx+c <* 0*,*** kde *a* > 0

Řeš.: Nechť *r* a *s* jsou kořeny rovnice *ax2+bx+c =* 0. Pak převedeme zadanou kvadratickou nerovnici do součinového tvaru

*a*(*x-r*).( *x-s*) *<* 0

 a dořešíme

* buď metodou nulových bodů s použitím číselné osy
* nebo úvahou, že *a*(*x-r*)*.*( *x-s*) *<* 0

 (*x-r >* 0 *˄ x-s <* 0) *˅* (*x-r <* 0 *˄ x-s >* 0)

(*x > r ˄ x < s*) *˅* (*x < r ˄ x > s*) 

 *x є K1 ˅ x є K2*

***K = K1*** *∪* ***K2***

Pozn. Pokud kořeny *r, s* neexistují, je množinou kořenů nerovnice buď množina všech reálných čísel nebo prázdná množina.

2. GRAFICKY

Př. . Řešte v ***R***: ***ax2+bx+c <* 0,** kde *a > 0*

 Řeš. (jedno z možných): $ax^{2}<-bx-c$

 Zavedeme funkci $f:y=ax^{2}$

 a relaci *T:* $y<-bx-c$

 Znázorníme jejich grafy v soustavě souřadnic – množina kořenů je množina *x*-ových souřadnic všech bodů, které tvoří průnik obou grafů, tedy ***K=* (*r, s)****.*

*Pozn. Nevýhodou popsané metody je nepřesnost při „čtení“ průsečíků r, s.*



*T:* *y < -bx-c*

3.KOMBINACÍ POČETNÍ A GRAFICKÉ METODY

Př. Řešte v ***R***: ***ax2+bx+c <* 0,** kde *a > 0*

Řeš.: Nechť *r* a *s* jsou kořeny rovnice *ax2+bx+c =* 0.

Pak parabola, která je grafem funkce *f: y = ax2+bx+c*, protíná osu x v bodech P1[r,0] a P2[s,0]. Pokud je podle zadání *a >* 0, má funkce *f* minimum v bodě, který odpovídá vrcholu dotyčné paraboly.

Množina kořenů se určí podle znaménka nerovnosti v zadané nerovnici. V našem příkladu je *y = ax2+bx+c <* 0 a tomu odpovídá ***K=* (r, s)**.

*r*

*s*

*y*

*x*

Základní poznatky

Př. 1 Řešte v *R*:

 

Př. 2 Řešte v *R*:

 

Met.: Pokud chce vyučující pracovat s kombinací početní a grafické metody (je velmi rychlá a názorná), je nezbytné, aby nejprve studentům vysvětlil její podstatu. V levé straně kvadratické nerovnice studenti musejí vidět pravou stranu pomocné kvadratické funkce, jejíž graf (parabola) načrtnutý do soustavy souřadnic využijí při určení množiny řešení nerovnice. Např.: Př. 2  ……. pomocná kvadratická funkce je f: y = 6x2 – 7x + 2 … využití jejího grafu: 1) podle koeficientu kvadratického členu určíme polohu paraboly v soustavě souřadnic … a = 6 > 0 → vrchol paraboly odpovídá minimu funkce (parabola „otevřena nahoru“) 2) průsečíky paraboly s osou x jsou body, pro něž souřadnice y = 0. Vyřešením rovnice 6x2 – 7x + 2 = 0 určíme x-ové souřadnice průsečíků (x1 = $\frac{1}{2}$ , x2 = $\frac{2}{3}$ ) a zakreslíme je i s náčrtem paraboly do soustavy souřadnic. Pak už lehce z obrázku určíme, kterým argumentům x odpovídají požadovaná y = 6x2 – 7x + 2 ≥ 0.

f: y = 6x2 – 7x + 2

 $K=\left(-\infty ;\left.\frac{1}{2}\right⟩∪\left⟨\frac{2}{3};\left.\infty \right)\right.\right.$

y

$$\frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{2}$$

x

Tato metoda se ukáže jako zásadním způsobem užitečná, názorná a srozumitelná i pro slabší studenty zejména v úlohách podobných následujícím dvěma:

Např. Př. 1 Řešte v R: 5x2 – 2x + 10 ≥ 0. Velmi častou chybou, které se studenti dopouštějí, je, že vyřeší pomocnou kvadratickou rovnici 5x2 – 2x + 10 = 0, konstatují, že její diskriminant je záporný, takže řešení v R neexistuje a z toho udělají zbrklý závěr, že množina řešení dané nerovnice je prázdná. A tady musí vyučující vyvolat diskusi o tom, proč studenti pomocnou rovnici řešili – šlo o nalezení průsečíků paraboly s osou x. Záporný diskriminant znamená tedy pouze to, že průsečíky s osou x neexistují. Vzhledem k tomu, že kvadratický koeficient je 5 (větší než nula), odpovídá vrchol paraboly minimu pomocné funkce, tedy parabola je „otevřena nahoru“. Náčrt: Z náčrtu je zřejmé, že pro každé x ϵ ***R*** platí, že y = 5x2 – 2x + 10 ≥ 0. Tozn.: K = ***R***.

y

f: y = 5x2 – 2x + 10

 Pozn. Při procvičování a v prověrkách je třeba myslet i na zadávání podobných úloh. Vyučující by měl promyslet i to, že kdyby zadal k řešení nerovnici 5x2 – 2x + 10 ≤ 0, bude řešením prázdná množina a nemusí být zřejmé, zda student nerozhodl o výsledku pouze na základě záporného diskriminantu.

x

Nebo: Př. 2 Řešte v ***R***: – x2 + 6x – 9 < 0. Kvadratická rovnice – x2 + 6x – 9 < 0 má jediný kořen (x = 3). Tozn., že odpovídající parabola má s osou x jediný společný bod – bod dotyku. Kvadratický koeficient –1 určuje polohu paraboly tak, že vrchol odpovídá maximu. Náčrt: Z náčrtu je zřejmé, že pro x = 3 je y = 0. Pro všechna ostatní reálná x je y = – x2 + 6x – 9 < 0. Tozn.: K = ***R*** - $\left\{3\right\}$

y

3

x

y = -x2 + 6x - 9

Typové příklady standardní náročnosti

 Met.: Následující úlohy představují příklady, které ukazují, že se studenti při probírání nejrůznějších matematických témat často setkávají průběžně po celou dobu středoškolského studia s potřebou řešit kvadratické nerovnice

Př. 3 Určete, pro která  má daný výraz smysl:

 

 Met.: Častou chybou, které se studenti při řešení této úlohy dopouštějí, je, že sice správně stanoví výchozí podmínku $\frac{-2}{x^{2}-5x+6}\geq 0$, ale s ohledem na záporného čitatele udělají chybný následující krok, kdy zapomenou, že ve jmenovateli nesmí být nula a stanoví nesprávně, že má platit x2 – 5x + 6 ≤ 0 namísto správného x2 – 5x + 6 < 0.

Př. 4 Určete, pro která  má daný výraz smysl:

  

 Met.: Této úlohy lze využít k připomenutí práce s logaritmy. Studenti by měli sami stanovit podmínku, že argument logaritmické funkce musí být kladný. Tedy 5x2 – 8x – 4 > 0.

Př. 5 Řešte nerovnici s faktoriály

  

Met.: V této úloze je velmi důležité správné stanovení podmínek. Nestačí konstatovat, že n ≥ 3, je nezbytné uvést, že n ϵ ***N***. A podmínky se musí zohlednit při stanovení množiny kořenů nerovnice.

Př. 6 Řešte nerovnici s kombinačními čísly

  

Met.: V této úloze je velmi důležité správné stanovení podmínek. Nestačí konstatovat, že n ≥ 2, je nezbytné uvést, že n ϵ ***N***. A podmínky se musí zohlednit při stanovení množiny kořenů nerovnice.

Př. 7 Pro které hodnoty parametru má rovnice reálné kořeny? 

 Met.: Kvadratická rovnice má reálné kořeny v případě, že její diskriminant je větší nebo rovný nule. Tedy 9m2 – 4.2.(m2 – 2m – 7,5) ≥ 0 m2 + 16m + 60 ≥ 0 …

Pozn.: Úlohy 4, 5 a 6 jsou samozřejmě určeny až pro maturitní opakování.