06 Kvadratické nerovnice – met.

Stručný přehled teorie

Kvadratickou nerovnicí rozumíme výrokovou formu tvaru

$ax^2+bx+c > 0;$
$ax^2+bx+c < 0;$
$ax^2+bx+c \geq 0;$
$ax^2+bx+c \leq 0,$ kde $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$

Met.: Metod řešení kvadratické nerovnice je celá řada:

početně,
graficky (časově náročné a nepřesné),
kombinací početní a grafické metody (nejlepší z uvedených), ...

Vyučující by měl zvážit, s kterými z nich, a do jaké hloubky, studenty seznámí. Ve třídě nadaných studentů může klidně projít všechny zmíněné a doporučit používání nejvýhodnější z nich. Je-li však třída slabá, je rozumnější ukázat studentům pouze jednu nejvýhodnější metodu a důkladně ji s nimi procvičit. Vzhledem k tomu, jak často se budou studenti ve středoškolské matematice s kvadratickými nerovnicemi setkávat, je nezbytné, aby chápali, že znalost jejich řešení patří k nejzákladnějším znalostem, a aby je vždy řešili obratně a s jistotou.

Řešení kvadratické nerovnice:

1. POČETNĚ (převedením kvadratické nerovnice na nerovnici v součinovém tvaru)

Př. Řešte v $\boldsymbol{R}$: $\boldsymbol{ax^2+bx+c < 0}$, kde $a > 0$

Řeš.: Nechť r a s jsou kořeny rovnice $ax^2+bx+c = 0$.

Pak převedeme zadanou kvadratickou nerovnici do součinového tvaru

$$a(x-r).(x-s) < 0$$

a dořešíme

- buď metodou nulových bodů s použitím číselné osy
- nebo úvahou, že $a(x-r).(x-s) < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-r > 0 \wedge x-s < 0) \vee (x-r < 0 \wedge x-s > 0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x > r \wedge x < s) \vee (x < r \wedge x > s) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in K_1 \vee x \in K_2$

$\boldsymbol{K = K_1 \cup K_2}$

Pozn. Pokud kořeny r, s neexistují, je množinou kořenů nerovnice buď množina všech reálných čísel nebo prázdná množina.

2. GRAFICKY

Př. . Řešte v $\boldsymbol{R}$: $\boldsymbol{ax^2+bx+c < 0}$, kde $a > 0$

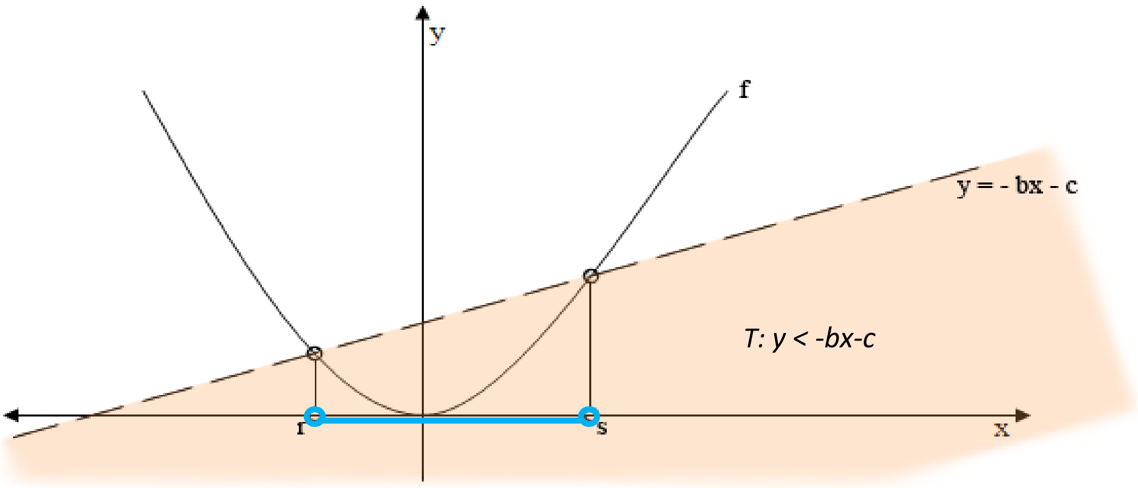
Řeš. (jedno z možných): $ax^2 < -bx - c$

Zavedeme funkci $f: y = ax^2$

a relaci $T: y < -bx - c$

Znázorníme jejich grafy v soustavě souřadnic – množina kořenů je množina x-ových souřadnic všech bodů, které tvoří průnik obou grafů, tedy $\boldsymbol{K = (r, s)}$.

Pozn. Nevýhodou popsané metody je nepřesnost při „čtení“ průsečíků r, s.



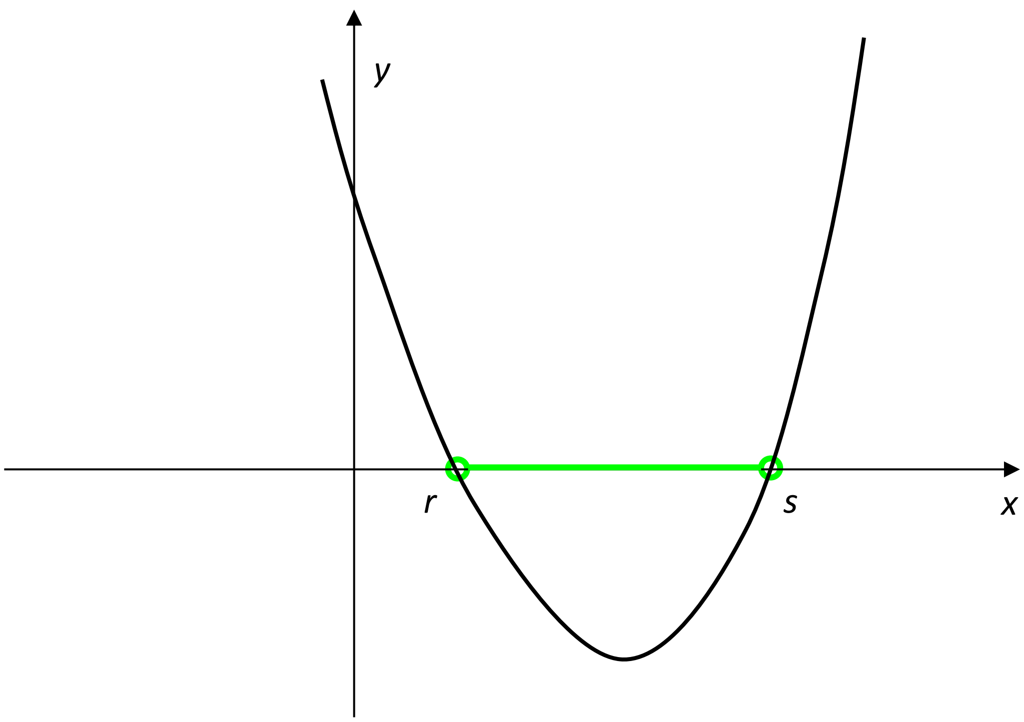
3.KOMBINACÍ POČETNÍ A GRAFICKÉ METODY

Př. Řešte v ***R***: $\boldsymbol{ax^2+bx+c<0}$**,** kde $a>0$

Řeš.: Nechť r a s jsou kořeny rovnice $ax^2+bx+c=0$.

Pak parabola, která je grafem funkce f: $y=ax^2+bx+c$, protíná osu x v bodech $P_1[r,0]$ a $P_2[s,0]$. Pokud je podle zadání $a>0$, má funkce f minimum v bodě, který odpovídá vrcholu dotyčné paraboly.

Množina kořenů se určí podle znaménka nerovnosti v zadané nerovnici. V našem příkladu je $y=ax^2+bx+c<0$ a tomu odpovídá ***K*= (r, s)**.



Základní poznatky

Př. 1 Řešte v *R*:

$$x^2 - 5x + 6 < 0 \qquad [K = (2;3)]$$

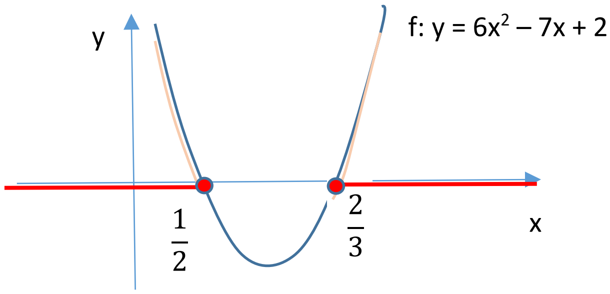
Př. 2 Řešte v *R*:

$$6x^2 - 7x + 2 \geq 0 \qquad \left[K = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right\rangle \cup \left\langle \frac{2}{3}; \infty\right)\right]$$

Met.: Pokud chce vyučující pracovat s kombinací početní a grafické metody (je velmi rychlá a názorná), je nezbytné, aby nejprve studentům vysvětlil její podstatu. V levé straně kvadratické nerovnice studenti musejí vidět pravou stranu pomocné kvadratické funkce, jejíž graf (parabola) načrtnutý do soustavy souřadnic využijí při určení množiny řešení nerovnice.

Např.: Př. 2 $6x^2 - 7x + 2 \geq 0$ ……. pomocná kvadratická funkce je f: $y = 6x^2 - 7x + 2$ … využití jejího grafu: 1) podle koeficientu kvadratického členu určíme polohu paraboly v soustavě souřadnic … $a = 6 > 0$ → vrchol paraboly odpovídá minimu funkce (parabola „otevřena nahoru“)

2) průsečíky paraboly s osou x jsou body, pro něž souřadnice y = 0. Vyřešením rovnice $6x^2 - 7x + 2 = 0$ určíme x-ové souřadnice průsečíků ($x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{2}{3}$) a zakreslíme je i s náčrtem paraboly do soustavy souřadnic. Pak už lehce z obrázku určíme, kterým argumentům x odpovídají požadovaná $y = 6x^2 - 7x + 2 \geq 0$.



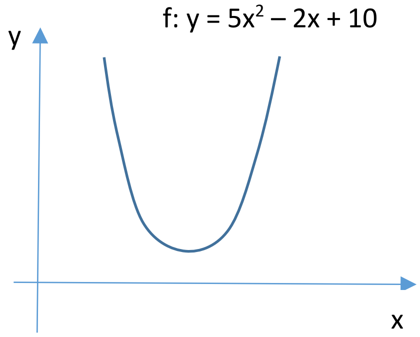
$$K = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right\rangle \cup \left\langle \frac{2}{3}; \infty\right)$$

Tato metoda se ukáže jako zásadním způsobem užitečná, názorná a srozumitelná i pro slabší studenty zejména v úlohách podobných následujícím dvěma:

Např. Př. 1 Řešte v R: $5x^2 - 2x + 10 \geq 0$.

Velmi častou chybou, které se studenti dopouštějí, je, že vyřeší pomocnou kvadratickou rovnici $5x^2 - 2x + 10 = 0$, konstatují, že její diskriminant je záporný, takže řešení v R neexistuje a z toho udělají zbrklý závěr, že množina řešení dané nerovnice je prázdná. A tady musí vyučující vyvolat diskusi o tom, proč studenti pomocnou rovnici řešili – šlo o nalezení průsečíků paraboly s osou x. Záporný diskriminant znamená tedy pouze to, že průsečíky s osou x neexistují. Vzhledem k tomu, že kvadratický koeficient je 5 (větší než nula), odpovídá vrchol paraboly minimu pomocné funkce, tedy parabola je „otevřena nahoru“.

Náčrt:

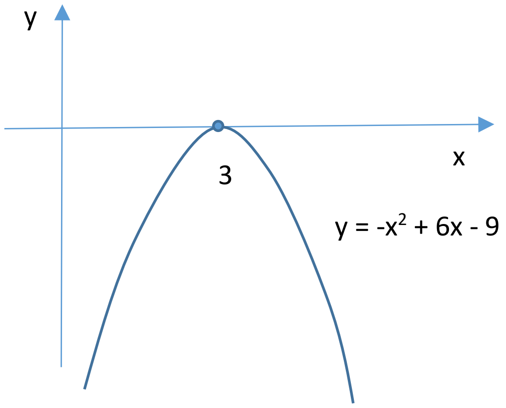


Z náčrtu je zřejmé, že pro každé $x \in \boldsymbol{R}$ platí, že $y = 5x^2 - 2x + 10 \geq 0$. Tozn.: $K = \boldsymbol{R}$.

Pozn. Při procvičování a v prověrkách je třeba myslet i na zadávání podobných úloh. Vyučující by měl promyslet i to, že kdyby zadal k řešení nerovnici $5x^2 - 2x + 10 \leq 0$, bude řešením prázdná množina a nemusí být zřejmé, zda student nerozhodl o výsledku pouze na základě záporného diskriminantu.

Nebo: Př. 2 Řešte v ***R***: $-x^2 + 6x - 9 < 0$. Kvadratická rovnice $-x^2 + 6x - 9 < 0$ má jediný kořen (x = 3). Tozn., že odpovídající parabola má s osou x jediný společný bod – bod dotyku. Kvadratický koeficient –1 určuje polohu paraboly tak, že vrchol odpovídá maximu.

Náčrt:



Z náčrtu je zřejmé, že pro x = 3 je y = 0. Pro všechna ostatní reálná x je $y = -x^2 + 6x - 9 < 0$.

Tozn.: K = ***R*** - {3}

Typové příklady standardní náročnosti

Met.: Následující úlohy představují příklady, které ukazují, že se studenti při probírání nejrůznějších matematických témat často setkávají průběžně po celou dobu středoškolského studia s potřebou řešit kvadratické nerovnice

Př. 3 Určete, pro která x má daný výraz smysl:

$$\sqrt{\frac{-2}{x^2 - 5x + 6}} \qquad [x \in (2;3)]$$

Met.: Častou chybou, které se studenti při řešení této úlohy dopouštějí, je, že sice správně stanoví výchozí podmínku $\frac{-2}{x^2-5x+6} \geq 0$, ale s ohledem na záporného čitatele udělají chybný následující krok, kdy zapomenou, že ve jmenovateli nesmí být nula a stanoví nesprávně, že má platit $x^2 - 5x + 6 \leq 0$ namísto správného $x^2 - 5x + 6 < 0$.

Př. 4 Určete, pro která x má daný výraz smysl:

$$\log(5x^2 - 8x - 4) \qquad \left[x \in \left(-\infty; -\frac{2}{5}\right) \cup (2; \infty)\right]$$

Met.: Této úlohy lze využít k připomenutí práce s logaritmy. Studenti by měli sami stanovit podmínku, že argument logaritmické funkce musí být kladný. Tedy $5x^2 - 8x - 4 > 0$.

Př. 5 <u>Řešte nerovnici s faktoriály</u>

$$\frac{n!}{(n-3)!} \geq n^3 - 37n + 90 \qquad [K = \{3;4;5;6;7;8;9;10\}]$$

Met.: V této úloze je velmi důležité správné stanovení podmínek. Nestačí konstatovat, že n ≥ 3, je nezbytné uvést, že n ϵ ***N***. A podmínky se musí zohlednit při stanovení množiny kořenů nerovnice.

Př. 6 Řešte nerovnici s kombinačními čísly

$$\binom{n}{2} \leq 55 \qquad [K = \{2;3;4;5;6;7;8;9;10;11\}]$$

Met.: V této úloze je velmi důležité správné stanovení podmínek. Nestačí konstatovat, že n ≥ 2, je nezbytné uvést, že n ϵ ***N***. A podmínky se musí zohlednit při stanovení množiny kořenů nerovnice.

Př. 7 Pro které hodnoty parametru m má rovnice $2x^2 - 3mx + m^2 - 2m - 7{,}5 = 0$ reálné kořeny?

$$\left[m \in \left(-\infty; -10\right\rangle \cup \left\langle -6; \infty\right)\right]$$

Met.: Kvadratická rovnice má reálné kořeny v případě, že její diskriminant je větší nebo rovný nule. Tedy $9m^2 - 4.2.(m^2 - 2m - 7{,}5) \geq 0 \Longrightarrow m^2 + 16m + 60 \geq 0$ ...

Pozn.: Úlohy 4, 5 a 6 jsou samozřejmě určeny až pro maturitní opakování.