08 Iracionální rovnice – met.

Stručný přehled teorie

Iracionální rovnice jsou rovnice obsahující neznámou pod odmocninou.

Řešíme je vhodnými úpravami (většinou umocňováním, což často bývá důsledková úprava), kterými se snažíme odstranit odmocniny, pod nimiž se nachází neznámá.

Je žádoucí zpravidla ještě před řešením samotné rovnice určit její definiční obor neboli podmínky (pokud to ovšem není příliš komplikované a zdlouhavé), protože to umožní ihned po nalezení potenciálních kořenů okamžitě vyřadit ty z nich, které nalezeným podmínkám nevyhovují.

Zkouška je i přes určení definičního oboru většinou nezbytnou součástí řešení iracionální rovnice, neboť umocnění bývá velmi často neekvivalentní úpravou. Zkoušku však už provádíme pouze pro ty potenciální kořeny, jež vyhovují podmínkám.

Ekvivalentní úpravy jsou takové, které převádějí každou rovnici na rovnici s ní ekvivalentní, tj. zachovávají množinu všech kořenů řešené rovnice. Např.:

- výměna levé a pravé strany rovnice
- přičtení, odečtení téhož čísla k oběma stranám rovnice
- přičtení (odečtení) téhož výrazu s neznámou k oběma stranám rovnice
- vynásobení, vydělení obou stran rovnice stejným nenulovým číslem příp. výrazem, který je definován v celém oboru proměnné
- úpravy výrazů na jednotlivých stranách rovnice

Důsledkové úpravy jsou takové, jejichž důsledkem může (ale nemusí) být „rozšíření“ množiny kořenů původní rovnice. Množina kořenů původní rovnice je tedy podmnožinou množiny kořenů rovnice získané. Např.:

- umocňování

Pozn 1: Po důsledkové úpravě je nutno vždy provádět zkoušku!

Pozn 2: Umocnění (rozuměj umocnění na druhou) obou stran rovnice je ekvivalentní úpravou tehdy, pokud obě strany rovnice nabývají v celém oboru proměnné buď pouze kladných hodnot, nebo pouze záporných hodnot.

Postup při řešení iracionálních rovnic:

1) Určíme podmínky
2) Vyřešíme rovnici
3) Srovnáme kořeny s podmínkami a vyřadíme ty, které podmínkám nevyhovují
4) V případě, že jsme provedli při řešení byť jen jedinou neekvivalentní úpravu, provedeme zkoušku se všemi kořeny, které vyhovují podmínkám

Základní poznatky:

Př. 1 Řešte v R: $\sqrt{x-1} = -3$ $[K = \emptyset]$

Př. 2 Řešte v R: $\sqrt{x-2} + 4 = x$ $[K = \{6\}]$

Př. 3 Řešte v R: $\sqrt{(x+6)^2} = x+6$ [K = ⟨-6;∞)]

Př. 4 Řešte v R: $\sqrt{(1-2x)^4} = (1-2x)^2$ [K = R]

Př. 5 Řešte v R: $\sqrt{(x^2+2x-3)^2} = x^2+2x-3$ [K = (-∞;-3⟩ ∪ ⟨1;∞)]

Met.: Tyto jednoduché úlohy je dobré předřadit před klasické iracionální rovnice. Jejich řešení je rychlé, někdy očividné i bez výpočtu (např. 1, 4).
Rci 3 upravíme na $|x+6| = x+6$. To platí pro x + 6 ≥ 0, tedy x ≥ -6.
Rci 5 upravíme na $|x^2+2x-3| = x^2+2x-3$. To platí pro $x^2+2x-3 \geq 0$ … kvadrat. nerce.

Typové příklady standardní náročnosti

Met.: Řešení rovnic provádíme klasicky:
1) Určíme podmínky (pokud by vedly k příliš komplikovaným výpočtům, pouze je zapíšeme a nedořešíme)
2) Vyřešíme rovnici (úpravu rovnice umocňováním obou stran je často třeba provést opakovaně, dokud se nezbavíme všech odmocnin, pod nimiž je neznámá)
3) Srovnáme kořeny s určenými podmínkami a vyřadíme ty, které podmínkám nevyhovují
4) V případě, že jsme provedli při řešení byť jen jedinou neekvivalentní úpravu, provedeme zkoušku se všemi kořeny, které vyhovují podmínkám.

Př. 6 Řešte v R: $\sqrt{10-x} + \sqrt{x-8} = 2$ [K = {9}]

Př. 7 Řešte v R: $\sqrt{4x+8} - \sqrt{3x-2} = 2$ [K = {2; 34}]

Př. 8 Řešte v R: $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = \sqrt{6-x}$ $[K = \{2{,}4; 4\}]$

Met.: $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = \sqrt{6-x}$ $/\ ^2$ (ekvivalentní úprava)

$x-2+2.\sqrt{-x^2+6x-8}+4-x = 6-x$

$2.\sqrt{-x^2+6x-8} = 4-x$ $/\ ^2$ (neekvivalentní úprava !!!)

$-4x^2+24x-32 = 16-8x+x^2$

$5x^2-32x+48 = 0$

$x_{1,2} = \frac{32\pm\sqrt{32^2-4.5.48}}{10} = \frac{32\pm\sqrt{64}}{10} = < \begin{matrix} 4 \\ 2{,}4 \end{matrix}$

Podm.:
$$\underbrace{\begin{matrix} x-2 \geq 0 & \rightarrow & x \geq 2 \\ 4-x \geq 0 & \rightarrow & x \leq 4 \\ 6-x \geq 0 & \rightarrow & x \leq 6 \end{matrix}}_{x \in \langle 2\,;4\rangle}$$

Oba potenciální kořeny vyhovují podmínkám. Protože jsme během řešení provedli neekvivalentní úpravu, musíme provést s oběma zkoušku:

$L_{(4)} = \sqrt{4-2} + \sqrt{4-4} = \sqrt{2}$

$P_{(4)} = \sqrt{6-4} = \sqrt{2}$

$\Big\}\quad 4 \in K$

$L_{(2,4)} = \sqrt{2{,}4-2} + \sqrt{4-2{,}4} = \sqrt{0{,}4} + \sqrt{1{,}6}$

$P_{(2,4)} = \sqrt{6-2{,}4} = \sqrt{3{,}6}$

Rovnost $L_{(2,4)}$ a $P_{(2,4)}$ není zřejmá. Ale $L_{(2,4)}$ je součtem dvou kladných čísel a $P_{(2,4)} > 0$. Můžeme tedy zkusit porovnat druhé mocniny: $L^2_{(2,4)} = 0{,}4 + 2.\sqrt{0{,}64} + 1{,}6 = 3{,}6 = P^2_{(2,4)}$. Proto i $2{,}4 \in K$.

Závěr: $K = \{2{,}4\,; 4\}$

Př. 9 Řešte v R: $\dfrac{x+\sqrt{x+2}}{x-\sqrt{x+2}} = -\dfrac{7}{5}$ $\left[K = \left\{\dfrac{1}{4}\right\}\right]$

Př. 10 Řešte v R: $\sqrt{x^2+17} - \sqrt[4]{x^2+17} = 6$ [K = {-8; 8}]

Rozšiřující cvičení

Př. 11 Řešte v R: $\sqrt{2(x^2+7x+10)^2-7} = x^2+7x+11$ $[\text{Realisticky.cz} - 2.7.22, K = \{-6, -1\}$

Met.: Pro zjednodušení řešení lze někdy využít substituci

např. v př. 10 ... y = $\sqrt[4]{x^2+17}$, $y^2 = \sqrt{x^2+17}$ .... ,

v př. 11 ... y = $x^2 + 7x + 10$, y + 1 = $x^2 + 7x + 11$ ...

Př. 12 Řešte v R: $\sqrt{1+x\sqrt{x^2+24}} = x+1$ [K = {0; 5}]

Met.: $\sqrt{1+x\sqrt{x^2+24}} = x+1 \quad /^2$

Podm.: $1 + x\sqrt{x^2+24} \geq 0$ ... komplikované - nedořešíme, zkouška bude evidentně nezbytnou součástí řešení, provedeme ji pro všechny potenciální kořeny

$1 + x\sqrt{x^2+24} = x^2 + 2x + 1$

$x\sqrt{x^2+24} = x(x+2)$ ... v tomto místě se studenti mohou dopustit chyby, když využijí stejného činitele *x* na obou stranách rovnice a tímto činitele rovnici vydělí. V tom okamžiku samozřejmě ztratí jedno řešení. Učitel musí této situace využít k tomu, aby přiměl studenty k zamyšlení nad podobou rovnice v okamžiku, kdy se za *x* dosadí číslo *0*. Po dosazení nuly dostaneme z rovnice výrok *0 = 0*, který je pravdivý, což znamená, že *0* je řešením rovnice. Teprve po prozkoumání situace s dosazením nuly za *x* můžeme rovnici vydělit činitelem *x*, který už ovšem bude od nuly různý.

$x\sqrt{x^2+24} = x(x+2) \quad /:x$

$\sqrt{x^2+24} = x+2 \quad /^2$

$x^2 + 24 = x^2 + 4x + 4$

$4x = 20 \quad \rightarrow \quad x = 5$

Zkouška: $L_{(0)} = \sqrt{1+0\sqrt{0^2+24}} = 1$

$P_{(0)} = 0 + 1 = 1$

$\Big\}\quad 0 \in K$

$L_{(5)} = \sqrt{1+5\sqrt{5^2+24}} = 6$

$P_{(5)} = 5 + 1 = 6$

$\Big\}\quad 5 \in K$

Závěr: $K = \{0; 5\}$

Iracionální nerovnice – představují látku, která je považována za téma nad rámec učebních osnov na střední škole. Pokud se přesto učitel rozhodne s iracionálními nerovnicemi studenty seznámit (důvodem může být velmi nadaná třída a dostatek času), měl by zmínit alespoň *dva základní typy příkladů*:

1) $\sqrt{a} < b \;\; /^2$

$\rightarrow \;\; a \geq 0 \;\wedge b > 0 \;\wedge a < b^2 \,;$ obdobně $\sqrt{a} \leq b$

2) $\sqrt{a} > b$

$\rightarrow a) \;\; a \geq 0 \;\wedge b \geq 0 \;\wedge a > b^2 \quad \vee \quad b) \;\; a \geq 0 \;\wedge b < 0 \,;$ obdobně $\sqrt{a} \geq b\,.$

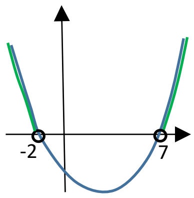
Př. 13 Řešte v R: $\sqrt{x+18} < 2 - x \;\; /^2$

$\rightarrow \boxed{x + 18 \geq 0} \quad \wedge \quad \boxed{2 - x > 0} \quad \wedge \quad \boxed{x + 18 < 4 - 4x + x^2}$

$x \geq -18 \qquad x < 2 \qquad x^2 - 5x - 14 > 0$

$\boxed{x \in \langle -18; \infty)} \qquad \boxed{x \in (-\infty; 2)} \qquad (x-7)(x+2) > 0$

$\boxed{x \in (-\infty; -2) \cup (7; \infty)}$



Závěr: $K = \langle -18; -2)$

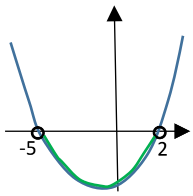
Př. 14 Řešte v R: $\sqrt{x+14} > x + 2 \;\; /^2$

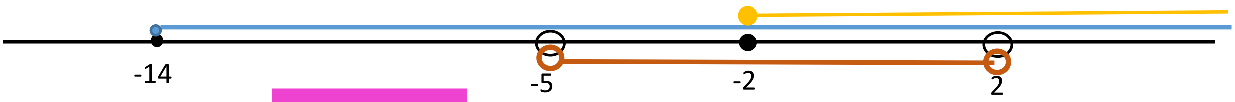
$\boxed{x + 14 \geq 0} \quad \wedge \quad \boxed{x + 2 \geq 0} \quad \wedge \quad \boxed{x + 14 > x^2 + 4x + 4}$

$x \geq -14 \qquad x \geq -2 \qquad x^2 + 3x - 10 < 0$

$\boxed{x \in \langle -14; \infty)} \qquad \boxed{x \in \langle -2; \infty)} \qquad (x+5)(x-2) < 0$

$\boxed{x \in (-5; 2)}$





$\boxed{x + 14 \geq 0} \quad \wedge \quad \boxed{x + 2 < 0}$

$x \geq -14 \qquad x < -2$

$\boxed{x \in \langle -14; \infty)} \qquad \boxed{x \in (-\infty; -2)}$

Závěr: $K = K_a \cup K_b = \langle -14; 2)$